



EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
206-MATEMÁTICAS II.
 EBAU2020 - SEPTIEMBRE

OBSERVACIONES IMPORTANTES: Se debe responder a un máximo de 4 cuestiones y no es necesario hacerlo en el mismo orden en que están enunciadas. Cada cuestión tiene una puntuación de 2,5 puntos. Si se responde a más de 4 cuestiones, sólo se corregirán las 4 primeras, en el orden que haya respondido el estudiante. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a :

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - ay + a^2z = -1 \\ -ax + a^2y - a^3z = 2 \end{cases}$$

- a) [1 p.] Compruebe que el sistema nunca tiene solución única.
 b) [1 p.] Determine para qué valor de a el sistema tiene infinitas soluciones.
 c) [0,5 p.] Si es posible, resuélvalo para el valor de $a = 2$.

2: Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

- a) [1 p.] Calcule las potencias sucesivas A^2, A^3, A^4, A^5, A^6 .
 b) [1 p.] Calcule A^{2020} .
 c) [0,5 p.] Compruebe que la matriz A es regular (o inversible) y calcule su inversa.

3: Calcule los siguientes límites:

- a) [1,25 p.] $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(3+x) - \ln(3-x)}{2x}$
 b) [1,25 p.] $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2})$

4: a) [2 p.] Calcule la integral indefinida $\int \ln(1+x^2) dx$.

- b) [0,5 p.] Calcule la integral definida $\int_0^1 \ln(1+x^2) dx$.

El examen continúa por detrás



EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
206-MATEMÁTICAS II.
EBAU2020 - SEPTIEMBRE

5: Considere los puntos $P = (5, 6, 1)$ y $Q = (-3, -2, 5)$, y la recta

$$r: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{4}.$$

a) [1,5 p.] Determine el punto R de la recta r para el cual el área del triángulo PQR es $18\sqrt{2}$ unidades cuadradas.

Observación: hay dos puntos R que son solución del apartado a); basta con encontrar uno de ellos.

b) [1 p.] Calcule la ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q y compruebe que dicha recta corta perpendicularmente a la recta r .

6: Considere las rectas r y s dadas por las siguientes ecuaciones:

$$r: \begin{cases} 5x + 3y = 19 \\ y - 5z = 3 \end{cases} \quad s: \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-5}{0}$$

a) [1,25 p.] Estudie la posición relativa de ambas rectas.

b) [1,25 p.] En caso de que las rectas se corten, calcule el punto de corte y el ángulo que forman. En caso de que las rectas se crucen, determine el plano que contiene a la recta r y es paralelo a la recta s .

7: El peso de los recién nacidos, medido en kilogramos (kg), sigue una distribución normal de media $\mu = 2,8$ kg y desviación típica σ . Se sabe que solo el 20,05% de ellos pesa más de 3 kg.

a) [0,5 p.] ¿Cuál es la probabilidad de que un recién nacido pese más de 2,6 kg?

b) [1 p.] Calcule la desviación típica de esta distribución normal.

c) [1 p.] ¿Cuál es la probabilidad de que un recién nacido pese menos de 2,9 kg?

IMPORTANTE: Trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal.

8: Dos urnas A y B contienen bolas de colores con la siguiente composición: La urna A contiene 3 bolas verdes, 4 negras y 3 rojas, y la urna B contiene 6 bolas verdes y 4 bolas negras. Además, se tiene un dado que tiene 2 caras marcadas con la letra A y 4 caras marcadas con la letra B. Se lanza el dado y se saca una bola al azar de la urna que indica el dado.

a) [0,75 p.] ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea verde?

b) [0,75 p.] ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea roja?

c) [1 p.] Si la bola extraída es verde, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la urna B?

SOLUCIONES

1: Considere el siguiente sistema de ecuaciones en función del parámetro a :

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - ay + a^2z = -1 \\ -ax + a^2y - a^3z = 2 \end{cases}$$

- a) [1 p.] Comprueba que el sistema nunca tiene solución única.
 b) [1 p.] Determine para qué valor de a el sistema tiene infinitas soluciones.
 c) [0,5 p.] Si es posible, resuélvalo para el valor de $a = 2$.

El sistema tiene asociadas las matrices:

Matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -a & a^2 \\ -a & a^2 & -a^3 \end{pmatrix}$ y matriz ampliada $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -a & a^2 & -1 \\ -a & a^2 & -a^3 & 2 \end{pmatrix}$

Calculamos el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -a & a^2 \\ -a & a^2 & -a^3 \end{vmatrix} = a^4 - a^3 + a^2 - a^2 + a^3 - a^4 = 0$$

El determinante es 0, independientemente del valor de a , por lo que el rango de la matriz A nunca va a ser 3.

a) El sistema nunca va a tener solución única pues el rango de A es menor que 3 (número de incógnitas).

b) Estudiamos el rango de A.

Tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la columna y fila 3ª $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -a \end{pmatrix}$,

calculamos su determinante y vemos cuando se anula $\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -a \end{vmatrix} = -a - 1 = 0 \Rightarrow a = -1$.

Si $a \neq -1$.

En este caso el rango de A es 2. Veamos el rango de A/B y comparamos los rangos.

Tomamos un menor de orden 3 de A/B que resulta de quitar la columna 3ª con determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -a & -1 \\ -a & a^2 & 2 \end{vmatrix} = -2a + a + 2a^2 - 2a^2 - 2 + a^2 = a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} \frac{1+3}{2} = 2 = a \\ \frac{1-3}{2} = -1 = a \end{cases}$$

Este determinante que decide el rango de A/B se anula para los valores -1 y 2 .

Establecemos los casos siguientes:

CASO 1. $a \neq -1$ y $a \neq 2$

En este caso el rango de A es 2 y el rango de A/B es 3 pues el menor anterior no se anula.

El sistema es incompatible.

CASO 2. $a = -1$

El sistema queda:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + y + z = -1 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

Se observa que la 1ª y 2ª ecuación tienen el primer miembro de la igualdad iguales ($x + y + z$) y el 2º miembro de la igualdad distinto (-1 y 2). ¡Imposible!

El sistema es incompatible.

CASO 3. $a = 2$

Sustituyendo el valor de a tenemos el sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - 2y + 4z = -1 \\ -2x + 4y - 8z = 2 \end{cases} \quad \text{Lo resolvemos con el método de Gauss}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª} - \text{Ecuación 1ª} \\ x \quad -2y \quad +4z \quad = -1 \\ -x \quad -y \quad -z \quad = -2 \\ \hline -3y \quad +3z \quad = -3 \rightarrow \text{Nueva ecuación 2ª} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª} + 2 \cdot \text{Ecuación 1ª} \\ -2x \quad +4y \quad -8z \quad = 2 \\ 2x \quad +2y \quad +2z \quad = 4 \\ \hline 6y \quad -6z \quad = 6 \rightarrow \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ -3y + 3z = -3 \\ 6y - 6z = 6 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ -y + z = -1 \\ y - z = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª} + \text{Ecuación 2ª} \\ -y \quad +z \quad = -1 \\ y \quad -z \quad = 1 \\ \hline 0 \quad = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ -y + z = -1 \\ 0 = 0 \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ -y + z = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ \boxed{y = z + 1} \end{array} \right\} \Rightarrow x + z + 1 + z = 2 \Rightarrow \boxed{x = 1 - 2z}$$

El sistema es compatible indeterminado.

El sistema tiene infinitas soluciones para $a = 2$.

c) Para $a = 2$ está resuelto en el apartado b) y sus soluciones son $x = 1 - 2t$; $y = 1 + t$; $z = t$

2: Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

- a) [1 p.] Calcule las potencias sucesivas A^2, A^3, A^4, A^5, A^6 .
 b) [1 p.] Calcule A^{2020} .
 c) [0,5 p.] Compruebe que la matriz A es regular (o inversible) y calcule su inversa.

a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3 & 3-6 \\ -1+2 & -3+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-3 & 6-6 \\ -1+1 & -3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$A^5 = A^4 A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+3 & -3+6 \\ 1-2 & 3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^6 = A^5 A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+3 & -6+6 \\ 1-1 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

b) Como $A^6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ dividimos 2020 entre 6 y nos queda:

$$\begin{array}{r} 2020 \quad \overline{)6} \\ \underline{22} \quad 336 \\ 40 \\ \underline{4} \text{ Resto} \end{array} \rightarrow 2020 = 336 \cdot 6 + 4.$$

$$A^{2020} = A^{6 \cdot 336 + 4} = A^{6 \cdot 336} A^4 = (A^6)^{336} A^4 = (I_2)^{336} A^4 = I_2 \cdot A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

c) Calculamos el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 3 = 1 \neq 0, \text{ al ser su determinante distinto de cero existe su inversa.}$$

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^T)}{|A|} = \frac{Adj \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

3: Calcule los siguientes límites:

a) [1,25 p.] $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(3+x) - \ln(3-x)}{2x}$

b) [1,25 p.] $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2})$

a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(3+x) - \ln(3-x)}{2x} = \frac{\ln 3 - \ln 3}{0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3+x} - \frac{-1}{3-x}}{2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3+x} + \frac{1}{3-x}}{2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3-x+3+x}{(3+x)(3-x)}}{2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{2(3+x)(3-x)} = \frac{3}{9} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2}) = \infty - \infty = \left\{ \begin{array}{l} \text{Multiplicamos y dividimos por el conjugado} \\ (\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}) \end{array} \right\} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{x+2})^2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1) - (x+2)}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1-x-2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}} = \frac{-1}{\infty} = \boxed{0}$$

4: a) [2 p.] Calcule la integral indefinida $\int \ln(1+x^2) dx$.

b) [0,5 p.] Calcule la integral definida $\int_0^1 \ln(1+x^2) dx$.

a)

$$\int \ln(1+x^2) dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integramos por partes} \\ u = \ln(1+x^2) \rightarrow du = \frac{2x}{1+x^2} dx \\ dv = dx \rightarrow v = \int dx = x \end{array} \right\} = (\ln(1+x^2))(x) - \int x \frac{2x}{1+x^2} dx =$$

$$= x \ln(1+x^2) - 2 \int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \dots$$

Calculamos la integral y luego sustituimos.

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int \frac{1+x^2-1}{1+x^2} dx = \int \frac{1+x^2}{1+x^2} dx - \int \frac{1}{1+x^2} dx = \int dx - \int \frac{1}{1+x^2} dx = x - \arctg(x)$$

$$\dots = x \ln(1+x^2) - 2(x - \arctg(x)) = \boxed{x \ln(1+x^2) - 2x + 2\arctg(x) + K}$$

b)

$$\int_0^1 \ln(1+x^2) dx = \left[x \ln(1+x^2) - 2x + 2\arctg(x) \right]_0^1 =$$

$$= \left[\ln(1+1^2) - 2 + 2\arctg(1) \right] - \left[0 - 0 + 2\arctg(0) \right] = \ln 2 - 2 + 2 \frac{\pi}{4} = \boxed{\frac{\pi}{2} - 2 + \ln 2 = 0.264}$$

5: Considere los puntos $P = (5, 6, 1)$ y $Q = (-3, -2, 5)$, y la recta

$$r: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{4}.$$

a) [1,5 p.] Determine el punto R de la recta r para el cual el área del triángulo PQR es $18\sqrt{2}$ unidades cuadradas.

Observación: hay dos puntos R que son solución del apartado a); basta con encontrar uno de ellos.

b) [1 p.] Calcule la ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q y compruebe que dicha recta corta perpendicularmente a la recta r .

a) Obtenemos las ecuaciones en paramétricas de la recta r .

$$r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 + 4\lambda \end{cases}$$

Por lo que las coordenadas del punto R de la recta r son $R(\lambda, 1 + \lambda, -1 + 4\lambda)$.

El área del triángulo PQR es la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores \overrightarrow{PR} y \overrightarrow{QR} .

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{PR} &= (\lambda, 1 + \lambda, -1 + 4\lambda) - (5, 6, 1) = (\lambda - 5, \lambda - 5, -2 + 4\lambda) \\ \overrightarrow{QR} &= (\lambda, 1 + \lambda, -1 + 4\lambda) - (-3, -2, 5) = (\lambda + 3, \lambda + 3, -6 + 4\lambda) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{QR} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \lambda - 5 & \lambda - 5 & -2 + 4\lambda \\ \lambda + 3 & \lambda + 3 & -6 + 4\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= i(\lambda - 5)(-6 + 4\lambda) + j(-2 + 4\lambda)(\lambda + 3) + k(\lambda - 5)(\lambda + 3) - k(\lambda - 5)(\lambda + 3) - j(\lambda - 5)(-6 + 4\lambda) - i(\lambda + 3)(-2 + 4\lambda) =$$

$$= i((-6\lambda - 20\lambda + 30 + 4\lambda^2) - (-2\lambda + 12\lambda - 6 + 4\lambda^2)) + j((-2\lambda + 12\lambda - 6 + 4\lambda^2) - (-6\lambda - 20\lambda + 30 + 4\lambda^2)) =$$

$$= i(-36\lambda + 36) + j(36\lambda - 36) = (-36\lambda + 36, 36\lambda - 36, 0)$$

Una vez obtenido el producto vectorial lo aplicamos al cálculo del área del triángulo.

$$\text{Área} = 18\sqrt{2} \Rightarrow \frac{|\overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{QR}|}{2} = 18\sqrt{2} \Rightarrow |\overrightarrow{PR} \times \overrightarrow{QR}| = 36\sqrt{2} \Rightarrow |(-36\lambda + 36, 36\lambda - 36, 0)| = 36\sqrt{2}$$

$$36|(-\lambda + 1, \lambda - 1, 0)| = 36\sqrt{2} \Rightarrow |(-\lambda + 1, \lambda - 1, 0)| = \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{(-\lambda + 1)^2 + (\lambda - 1)^2} = \sqrt{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(\lambda - 1)^2 = 2 \Rightarrow (\lambda - 1)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} \lambda - 1 = -1 \Rightarrow \lambda = 0 \\ \lambda - 1 = 1 \Rightarrow \lambda = 2 \end{cases}$$

Por lo que los dos puntos solución del problema son:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda = 0 \\ R(\lambda, 1 + \lambda, -1 + 4\lambda) \end{array} \right\} \Rightarrow R_1(0, 1, -1)$$

Y también

$$\left. \begin{array}{l} \lambda = 2 \\ R(\lambda, 1 + \lambda, -1 + 4\lambda) \end{array} \right\} \Rightarrow R_2(2, 3, 7)$$

- b) La recta s que pasa por $P = (5, 6, 1)$ y $Q = (-3, -2, 5)$ tiene como vector director

$\overrightarrow{PQ} = (-3, -2, 5) - (5, 6, 1) = (-8, -8, 4)$. Tomamos como vector director el vector anterior dividido por -4 que tiene unas coordenadas que indican la misma dirección con valores más pequeños.

$$\left. \begin{array}{l} P = (5, 6, 1) \in s \\ \vec{v}_s = (2, 2, -1) \end{array} \right\} \Rightarrow s: \begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 6 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

Comprobemos que las rectas r y s se cortan resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de las dos rectas.

$$\left. \begin{array}{l} r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -1 + 4\lambda \end{cases} \\ s: \begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 6 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 5 + 2t = \lambda \\ 6 + 2t = 1 + \lambda \\ 1 - t = -1 + 4\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 + 2t = \lambda \\ 5 + 2t = \lambda \\ 2 - t = 4\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 + 2t = \lambda \\ 2 - t = 4\lambda \end{cases} \Rightarrow 2 - t = 4(5 + 2t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 - t = 20 + 8t \Rightarrow -9t = 18 \Rightarrow t = -2 \Rightarrow \begin{cases} x = 5 - 4 = 1 \\ y = 6 - 4 = 2 \\ z = 1 + 2 = 3 \end{cases}$$

Las dos rectas se cortan en el punto $A(1, 2, 3)$.

Para ver que lo hacen de forma perpendicular compruebo que el producto escalar de sus vectores directores es cero.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{v}_s = (2, 2, -1) \\ \vec{v}_r = (1, 1, 4) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{v}_s \cdot \vec{v}_r = (2, 2, -1) \cdot (1, 1, 4) = 2 + 2 - 4 = 0$$

Comprobado que las dos rectas se cortan en $A(1, 2, 3)$ de forma perpendicular.

6: Considere las rectas r y s dadas por las siguientes ecuaciones:

$$r: \begin{cases} 5x + 3y = 19 \\ y - 5z = 3 \end{cases} \quad s: \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{1} = \frac{z-5}{0}$$

a) **[1,25 p.]** Estudie la posición relativa de ambas rectas.

b) **[1,25 p.]** En caso de que las rectas se corten, calcule el punto de corte y el ángulo que forman. En caso de que las rectas se crucen, determine el plano que contiene a la recta r y es paralelo a la recta s .

a) Pasamos la ecuación de la recta r a paramétricas.

$$r: \begin{cases} 5x + 3y = 19 \\ y - 5z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x + 3y = 19 \\ y = 3 + 5z \end{cases} \Rightarrow 5x + 3(3 + 5z) = 19 \Rightarrow 5x + 9 + 15z = 19 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x = 10 - 15z \Rightarrow x = 2 - 3z \Rightarrow r: \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 3 + 5t \\ z = t \end{cases}$$

Los vectores directores de las rectas son $\vec{v}_r = (-3, 5, 1)$ y $\vec{v}_s = (-1, 1, 0)$. No tienen coordenadas proporcionales, por lo que no son paralelas ni coincidentes.

¿Se cortan o se cruzan?

Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de ambas rectas.

$$\left. \begin{array}{l} r: \begin{cases} 5x + 3y = 19 \\ y - 5z = 3 \end{cases} \\ s: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 5 \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 5(1-t) + 3t = 19 \\ t - 25 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 - 5t + 3t = 19 \\ t = 28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2t = 14 \\ t = 28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = -7 \\ t = 28 \end{cases}$$

Salen dos valores distintos, por lo que el sistema no tiene solución y las rectas no se cortan sino que se cruzan.

b) Como las rectas se cruzan, determinamos el plano π que contiene a la recta r y es paralelo a la recta s .

El plano π contiene el punto $P_r = (2, 3, 0)$ de la recta r y tiene como vectores directores los vectores directores de las rectas (es paralelo a ellas).

$$\left. \begin{array}{l} P_r = (2, 3, 0) \in \pi \\ \vec{u} = \vec{v}_r = (-3, 5, 1) \\ \vec{v} = \vec{v}_s = (-1, 1, 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z \\ -3 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -y + 3 - 3z + 5z - x + 2 = 0$$

$$\boxed{\pi: -x - y + 2z + 5 = 0}$$

7: El peso de los recién nacidos, medido en kilogramos (kg), sigue una distribución normal de media $\mu = 2,8 \text{ kg}$ y desviación típica σ . Se sabe que solo el 20,05% de ellos pesa más de 3 kg.

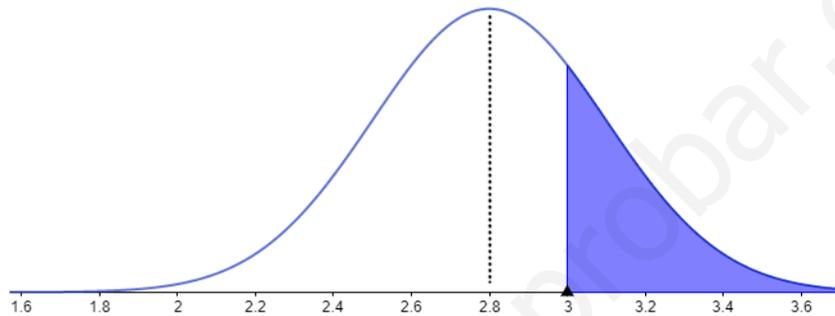
- a) **[0,5 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que un recién nacido pese más de 2,6 kg?
 b) **[1 p.]** Calcule la desviación típica de esta distribución normal.
 c) **[1 p.]** ¿Cuál es la probabilidad de que un recién nacido pese menos de 2,9 kg?

IMPORTANTE: Trabaje con 4 decimales, redondeando el resultado al cuarto decimal.

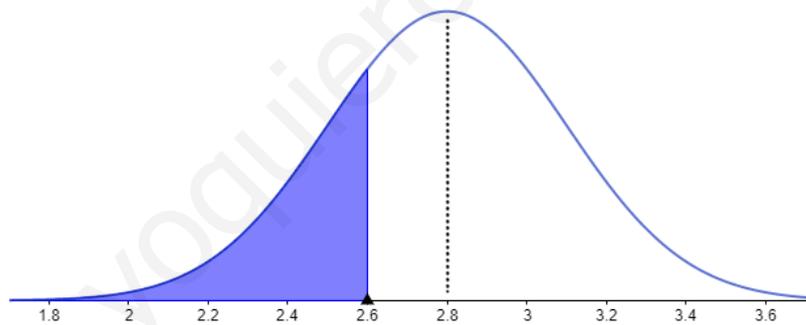
X = Peso en kg de un recién nacido.

$X = N(2.8, \sigma)$

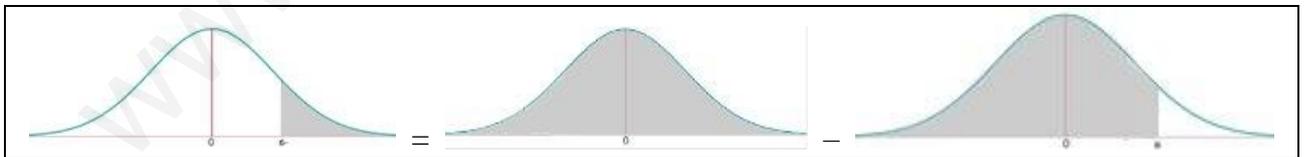
- a) Por la simetría de la distribución normal tenemos que la $P(X \geq 3) = 0.2005$ y este área aparece en el dibujo inferior a 0.2 de distancia de la media:



Es igual que $P(X \leq 2.6)$ pues también está a distancia 0.2 de la media $\rightarrow P(X \leq 2.6) = 0.2005$
 Aparece en el dibujo.



Por lo que la probabilidad pedida vale $P(X \geq 2.6) = 1 - P(X \leq 2.6) = 1 - 0.2005 = \boxed{0.7995}$



$$\begin{aligned} \text{b) } P(X \geq 3) = 0,2005 &\Rightarrow P\left(\frac{X - 2.8}{\sigma} \geq \frac{3 - 2.8}{\sigma}\right) = 0.2005 \Rightarrow P\left(Z \geq \frac{0.2}{\sigma}\right) = 0.2005 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 1 - P\left(Z \leq \frac{0.2}{\sigma}\right) = 0.2005 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{0.2}{\sigma}\right) = 1 - 0.2005 = 0.7995 \end{aligned}$$

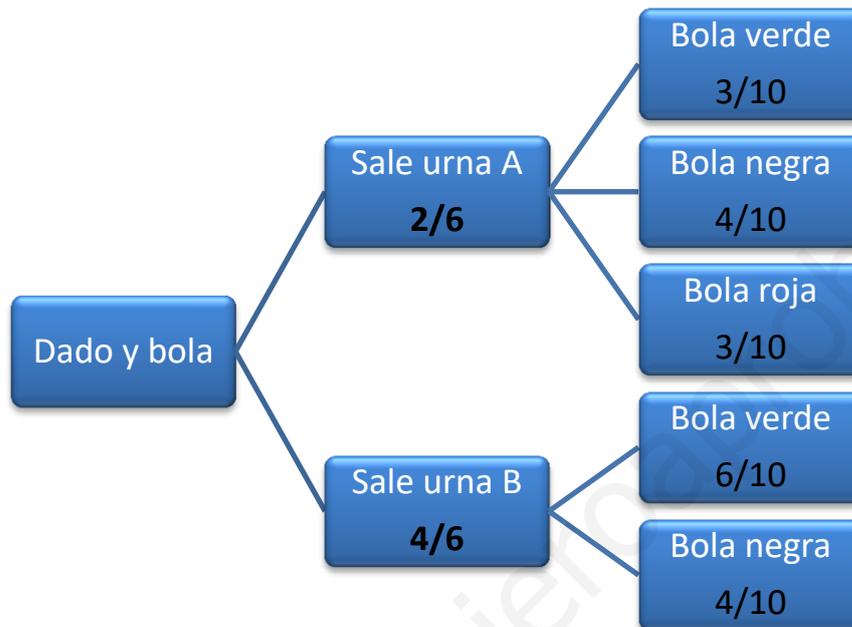
Buscamos en la tabla de la $N(0, 1)$ obtenemos que $\frac{0.2}{\sigma} = 0.84 \Rightarrow \sigma = \frac{0.2}{0.84} = \boxed{0.2381}$

$$\text{c) } P(X \leq 2.9) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z \leq \frac{2.9 - 2.8}{0.2381}\right) = P(Z \leq 0.42) = \boxed{0.6628}$$

8: Dos urnas A y B contienen bolas de colores con la siguiente composición: La urna A contiene 3 bolas verdes, 4 negras y 3 rojas, y la urna B contiene 6 bolas verdes y 4 bolas negras. Además, se tiene un dado que tiene 2 caras marcadas con la letra A y 4 caras marcadas con la letra B. Se lanza el dado y se saca una bola al azar de la urna que indica el dado.

- a) [0,75 p.] ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea verde?
 b) [0,75 p.] ¿Cuál es la probabilidad de que esa bola sea roja?
 c) [1 p.] Si la bola extraída es verde, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de la urna B?

Construimos el diagrama de árbol descriptivo del experimento aleatorio planteado. La probabilidad de sacar A en el dado es $\frac{2}{6}$ y de sacar B es $\frac{4}{6}$.



- a) Sucede de dos formas distintas, la probabilidad pedida es la suma de las probabilidades de cada rama del árbol.

$$\begin{aligned}
 P(\text{Sacar bola verde}) &= P(\text{Elegir urna A})P(\text{Sacar bola verde} / \text{Elegir urna A}) + \\
 &+ P(\text{Elegir urna B})P(\text{Sacar bola verde} / \text{Elegir urna B}) = \\
 &= \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{10} + \frac{4}{6} \cdot \frac{6}{10} = \frac{30}{60} = \boxed{\frac{1}{2} = 0,5}
 \end{aligned}$$

- b) Sucede de una única forma, pues en la urna B no hay bolas rojas.

$$\begin{aligned}
 P(\text{Sacar bola roja}) &= P(\text{Elegir urna A})P(\text{Sacar bola roja} / \text{Elegir urna A}) = \\
 &= \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{10} = \frac{6}{60} = \boxed{\frac{1}{10} = 0,1}
 \end{aligned}$$

- c) Es una probabilidad a posteriori, aplicamos el teorema de Bayes.

$$\begin{aligned}
 P(\text{Proceda de urna B} / \text{Hemos sacado bola verde}) &= \frac{P(\text{Elegir urna B} \cap \text{Sacar bola verde})}{P(\text{Sacar bola verde})} = \\
 &= \frac{\frac{4}{6} \cdot \frac{6}{10}}{0,5} = \frac{0,4}{0,5} = \boxed{\frac{4}{5} = 0,8}
 \end{aligned}$$