Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad

CURSO: 2019-2020

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

Realiza cuatro preguntas de las ocho que se presentan

P1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} (a+1)x+(a^2+a)y=2 \\ (-a-1)x-a^2y=0 \\ ay+(a^2-1)z=3-a \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

(2.5 puntos)

P2) Calcula la ecuación continua de una recta r sabiendo que corta a la recta $s\equiv\begin{cases} 3x+y-z-7=0 \\ x+y-5=0 \end{cases}$, es paralela al plano de ecuación $\pi\equiv 2x-y+3z-6=0$ y pasa por el punto $P\equiv(-1,3,1)$. (2.5 puntos)

P3) Calcula los siguientes límites

$$\lim_{x\to 1}\left(2+\sin\frac{3\pi x}{2}\right)^{\frac{1}{x^2-x}}$$ (1.25 puntos)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^4-x^2+1}-\sqrt{x^4-7}\right)$$ (1.25 puntos)

P4) Sea la función $f(x)=\left(1+\sin\frac{\pi x}{2}\right)^x$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[1,2]$. (0.75 puntos)

b) Demuestra que existe $\alpha\in(1,2)$ tal que $f\,'(\alpha)=0$. Enuncia los resultados teóricos empleados y justifica su uso. (1.75 puntos)

P5) Sean A y B dos matrices de tamaño 3×3 tales que $|A|=|B|=\frac{1}{2}$. Calcula $|C|$ teniendo en cuenta que la matriz C es la siguiente:

$$C=\left(2\cdot A^t\cdot B^{-1}\right)^2$$

(2.5 puntos)

P6) Los puntos $A\equiv(-1,2,1)$ y $B\equiv(2,5,1)$ son dos vértices de un cuadrado. Halla los otros dos vértices sabiendo que están en la recta de ecuación

$$r\equiv\frac{x}{-1}=\frac{y-4}{1}=\frac{z+1}{-4}$$

(2.5 puntos)

P7) Sea la función $f(x)=(x+3)^{\sin(\pi x)}\ln\left(x^2-x+2\right)$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[-1,0]$. (1 punto)

b) Demuestra que existe $\alpha\in(-1,0)$ tal que $f'(\alpha)=-\ln 2$. Enuncia los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

(1.5 puntos)

P8) Encuentra los dos puntos en que se cortan las gráficas de estas dos funciones:

$$f(x)=\sin(\pi x) \text{ y } g(x)=\left|x^2-x\right|$$

Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas.

(2.5 puntos)

Evaluación del Bachillerato para el Acceso a la Universidad

CURSO: 2019-2020

ASIGNATURA: MATEMÁTICAS II

upna
Universidad Pública de Navarra
Nafarroako Unibertsitate Publikoa

Criterios de corrección y calificación

Criterios generales

La duración de la prueba es de 90 minutos. Se calificará de 0 a 10 puntos, redondeando a cuartos de punto.

- Se debe responder exclusivamente a cuatro de los problemas planteados. Si alguien responde a más de cuatro, solo se sumarán las cuatro peores puntuaciones.

- Se tendrá en cuenta el planteamiento seguido para la resolución del problema y la claridad en la exposición. Si es pertinente, se valorará la referencia a los resultados teóricos usados.

- Para la penalización de los errores en los cálculos, se tendrá en cuenta:
  - Si son consecuencia de no haber seguido el procedimiento más adecuado.
  - Si reflejan fallos de concepto.
  - Si producen simplificaciones relevantes.
  - Si ocurren con reiteración.

Criterios específicos

P1) Se valorará con 1.5 puntos la discusión completa, incluyendo la mención del teorema, 0,5 puntos la solución del caso compatible determinado y 0.5 puntos la del caso compatible indeterminado.

P4) En el apartado (b) se valorará sobre 0.75 puntos el enunciado del (de los) resultado(s) teórico(s) requerido(s). Se valorará sobre 1 punto la justificación de su uso.

P7) En el apartado (b) se valorará sobre 0.5 puntos el enunciado del (de los) resultado(s) teórico(s) requerido(s). Se valorará sobre 1 punto la justificación de su uso.

P8) Se valorará con 0.5 puntos la obtención de los puntos de corte, con 0,5 puntos el dibujo de la gráfica (aunque no sea muy detallado) y con 1,5 puntos el cálculo del área. Si la resolución es correcta, se puede obtener la máxima puntuación aunque no incluya dibujo.

SOLUCIONES

P1**)** Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible:

$$\begin{cases} (a+1)x+(a^2+a)y=2 \\ (-a-1)x-a^2y=0 \\ ay+(a^2-1)z=3-a \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso.

(2.5 puntos)

Consideramos la matriz de coeficientes asociada al sistema y la matriz ampliada, comparamos sus rangos y por el teorema de Rouche- Frobenius vemos que tipo de sistema es.

$$A=\begin{pmatrix} a+1 & a^2+a & 0 \\ -a-1 & -a^2 & 0 \\ 0 & a & a^2-1 \end{pmatrix} \text{ y } A/B=\begin{pmatrix} a+1 & a^2+a & 0 & 2 \\ -a-1 & -a^2 & 0 & 0 \\ 0 & a & a^2-1 & 3-a \end{pmatrix}$$

Calculamos el determinante de A para establecer los diferentes casos que se nos pueden plantear en función de su valor nulo o no.

$$|A|=\begin{vmatrix} a+1 & a^2+a & 0 \\ -a-1 & -a^2 & 0 \\ 0 & a & a^2-1 \end{vmatrix}=(a+1)(-a^2)(a^2-1)-(a^2+a)(-a-1)(a^2-1)=$$

$$=(a+1)(a^2-1)(-a^2)+(a+1)(a^2-1)(a^2+a)=(a+1)(a^2-1)\left[-a^2+a^2+a\right]=a(a+1)(a^2-1)$$

Igualamos a cero el determinante

$$|A|=0 \Rightarrow (a+1)(a^2-1)a=0 \Rightarrow \begin{cases} a+1=0 \Rightarrow a=-1 \\ a^2-1=0 \Rightarrow a^2=1 \Rightarrow a=\pm 1 \\ a=0 \end{cases}$$

El determinante se anula cuando $a=-1$, $a=1$ o $a=0$. Establecemos cuatro casos distintos que analizamos por separado.

CASO 1. $a\neq -1$, $a\neq 1$ y $a\neq 0$

En este caso el determinante de la matriz de coeficientes es no nulo y el rango de A es 3. El rango de la matriz ampliada A/B también es 3 al igual que el número de incógnitas. Según el teorema de Rouche – Frobenius el sistema es **compatible determinado**.

Obtenemos su solución utilizando el método de Gauss.

$$\begin{pmatrix} a+1 & a^2+a & 0 & 2 \\ -a-1 & -a^2 & 0 & 0 \\ 0 & a & a^2-1 & 3-a \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Fila 1ª + Fila 2ª} \\ \begin{array}{cccc} a+1 & a^2+a & 0 & 2 \\ -a-1 & -a^2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & a & 0 & 2 \end{array} \rightarrow \text{Nueva fila 2ª} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a+1 & a^2+a & 0 & 2 \\ 0 & a & 0 & 2 \\ 0 & a & a^2-1 & 3-a \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Fila 3ª} - \text{Fila 2ª} \\ \begin{array}{cccc} 0 & a & a^2-1 & 3-a \\ 0 & -a & 0 & -2 \\ \hline 0 & 0 & a^2-1 & 1-a \end{array} \rightarrow \text{Nueva fila 3ª} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a+1 & a^2+a & 0 & 2 \\ 0 & a & 0 & 2 \\ 0 & 0 & a^2-1 & 1-a \end{pmatrix}$$

Pasamos al sistema de ecuaciones y resolvemos teniendo en cuenta que $a^2-1\neq 0$ y podemos despejar en la 3ª ecuación.

$$\begin{cases} (a+1)x+\left(a^2+a\right)y=2 \\ ay=2 \\ \left(a^2-1\right)z=1-a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a+1)x+\left(a^2+a\right)y=2 \\ \boxed{y=\dfrac{2}{a}} \\ \boxed{z=\dfrac{1-a}{a^2-1}=\dfrac{-\cancel{(a-1)}}{\cancel{(a-1)}(a+1)}=\dfrac{-1}{a+1}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+1)x+\left(a^2+a\right)\frac{2}{a}=2 \Rightarrow (a+1)x+\frac{2\cancel{a}(a+1)}{\cancel{a}}=2 \Rightarrow (a+1)x+2a+2=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a+1)x=-2a \Rightarrow \boxed{x=\frac{-2a}{a+1}}$$

La solución del sistema es $x=\dfrac{-2a}{a+1}$; $y=\dfrac{2}{a}$; $z=\dfrac{-1}{a+1}$. Esta solución existe pues el valor del parámetro $\boldsymbol{a}$ no es ni cero, ni 1 ni –1.

CASO 2. $a=-1$

El sistema queda:

$$\begin{cases} (-1+1)x+(1-1)y=2 \\ (1-1)x-y=0 \\ -y+(1-1)z=3+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0=2 \\ -y=0 \\ -y=4 \end{cases}$$

El sistema es **incompatible**, pues la primera ecuación es imposible y las restantes ofrecen solución contradictoria.

CASO 3. $a=0$

El sistema queda:

$$\begin{cases} (0+1)x+(0+0)y=2 \\ (0-1)x-0y=0 \\ 0y+\left(0^2-1\right)z=3-0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ -x=0 \\ -z=3 \end{cases}$$

Este sistema es **incompatible**, pues la solución para *x* es doble (0 y 2).

CASO 4. $a=1$

El sistema queda:

$$\begin{cases}(1+1)x+(1^2+1)y=2\\(-1-1)x-1^2y=0\\y+(1^2-1)z=3-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x+2y=2\\-2x-y=0\\\boxed{y=2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x+4=2\\-2x-2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x=-2\\-2x=2\end{cases}\Rightarrow\begin{Bmatrix}\text{Ecuaciones}\\\text{iguales}\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x=-2\Rightarrow\boxed{x=-1}$$

El sistema es **compatible indeterminado** con solución $x=-1$; $y=2$; $z=\lambda$. Tiene infinitas soluciones pues el valor de *z* puede ser cualquiera.

P2) Calcula la ecuación continua de una recta *r* sabiendo que corta a la recta $s\equiv\begin{cases}3x+y-z-7=0\\x+y-5=0\end{cases}$, es paralela al plano de ecuación $\pi\equiv 2x-y+3z-6=0$ y pasa por el punto $P\equiv(-1,3,1)$. (2.5 puntos)

Pasamos la ecuación de la recta *s* a paramétricas.

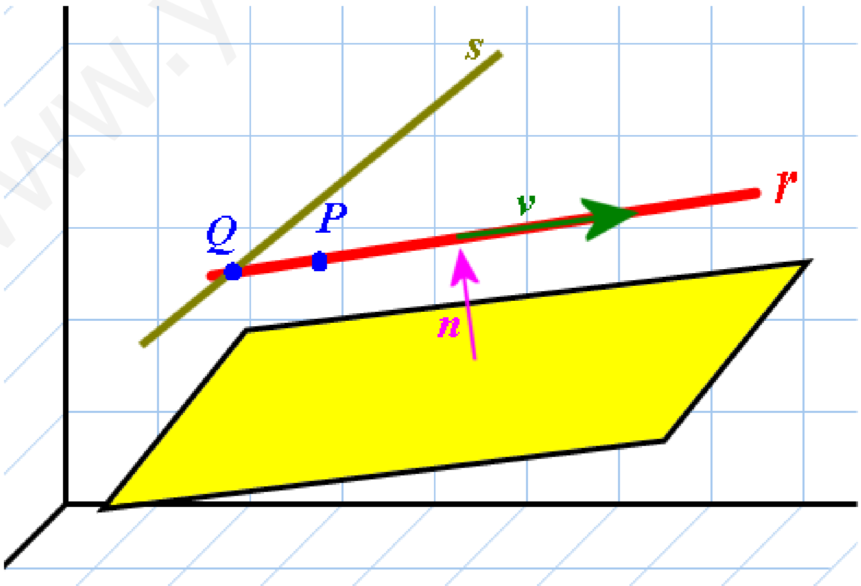
$$s\equiv\begin{cases}3x+y-z-7=0\\x+y-5=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x+y-z-7=0\\\boxed{y=5-x}\end{cases}\Rightarrow 3x+(5-x)-z-7=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x+5-x-z-7=0\Rightarrow 2x-z-2=0\Rightarrow\boxed{z=-2+2x}$$

Las ecuaciones paramétricas de la recta *s* son:

$$s\equiv\begin{cases}x=\lambda\\y=5-\lambda\\z=-2+2\lambda\end{cases}$$

Como la recta *r* corta a s coinciden en un punto de *s* que tiene coordenadas $Q(\lambda,5-\lambda,-2+2\lambda)$.



Un vector director de la recta *r* es

$$\left.\begin{array}{l}Q(\lambda,5-\lambda,-2+2\lambda)\in r\\P\equiv(-1,3,1)\in r\end{array}\right\}\Rightarrow\vec{v_r}=\overrightarrow{PQ}=(\lambda,5-\lambda,-2+2\lambda)-(-1,3,1)=(\lambda+1,2-\lambda,-3+2\lambda)$$

Además es paralela al plano por lo que es perpendicular al vector normal del plano $\vec{n}=(2,-1,3)$.

El producto escalar del vector director de la recta $\overrightarrow{v_r}$ y el normal del plano $\vec{n}$ debe ser cero.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{v_r}=(\lambda+1,2-\lambda,-3+2\lambda)\\ \vec{n}=(2,-1,3)\\ \vec{n}\perp\overrightarrow{v_r}\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{n}\cdot\overrightarrow{v_r}=0\Rightarrow(2,-1,3)\cdot(\lambda+1,2-\lambda,-3+2\lambda)=0$$

$$2(\lambda+1)-(2-\lambda)+3(-3+2\lambda)=0\Rightarrow 2\lambda+2-2+\lambda-9+6\lambda=0\Rightarrow 9\lambda-9=0\Rightarrow 9\lambda=9\Rightarrow\lambda=1$$

Por lo que el vector director de la recta *r* pedida es

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{v_r}=(\lambda+1,2-\lambda,-3+2\lambda)\\ \lambda=1\end{array}\right\}\Rightarrow\overrightarrow{v_r}=(2,1,-1)$$

Y la ecuación continua de la recta *r* queda:

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{v_r}=(2,1,-1)\\ P\equiv(-1,3,1)\in r\end{array}\right\}\Rightarrow\boxed{r\equiv\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-1}{-1}}$$

P3) Calcula los siguientes límites

$$\lim_{x\to 1}\left(2+\sin\frac{3\pi x}{2}\right)^{\frac{1}{x^2-x}} \qquad \text{(1.25 puntos)}$$

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^4-x^2+1}-\sqrt{x^4-7}\right) \qquad \text{(1.25 puntos)}$$

El primer límite es:

$$\lim_{x\to 1}\left(2+\sin\frac{3\pi x}{2}\right)^{\frac{1}{x^2-x}} = \left(2+\sin\frac{3\pi}{2}\right)^{\frac{1}{1^2-1}} = (2-1)^{\infty} = 1^{\infty} = \text{Indeterminación (nº } e) =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 1}\left(2+\sin\frac{3\pi x}{2}-1\right)\frac{1}{x^2-x}} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\left(1+\sin\frac{3\pi x}{2}\right)\frac{1}{x^2-x}} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{1+\sin\frac{3\pi x}{2}}{x^2-x}}$$

Calculo el límite del exponente.

$$\lim_{x\to 1}\frac{1+\sin\frac{3\pi x}{2}}{x^2-x} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación(Aplico L´Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{0+\frac{3\pi}{2}\cos\frac{3\pi x}{2}}{2x-1} = \frac{\frac{3\pi}{2}\cos\frac{3\pi}{2}}{2-1} = \frac{0}{1} = 0$$

Colocamos el valor obtenido en el límite que deseamos calcular.

$$\lim_{x\to 1}\left(2+\sin\frac{3\pi x}{2}\right)^{\frac{1}{x^2-x}} = e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{1+\sin\frac{3\pi x}{2}}{x^2-x}} = e^0 = \boxed{1}$$

El segundo límite es:

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x^4-x^2+1}-\sqrt{x^4-7}\right) = \infty-\infty = \text{Indeterminación }\left(\text{Utilizamos el conjugado}\right) =$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\frac{\left(\sqrt{x^4-x^2+1}-\sqrt{x^4-7}\right)\left(\sqrt{x^4-x^2+1}+\sqrt{x^4-7}\right)}{\sqrt{x^4-x^2+1}+\sqrt{x^4-7}} =$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\frac{\left(\sqrt{x^4-x^2+1}\right)^2-\left(\sqrt{x^4-7}\right)^2}{\sqrt{x^4-x^2+1}+\sqrt{x^4-7}} =$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\frac{x^4-x^2+1-\left(x^4-7\right)}{\sqrt{x^4-x^2+1}+\sqrt{x^4-7}} =$$

$$= \lim_{x\to +\infty}\frac{\cancel{x^4}-x^2+1-\cancel{x^4}+7}{\sqrt{x^4-x^2+1}+\sqrt{x^4-7}} = \lim_{x\to +\infty}\frac{-x^2+8}{\sqrt{x^4-x^2+1}+\sqrt{x^4-7}} =$$

$$= \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to +\infty}\frac{-x^2}{\sqrt{x^4}+\sqrt{x^4}} = \lim_{x\to +\infty}\frac{-x^2}{x^2+x^2} = \lim_{x\to +\infty}\frac{-\cancel{x^2}}{2\cancel{x^2}} = \lim_{x\to +\infty}\frac{-1}{2} = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

P4) Sea la función $f(x)=\left(1+\sin\frac{\pi x}{2}\right)^x$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[1,2]$. (0.75 puntos)

b) Demuestra que existe $\alpha\in(1,2)$ tal que $f'(\alpha)=0$. Enuncia los resultados teóricos empleados y justifica su uso. (1.75 puntos)

a) En el intervalo $[1,2]$ la función seno es continua, la función $1+\sin\frac{\pi x}{2}$ es siempre positiva pues en el intervalo $[1,2]$ toma valores positivos en los extremos del intervalo.

$$\left.\begin{array}{l} x=1\rightarrow 1+\sin\frac{\pi}{2}=1+1=2 \\ x=2\rightarrow 1+\sin\frac{\pi 2}{2}=1+\sin\pi=1-0=1 \end{array}\right\}$$

Y no se anula en el intervalo.

$$1+\sin\frac{\pi x}{2}=0\Rightarrow \sin\frac{\pi x}{2}=-1\Rightarrow\begin{cases}\frac{\pi x}{2}=\frac{3\pi}{2}\Rightarrow x=3\\ \frac{\pi x}{2}=-\frac{3\pi}{2}\Rightarrow x=-3\\ \ldots\end{cases}$$ Ningún valor pertenece a $[1,2]$.

La función exponencial con base positiva también es continua.
La composición de dichas funciones también es continua y esta es la función

$$f(x)=\left(1+\sin\frac{\pi x}{2}\right)^x.$$

b) Calculamos la derivada de la función $f(x)=\left(1+\sin\frac{\pi x}{2}\right)^x$.

Al ser la función positiva, por derivación logarítmica la obtenemos.

$$f(x)=\left(1+\sin\frac{\pi x}{2}\right)^x\Rightarrow \ln\left(f(x)\right)=\ln\left(1+\sin\frac{\pi x}{2}\right)^x\Rightarrow \ln\left(f(x)\right)=x\cdot\ln\left(1+\sin\frac{\pi x}{2}\right)$$

$$\Rightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=\ln\left(1+\sin\frac{\pi x}{2}\right)+x\cdot\frac{\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}}{1+\sin\frac{\pi x}{2}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=f(x)\cdot\left[\ln\left(1+\sin\frac{\pi x}{2}\right)+x\cdot\frac{\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}}{1+\sin\frac{\pi x}{2}}\right]\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x)=\left(1+\sin\frac{\pi x}{2}\right)^x\cdot\left[\ln\left(1+\sin\frac{\pi x}{2}\right)+x\cdot\frac{\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}}{1+\sin\frac{\pi x}{2}}\right]$$

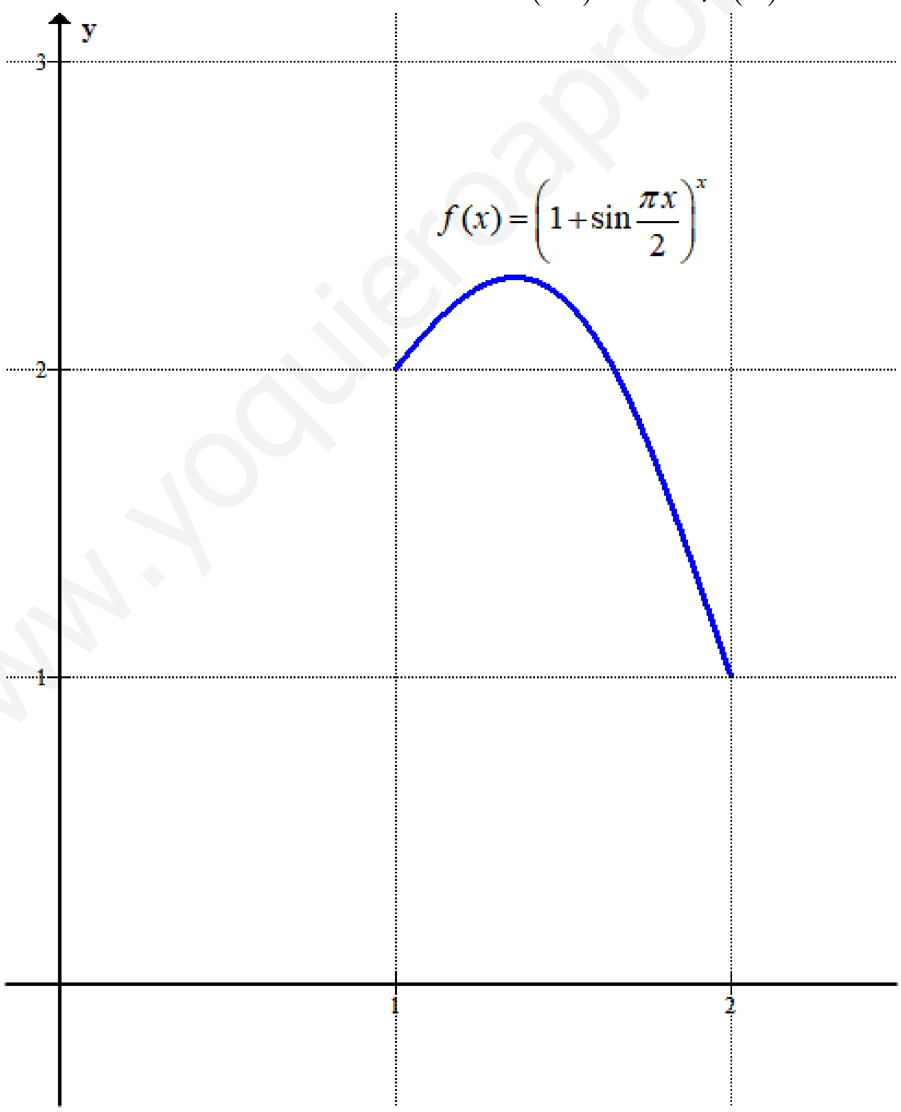
Esta derivada en los extremos del intervalo $[1,2]$ toma valores de distinto signo.

$$x=1 \to f\,'(1)=\left(1+\sin\frac{\pi}{2}\right)^1\cdot\left[\ln\left(1+\sin\frac{\pi}{2}\right)+1\cdot\frac{\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}}{1+\sin\frac{\pi}{2}}\right]=2\cdot[\ln 2]=1,38>0$$

$$x=2 \to f\,'(2)=(1+\sin\pi)^2\cdot\left[\ln(1+\sin\pi)+2\cdot\frac{\frac{\pi}{2}\cos\pi}{1+\sin\pi}\right]=1\cdot[0-\pi]=-\pi<0$$

Como la función derivada $f\,'(x)=\left(1+\sin\frac{\pi x}{2}\right)^x\cdot\left[\ln\left(1+\sin\frac{\pi x}{2}\right)+x\cdot\frac{\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi x}{2}}{1+\sin\frac{\pi x}{2}}\right]$ es continua en $[1,2]$, pues $1+\sin\frac{\pi x}{2}$ es positiva en el intervalo $[1,2]$.

Utilizando el teorema de Bolzano existe un valor $\alpha\in(1,2)$ donde $f\,'(\alpha)=0$.



P5) Sean A y B dos matrices de tamaño 3×3 tales que $|A|=|B|=\frac{1}{2}$. Calcula $|C|$ teniendo en cuenta que la matriz C es la siguiente:

$$C=\left(2\cdot A^t\cdot B^{-1}\right)^2$$

(2.5 puntos)

Utilizaremos las siguientes propiedades de los determinantes:

$a)\ \left|A^t\right|=|A|$

$b)\ \left|A^{-1}\right|=\frac{1}{|A|}$

c) $|A\cdot B|=|A|\cdot|B|$

$d)\ \left.\begin{matrix}|2\cdot B|\\ B \text{ de dimensión } 3\times 3\end{matrix}\right\}\Rightarrow |2\cdot B|=2^3\cdot|B|$

Aplicándolas obtenemos:

$$|C|=\left|\left(2\cdot A^t\cdot B^{-1}\right)^2\right|=\left|2\cdot A^t\cdot B^{-1}\right|^2=\left(2^3\cdot\left|A^t\cdot B^{-1}\right|\right)^2=\left(2^3\cdot\left|A^t\right|\cdot\left|B^{-1}\right|\right)^2=\left(2^3\cdot|A|\cdot\frac{1}{|B|}\right)^2$$

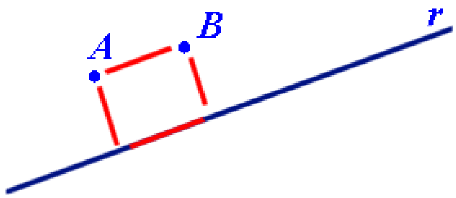
$$\boxed{|C|=\left(2^3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}}\right)^2=8^2=64}$$

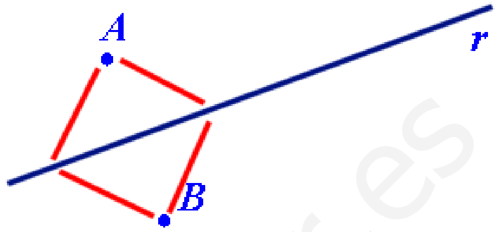
P6) Los puntos $A \equiv (-1,2,1)$ y $B \equiv (2,5,1)$ son dos vértices de un cuadrado. Halla los otros dos vértices sabiendo que están en la recta de ecuación

$$r \equiv \frac{x}{-1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+1}{-4}$$

(2.5 puntos)

Depende de la relación entre los puntos y la recta el cuadrado se puede construir de dos formas distintas.

1ª opción


2ª opción


Debemos de averiguar la posición relativa de la recta *r* con la recta *s* que pasa por los puntos A y B.

$$\left.\begin{array}{l} A \equiv (-1,2,1) \\ B \equiv (2,5,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \vec{v}_s = \overrightarrow{AB} = (2,5,1)-(-1,2,1) = (3,3,0) \\ B \equiv (2,5,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \vec{v}_s = (1,1,0) \\ B \equiv (2,5,1) \end{array}\right\} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = 5+\lambda \\ z = 1 \end{cases}$$

Como la recta *r* tiene ecuación en paramétricas

$$r \equiv \frac{x}{-1} = \frac{y-4}{1} = \frac{z+1}{-4} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} P(0,4,-1) \\ \vec{v}_r = (-1,1,-4) \end{array}\right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = -\alpha \\ y = 4+\alpha \\ z = -1-4\alpha \end{cases}$$

Las rectas r y s no son paralelas pues sus vectores directores no tienen coordenadas proporcionales.

$$\frac{1}{-1} \neq \frac{1}{1} \neq \frac{0}{-4}$$

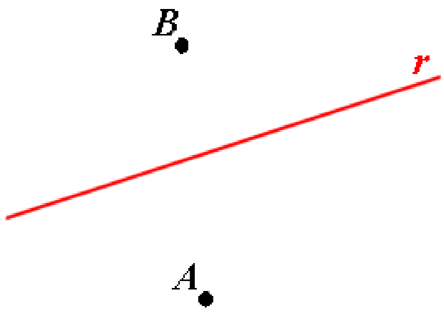
Ya sabemos que los vértices A y B no son consecutivos y estamos en la situación 2ª.

¿Las rectas se cortan o cruzan? Esto nos dirá si la recta y los puntos están en el mismo plano.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{v}_s = (1,1,0) \\ \vec{v}_r = (-1,1,-4) \\ \left.\begin{array}{l} B(2,5,1) \\ P(0,4,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow PB = (2,5,1)-(0,4,-1) = (2,1,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2-8+2+4 = 0$$

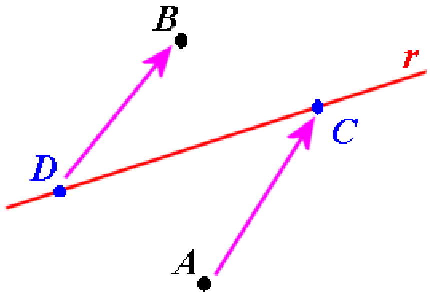
Las rectas se cortan y por tanto los puntos A y B y la recta *r* son coplanarios.
El cuadrado se puede formar como aparece en la 2ª opción.

La situación de los puntos y la recta es:



Buscamos dos puntos C y D de la recta $r \equiv \begin{cases} x = -\alpha \\ y = 4+\alpha \\ z = -1-4\alpha \end{cases}$ tales que el polígono ACBD sea un cuadrado.

Estos puntos tienen coordenadas $C(-\alpha, 4+\alpha, -1-4\alpha)$ y $D(-\alpha', 4+\alpha', -1-4\alpha')$



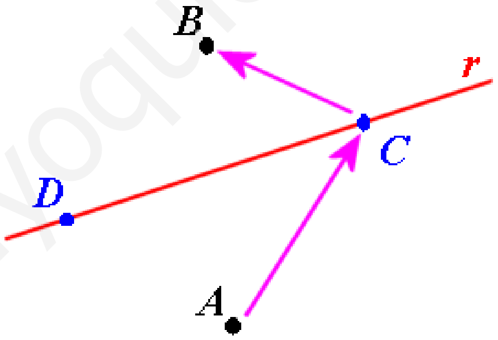
Para ser un cuadrado deben ser iguales los vectores $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{DB}$.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AC} = (-\alpha, 4+\alpha, -1-4\alpha) - (-1,2,1) = (1-\alpha, 2+\alpha, -2-4\alpha) \\ \overrightarrow{DB} = (2,5,1) - (-\alpha', 4+\alpha', -1-4\alpha') = (2+\alpha', 1-\alpha', 2+4\alpha') \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2+\alpha', 1-\alpha', 2+4\alpha') = (1-\alpha, 2+\alpha, -2-4\alpha) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2+\alpha' = 1-\alpha \\ 1-\alpha' = 2+\alpha \\ 2+4\alpha' = -2-4\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \alpha' = -1-\alpha \\ -\alpha' = 1+\alpha \\ 4\alpha' = -4-4\alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\alpha' = -1-\alpha}$$

Y además el vector $\overrightarrow{AC}$ debe ser perpendicular a $\overrightarrow{CB}$



$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AC} = (-\alpha, 4+\alpha, -1-4\alpha) - (-1,2,1) = (1-\alpha, 2+\alpha, -2-4\alpha) \\ \overrightarrow{CB} = (2,5,1) - (-\alpha, 4+\alpha, -1-4\alpha) = (2+\alpha, 1-\alpha, 2+4\alpha) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1-\alpha, 2+\alpha, -2-4\alpha)(2+\alpha, 1-\alpha, 2+4\alpha) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1-\alpha)(2+\alpha) + (2+\alpha)(1-\alpha) + (-2-4\alpha)(2+4\alpha) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2-\alpha-\alpha^2+2-\alpha-\alpha^2-4-8\alpha-8\alpha-16\alpha^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -18\alpha^2-18\alpha = 0 \Rightarrow \alpha^2+\alpha = 0 \Rightarrow \alpha(\alpha+1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \\ o \\ \alpha = -1 \end{cases}$$

Tiene dos soluciones posibles.

$$\left.\begin{array}{l}\alpha = 0 \\ \alpha' = -1-\alpha\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\alpha = 0 \\ \alpha' = -1\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\left.\begin{array}{l}C(-\alpha, 4+\alpha, -1-4\alpha) = (0,4,-1) \\ D(-\alpha', 4+\alpha', -1-4\alpha') = (1,3,3)\end{array}\right\}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha = -1 \\ \alpha' = -1-\alpha\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\alpha = -1 \\ \alpha' = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\left.\begin{array}{l}C(-\alpha, 4+\alpha, -1-4\alpha) = (1,3,3) \\ D(-\alpha', 4+\alpha', -1-4\alpha') = (0,4,-1)\end{array}\right\}}$$

Realmente son la misma solución: *C(1, 3, 3)* y *D(0, 4, –1)*

P7) Sea la función $f(x)=(x+3)^{\sin(\pi x)}\ln\left(x^2-x+2\right)$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[-1,0]$. (1 punto)

b) Demuestra que existe $\alpha\in(-1,0)$ tal que $f\,'(\alpha)=-\ln 2$. Enuncia los resultados teóricos empleados y justifica su uso.

(1.5 puntos)

a) La función $(x+3)$ es continua y positiva en el intervalo $[-1,0]$, pues en los extremos toma valores positivos: $(-1+3)=2>0$ y $(0+3)=3>0$, siendo una función lineal es positiva en $[-1,0]$.

La función exponencial también es continua.

La composición de ambas también es continua $(x+3)^{\sin(\pi x)}$.

La función $\left(x^2-x+2\right)$ es continua al ser un polinomio y es positivo pues es una parábola que toma valores positivos en los extremos $\left((-1)^2-(-1)+2\right)=4>0$ y $\left(0^2-0+2\right)=2>0$ y no corta el eje de abscisas, pues $\left(x^2-x+2\right)=0\Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-8}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{-7}}{2}=\nexists$.

El logaritmo neperiano de $\left(x^2-x+2\right)$ existe y es continuo.

El producto de dos funciones continuas es otra función continua.

b) Vamos a aplicar el teorema de Lagrange. Para ello la función $f(x)=(x+3)^{\sin(\pi x)}\ln\left(x^2-x+2\right)$ debe ser continua en $[-1,0]$, ser derivable en $(-1,0)$ y se cumple que existe $\alpha\in(-1,0)$ tal que $f\,'(\alpha)$ es igual a la pendiente de la recta que une los extremos de la función en el intervalo $(-1,0)$.

Existe $\alpha\in(-1,0)$ tal que

$$f\,'(\alpha)=\frac{f(0)-f(-1)}{0-(-1)}=\frac{(0+3)^{\sin(0)}\ln(0+2)-(-1+3)^{\sin(-\pi)}\ln(1+1+2)}{1}$$

$$f\,'(\alpha)=\frac{\ln 2-\ln 4}{1}=\ln\left(\frac{2}{4}\right)=\ln\left(\frac{1}{2}\right)=\ln 1-\ln 2=-\ln 2$$

P8) Encuentra los dos puntos en que se cortan las gráficas de estas dos funciones:

$$f(x)=\sin(\pi x) \text{ y } g(x)=\left|x^2-x\right|$$

Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas.

(2.5 puntos)

Igualamos las funciones $f(x)=\sin(\pi x)$ y $g(x)=\left|x^2-x\right|$.

$$f(x)=g(x)\Rightarrow \sin(\pi x)=\left|x^2-x\right|\Rightarrow\begin{cases} x=0, \text{ pues } \sin(0)=\left|0^2-0\right| \\ o \\ x=1, \text{ pues } \sin(\pi)=\left|1^2-1\right| \end{cases}$$

El área es el valor absoluto de la integral definida de la diferencia de las dos funciones entre 0 y 1.

En el intervalo $[0,1]$ la función *g(x)* tiene la expresión $g(x)=\left|x^2-x\right|=x-x^2$.

$$\text{Área}=\left|\int_0^1 \sin(\pi x)-\left(x-x^2\right)dx\right|=\left|\left[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi x)-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right]_0^1\right|=$$

$$=\left|\left[-\frac{1}{\pi}\cos(\pi)-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right]-\left[-\frac{1}{\pi}\cos(0)-\frac{0^2}{2}+\frac{0^3}{3}\right]\right|=$$

$$=\left|\frac{1}{\pi}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{\pi}\right|=\boxed{0,47\,u^2}$$

Lo dibujamos para comprobar este valor del área. Concuerda pues en la imagen se observa que la zona rayada ocupa medio cuadradito.