



**Proba de Avaliación do Bacharelato
para o Acceso á Universidade
CONVOCATORIA ORDINARIA 2020**

Código: 20

MATEMÁTICAS II

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Si responde a más preguntas de las permitidas, **solo se corregirán las 5 primeras respondidas**.

1. Números y Álgebra:

Sean A y B las dos matrices que cumplen $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $A - B = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$. Se pide:

- Calcular $A^2 - B^2$. (Advertencia: en este caso, $A^2 - B^2 \neq (A + B)(A - B)$)
- Calcular la matriz X que cumple la igualdad $XA + (A + B)^T = 2I + XB$, siendo I la matriz identidad de orden 2 y $(A + B)^T$ la traspuesta de $A + B$

2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro m , el siguiente sistema:
$$\begin{cases} mx + y = 2m \\ x + z = 0 \\ x + my = 0 \end{cases}$$

3. Análisis

- Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{1 + 2x - e^{2x}}$.
- Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x) = x(\ln x - 1)$. Calcule, si existen, los máximos y mínimos relativos de la función f .

4. Análisis:

- Calcule los valores de b y c para que la función $f(x) = \begin{cases} e^{2x} & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + bx + c & \text{si } x > 0 \end{cases}$ sea, primero continua, y luego derivable en $x = 0$.
- Calcule $\int_1^2 x(\ln x - 1) dx$.

5. Geometría:

- Obtenga la ecuación implícita o general del plano que pasa por los puntos $A(3, 0, -1)$, $B(4, 1, 1)$ y $C(7, 1, 5)$.
- Obtenga las ecuaciones paramétricas de la recta r que es perpendicular al plano $\pi: 4x + 2y - 3z - 15 = 0$ y que pasa por el punto $P(-1, -2, 2)$

6. Geometría:

Estudie la posición relativa de las rectas r y s definidas por las ecuaciones

$$r: \frac{x-3}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{-2} \text{ y } s: \frac{x}{1} = \frac{y+3}{4} = \frac{z+2}{3}. \text{ Si se cortan, calcule el punto de corte.}$$

7. Estadística y Probabilidad:

Se seleccionan 250 pacientes para estudiar la eficacia de un nuevo medicamento. A 150 de ellos se les administra el medicamento, mientras que el resto son tratados con un placebo. Sabiendo que se curaron el 80% de los que tomaron el medicamento, ¿cuál es la probabilidad de que, seleccionado un paciente al azar, tomara el placebo o no se curara?

8. Estadística y Probabilidad:

En una cadena de montaje, el tiempo empleado para realizar un determinado trabajo sigue una distribución normal de media 20 minutos y desviación típica 4 minutos. Calcule la probabilidad de que se haga ese trabajo en un tiempo comprendido entre 16 y 26 minutos.

SOLUCIONES

1. Números y Álgebra:

Sean A y B las dos matrices que cumplen $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $A - B = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$. Se pide:

- a) Calcular $A^2 - B^2$. (Advertencia: en este caso, $A^2 - B^2 \neq (A + B)(A - B)$)
- b) Calcular la matriz X que cumple la igualdad $XA + (A + B)^T = 2I + XB$, siendo I la matriz identidad de orden 2 y $(A + B)^T$ la traspuesta de $A + B$

Resolvamos el sistema matricial y obtengamos la expresión de las matrices A y B .

$$\left. \begin{array}{l} A + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ A - B = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \Rightarrow \{\text{Sumando las 2 ecuaciones}\} \Rightarrow 2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Y sustituyendo en $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) $A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 & 8 \\ -4 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -8 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$

b) Despejamos X de la ecuación matricial.

$$XA + (A + B)^T = 2I + XB \Rightarrow XA - XB = 2I - (A + B)^T \Rightarrow X(A - B) = 2I - (A + B)^T$$

Como $A - B = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ y su determinante es $|A - B| = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 16 \neq 0$ existe la inversa y la calculamos para determinar X .

$$(A - B)^{-1} = \frac{Adj((A - B)^T)}{|A - B|} = \frac{Adj \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}}{16} = \frac{\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}}{16}$$

Seguimos despejando en la ecuación:

$$X(A - B) = 2I - (A + B)^T \Rightarrow X = \left[2I - (A + B)^T \right] (A - B)^{-1}$$

Hacemos los cálculos.

$$X = \left[\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \right] \frac{\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}}{16} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro m , el siguiente sistema:
$$\begin{cases} mx + y = 2m \\ x + z = 0 \\ x + my = 0 \end{cases}$$

La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} m & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & m & 0 \end{pmatrix}$

Con determinante $|A| = \begin{vmatrix} m & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & m & 0 \end{vmatrix} = 1 - m^2$

Igualamos a cero.

$$|A| = 0 \Rightarrow 1 - m^2 = 0 \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow m = \sqrt{1} = \pm 1$$

Establecemos tres casos distintos.

CASO 1. $m \neq \pm 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3. Al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas.

El sistema es compatible determinado.

CASO 2. $m = 1$

En este caso el determinante de A es cero y su rango no es 3.

¿El rango de A es 2?

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila 1ª (igual que

la 3ª) y la columna 1ª $\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$. El rango de A es 2.

Veamos el rango de $A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Consideramos el menor de orden 3 que resulta de

quitar la columna 1ª $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$.

El rango de A/B es 3.

Rango de $A = 2 \neq 3 =$ Rango de A/B .

El sistema es incompatible.

CASO 3. $m = -1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

¿El rango de A es 2?

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ Consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila } 1^{\text{a}}$$

(proporcional a la 3ª) y la columna 1ª $\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

El rango de A es 2.

$$\text{Veamos el rango de } A/B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ Consideramos el menor de orden 3 que}$$

resulta de quitar la columna 1ª $\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$

El rango de A/B es 3.

Rango de $A = 2 \neq 3 =$ Rango de A/B .

El sistema es incompatible.

3. Análisis

a) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{1 + 2x - e^{2x}}$.

b) Determine los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x) = x(\ln x - 1)$. Calcule, si existen, los máximos y mínimos relativos de la función f .

a)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - 1}{1 + 2x - e^{2x}} &= \frac{1 - 1}{1 + 0 - 1} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \cos x \sin x}{2 - 2e^{2x}} = \frac{0}{2 - 2} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cdot \cos x - 2 \cos x \cdot \cos x}{-4e^{2x}} = \frac{-2}{-4} = \boxed{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

b) Veamos primero el dominio de la función.

La función existe si $x > 0$ para que pueda existir $\ln x$

Dominio = $(0, +\infty)$

Calculamos la derivada de $f(x) = x(\ln x - 1)$ y la igualamos a cero en busca de los puntos críticos de la función.

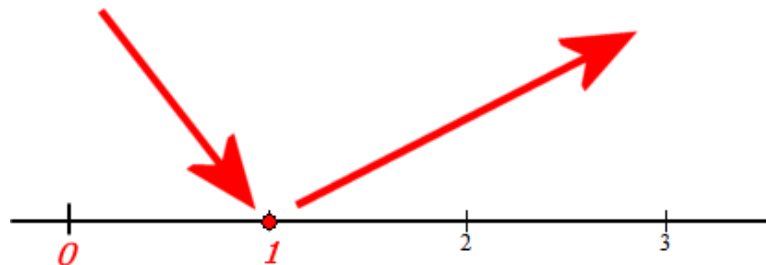
$$f(x) = x(\ln x - 1) \Rightarrow f'(x) = (\ln x - 1) + x \frac{1}{x} = \ln x - 1 + 1 = \ln x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$

Veamos cómo es la función antes y después de $x = 1$.

- En $(0, 1)$ tomamos $x = 0.5$ y la derivada vale $f'(0.5) = \ln 0.5 = -0.69 < 0$. La función decrece en $(0, 1)$.
- En $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = \ln 2 = 0.69 > 0$. La función crece en $(1, +\infty)$.

La función decrece en $(0, 1)$ y crece en $(1, +\infty)$.



La función presenta un mínimo en $x = 1$. $f(1) = (\ln 1 - 1) = -1$. En el punto $P(1, -1)$.

No tiene máximos relativos

4. Análisis:

a) Calcule los valores de b y c para que la función $f(x) = \begin{cases} e^{2x} & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + bx + c & \text{si } x > 0 \end{cases}$ sea, primero continua, y luego derivable en $x = 0$.

b) Calcule $\int_1^2 x(\ln x - 1) dx$.

a) Para que la función sea continua en $x = 0$ debe cumplirse:

- Existe $f(0) = e^0 = 1$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{2x} = 1$
- Existe $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + bx + c) = c$
- Los tres valores son iguales $\rightarrow \boxed{c = 1}$

La derivada de la función es:

$$f'(x) = \begin{cases} 2e^{2x} & \text{si } x < 0 \\ 2x + b & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Para que sea derivable en $x = 0$ deben ser iguales sus derivadas laterales.

$$\left. \begin{matrix} f'(0^-) = 2e^0 = 2 \\ f'(0^+) = 0 + b = b \end{matrix} \right\} \Rightarrow f'(0^-) = f'(0^+) \Rightarrow \boxed{b = 2}$$

b) Calculamos primero la primitiva.

$$\int x(\ln x - 1) dx = \left\{ \begin{array}{l} \text{Integración por partes} \\ u = (\ln x - 1) \rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = x dx \rightarrow v = \int x dx = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} = \frac{x^2}{2} (\ln x - 1) - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} (\ln x - 1) - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2 \ln x - x^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{x^2 \ln x - x^2}{2} - \frac{x^2}{4} = \frac{2x^2 \ln x - 2x^2 - x^2}{4} =$$

$$= \frac{2x^2 \ln x - 3x^2}{4} + C$$

$$\int_1^2 x(\ln x - 1) dx = \left[\frac{2x^2 \ln x - 3x^2}{4} \right]_1^2 = \left[\frac{2 \cdot 2^2 \ln 2 - 3 \cdot 2^2}{4} \right] - \left[\frac{2 \cdot 1^2 \ln 1 - 3 \cdot 1^2}{4} \right] =$$

$$= \frac{8 \ln 2 - 12}{4} + \frac{3}{4} = \frac{8 \ln 2 - 9}{4} = \boxed{-0.8637}$$

5. Geometría:

a) Obtenga la ecuación implícita o general del plano que pasa por los puntos $A(3,0,-1)$, $B(4,1,1)$ y $C(7,1,5)$.

b) Obtenga las ecuaciones paramétricas de la recta r que es perpendicular al plano $\pi : 4x + 2y - 3z - 15 = 0$ y que pasa por el punto $P(-1,-2,2)$

a) Si contiene a los tres puntos entonces tiene como vectores directores los vectores $\overrightarrow{AB} = (4,1,1) - (3,0,-1) = (1,1,2)$ y $\overrightarrow{AC} = (7,1,5) - (3,0,-1) = (4,1,6)$.

$$\left. \begin{array}{l} A(3,0,-1) \in \pi \\ \vec{u} = \overrightarrow{AB} = (1,1,2) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} = (4,1,6) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-3 & y & z+1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$6x - 18 + 8y + z + 1 - 4z - 4 - 6y - 2x + 6 = 0$$

$$\boxed{\pi \equiv 4x + 2y - 3z - 15 = 0}$$

b) Si la recta es perpendicular al plano el vector normal del plano es el vector director de la recta.

El vector normal de $\pi : 4x + 2y - 3z - 15 = 0$ es $\vec{n} = (4, 2, -3)$.

$$\left. \begin{array}{l} P(-1,-2,2) \in r \\ \vec{v}_r = \vec{n} = (4,2,-3) \end{array} \right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = -1 + 4\lambda \\ y = -2 + 2\lambda \\ z = 2 - 3\lambda \end{array}}$$

6. Geometría:

Estudie la posición relativa de las rectas r y s definidas por las ecuaciones $r: \frac{x-3}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z+1}{-2}$ y $s: \frac{x}{1} = \frac{y+3}{4} = \frac{z+2}{3}$. Si se cortan, calcule el punto de corte.

Los vectores directores de las rectas son $\vec{v}_r = (2, -1, -2)$ y $\vec{v}_s = (1, 4, 3)$.

Las coordenadas de los vectores no son proporcionales, por lo que las rectas no son coincidentes ni paralelas.

$$\frac{2}{1} \neq \frac{-1}{4} \neq \frac{-2}{3}$$

Veamos si se cruzan o se cortan.

Para ello necesitamos un tercer vector, el que une un punto de la recta r con otro punto de la recta s . $P_r(3, 0, -1)$ y $P_s(0, -3, -2)$

El vector $\overrightarrow{P_r P_s} = (0, -3, -2) - (3, 0, -1) = (-3, -3, -1)$

Calculamos el producto mixto de los vectores $\vec{v}_r = (2, -1, -2)$, $\vec{v}_s = (1, 4, 3)$ y $\overrightarrow{P_r P_s} = (-3, -3, -1)$.

$$[\vec{v}_r, \vec{v}_s, \overrightarrow{P_r P_s}] = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & 3 \\ -3 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -8 + 9 + 6 - 24 - 1 + 18 = 0$$

Al ser cero este producto mixto significa que **las rectas se cortan en un punto.**

Averigüemos dicho punto de corte.

Para ello pasamos las ecuaciones de las rectas a paramétricas.

$$\left. \begin{array}{l} r: \begin{cases} x = 3 + 2\alpha \\ y = -\alpha \\ z = -1 - 2\alpha \end{cases} \\ s: \begin{cases} x = \lambda \\ y = -3 + 4\lambda \\ z = -2 + 3\lambda \end{cases} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 3 + 2\alpha = \lambda \\ -\alpha = -3 + 4\lambda \\ -1 - 2\alpha = -2 + 3\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 + 2\alpha = \lambda \\ \alpha = 3 - 4\lambda \\ -1 - 2\alpha = -2 + 3\lambda \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3 + 2(3 - 4\lambda) = \lambda \\ -1 - 2(3 - 4\lambda) = -2 + 3\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 + 6 - 8\lambda = \lambda \\ -1 - 6 + 8\lambda = -2 + 3\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9 = 9\lambda \\ -5 = -5\lambda \end{cases} \Rightarrow \lambda = 1$$

Sustituyendo en la ecuación de la recta s , tenemos:

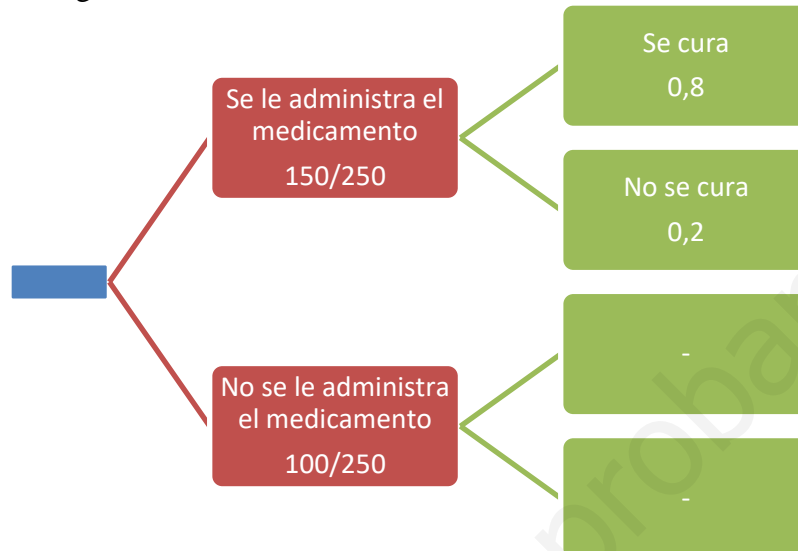
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -3 + 4 = 1 \\ z = -2 + 3 = 1 \end{cases}$$

El punto de corte de las rectas es $P(1, 1, 1)$.

7. Estadística y Probabilidad:

Se seleccionan 250 pacientes para estudiar la eficacia de un nuevo medicamento. A 150 de ellos se les administra el medicamento, mientras que el resto son tratados con un placebo. Sabiendo que se curaron el 80% de los que tomaron el medicamento, ¿cuál es la probabilidad de que, seleccionado un paciente al azar, tomara el placebo o no se curara?

Construimos el diagrama de árbol



Suponemos que si se tomó el placebo no se cura de la enfermedad.

$$\begin{aligned}
 P(\text{Tomara el placebo o no se curara}) &= \\
 &= P(\text{Tomara el placebo}) + P(\text{Tomara el medicamento y no se curara}) = \\
 &= \frac{100}{250} + \frac{150}{250} \cdot 0,2 = \frac{100}{250} + \frac{30}{250} = \frac{130}{250} = \frac{13}{25} = \frac{52}{100} = \boxed{0,52}
 \end{aligned}$$

8. Estadística y Probabilidad:

En una cadena de montaje, el tiempo empleado para realizar un determinado trabajo sigue una distribución normal de media 20 minutos y desviación típica 4 minutos. Calcule la probabilidad de que se haga ese trabajo en un tiempo comprendido entre 16 y 26 minutos.

X = Tiempo empleado para realizar un trabajo expresado en minutos.
 X = N(20, 4)

$$\begin{aligned}
 P(16 < X < 26) &= \{Tipificamos\} = P\left(\frac{16-20}{4} < Z < \frac{26-20}{4}\right) = \\
 &= P(-1 < Z < 1.5) = P(Z < 1.5) - P(Z < -1) = \\
 &= 0.9332 - P(Z > 1) = 0.9332 - (1 - P(Z < 1)) = 0.9332 - (1 - 0.8413) = \boxed{0.7745}
 \end{aligned}$$

