COMISSIÓ GESTORA DE LES PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT
COMISIÓN GESTORA DE LAS PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

SISTEMA UNIVERSITARI VALENCIÀ
SISTEMA UNIVERSITARIO VALENCIANO

PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD

CONVOCATÒRIA: SETEMBRE 2020	CONVOCATORIA: SEPTIEMBRE 2020
Assignatura: MATEMÀTIQUES II	Asignatura: MATEMÁTICAS II

BAREMO DEL EXAMEN:
El alumno elegirá solo TRES problemas entre los seis propuestos.
Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 3 y aproximada a las centésimas.
Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

Problema 1. Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+ay+2z=3 \\ x-3y+az=-2 \\ x+y+2z=a \end{cases}$, donde a un parámetro real.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:
a) Los valores de a para los cuales el sistema es compatible. (4 *puntos*)
b) La solución del sistema cuando $a=0$. (3 *puntos*)
c) Las soluciones del sistema en el caso en que sea compatible indeterminado. (3 *puntos*)

Problema 2. Se dan los planos $\pi: x+y=1$ y $\pi': x-y+z=1$ y el punto $P(1,-1,0)$.
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:
a) Unas ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por el punto P y es paralela a los planos π y π´. (3 *puntos*)
b) La distancia de la recta r a cada uno de los planos π y π´. (3 *puntos*)
c) Las ecuaciones de la recta que pasa por P y corta perpendicularmente a la recta obtenida como intersección de los planos π y π´. (4 *puntos*)

Problema 3. Dada la función $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$, **obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**
a) El dominio de definición y las asíntotas de la función f. (3 *puntos*)
b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como la representación gráfica de la función. (3+1 *puntos*)
c) El valor de $\int_2^3 f(x)dx$. (3 *puntos*)

Problema 4. Sea $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La justificación de que A tiene inversa y el cálculo de dicha matriz inversa. (3 *puntos*)

b) Dos constantes a, b de modo que $A^{-1}=A^2+aA+bI$. Se puede usar (sin comprobarlo) que A verifica la ecuación $A^3-3A^2+3A-I=0$ siendo I la matriz identidad. (3 *puntos*)

c) El valor de λ para que el sistema de ecuaciones $(A-\lambda I)\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$ tenga infinitas soluciones.

Para dicho valor de λ hallar todas las soluciones del sistema. (2+2 *puntos*)

Problema 5. Se dan las rectas $r:\begin{cases}x=1\\ y=2+\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R}\\ z=2\lambda\end{cases}$, $s:\dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+2}{1}$ y el plano $\pi: 3x+ay-z+1=0$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Si hay algún valor del parámetro *a* para el cual la recta *r* está contenida en el plano π. (4 *puntos*)

b) La distancia entre las rectas r y s. (3 *puntos*)

c) El coseno del ángulo que forman la recta r y la recta $t:\begin{cases}2x-y=0\\ y-z=2\end{cases}$. (3 *puntos*)

Problema 6. Los vértices de un triángulo son A(0, 12), B(–5, 0) y C(5, 0). Se desea construir un rectángulo inscrito en el triángulo anterior, de lados paralelos a los ejes coordenados y dos de cuyos vértices tienen coordenadas *(–x, 0), (x, 0),* siendo $0\le x\le 5$. Los otros dos vértices están situados en los segmentos AB y AC.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La expresión *f(x)* del área del rectángulo anterior. (4 *puntos*)

b) El valor de *x* para el cual dicha área es máxima y las dimensiones del rectángulo obtenido. (3 *puntos*)

c) La proporción entre el área del rectángulo anterior y el área del triángulo. (3 *puntos*)

Soluciones:

Problema 1. Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+ay+2z=3 \\ x-3y+az=-2 \\ x+y+2z=a \end{cases}$, donde a un parámetro real.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Los valores de a para los cuales el sistema es compatible. (4 *puntos*)

b) La solución del sistema cuando $a=0$. (3 *puntos*)

c) Las soluciones del sistema en el caso en que sea compatible indeterminado. (3 *puntos*)

La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 1 & -3 & a \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Con determinante $|A|=\begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ 1 & -3 & a \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=-6+a^2+2+6-2a-a=a^2-3a+2$

Igualamos a cero.

$$|A|=0 \Rightarrow a^2-3a+2=0 \Rightarrow a=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm1}{2}=\begin{cases} \frac{3+1}{2}=2=a \\ \frac{3-1}{2}=1=a \end{cases}$$

Estudiamos lo que ocurre en las tres situaciones diferentes que se nos plantean según el valor de a.

CASO 1. $a\neq 1$ y $a\neq 2$

En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3, al igual que el de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas.

El sistema es compatible determinado.

CASO 2. $a=1$

El determinante de A es 0 y el rango de A no es 3.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

¿Rango de A es 2?

Tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna 3ª → $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=-3-1=-4\neq 0$. El rango de A es 2.

$$A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Tomamos el menor de orden 3 que resulta de quitar la columna 3ª → $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ con

determinante $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3-2+3+9-1+2 = 8 \neq 0$. El rango de A/B es 3.

Rango de A = 2 ≠ 3 = Rango de A/B.
El sistema es incompatible.

CASO 3. $a = 2$

El determinante de A es 0 y el rango de A no es 3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

¿Rango de A es 2?

Tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna 3ª → $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ con

determinante $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -3-2 = -5 \neq 0$. El rango de A es 2.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Tomamos el menor de orden 3 que resulta de quitar la columna 3ª (es el doble de la 1ª) → $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ con determinante $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -6-4+3+9-4+2 = 0$.

El rango de A/B no es 3. Por lo que es el mismo que el rango de A.

Rango de A = 2 = Rango de A/B < 3 = Número de incógnitas.
El sistema es compatible indeterminado.

a) El sistema es compatible para $a \neq 1$.

b) Para $a = 0$ estamos en el caso 1 y el sistema es compatible determinado.

$$\begin{cases} x+2z=3 \\ x-3y=-2 \\ x+y+2z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3-2z \\ x-3y=-2 \\ x+y+2z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (3-2z)-3y=-2 \\ (3-2z)+y+2z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2z-3y=-5 \\ 3+y=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2z-3y=-5 \\ \boxed{y=-3} \end{cases} \Rightarrow -2z+9=-5 \Rightarrow -2z=-14 \Rightarrow \boxed{z=7} \Rightarrow \boxed{x=3-14=-11}$$

La solución es $x=-11; \quad y=-3; \quad z=7$

c) El sistema es compatible indeterminado en el caso 3, cuando *a* = *2*.

$$\begin{cases} x+2y+2z=3 \\ x-3y+2z=-2 \\ x+y+2z=2 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 2^{\text{a}} - \text{Ecuación } 1^{\text{a}} \\ \begin{array}{llll} x & -3y & +2z & =-2 \\ -x & -2y & -2z & =-3 \\ \hline & -5y & & =-5 \end{array} \rightarrow \text{Nueva ecuación } 2^{\text{a}} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Ecuación } 3^{\text{a}} - \text{Ecuación } 1^{\text{a}} \\ \begin{array}{llll} x & +y & +2z & =2 \\ -x & -2y & -2z & =-3 \\ \hline & -y & & =-1 \end{array} \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^{\text{a}} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2y+2z=3 \\ -5y=-5 \\ -y=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y+2z=3 \\ \boxed{y=1} \end{cases} \Rightarrow x+2+2z=3 \Rightarrow \boxed{x=1-2z}$$

Para *a* = *2* las soluciones del sistema son $x=1-2t; \quad y=1; \quad z=t$

Problema 2. Se dan los planos $\pi: x+y=1$ y $\pi': x-y+z=1$ y el punto $P(1,-1,0)$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Unas ecuaciones paramétricas de la recta *r* que pasa por el punto *P* y es paralela a los planos π y π´. (3 *puntos*)

b) La distancia de la recta *r* a cada uno de los planos π y π´. (3 *puntos*)

c) Las ecuaciones de la recta que pasa por *P* y corta perpendicularmente a la recta obtenida como intersección de los planos π y π´. (4 *puntos*)

a) Si la recta *r* es paralela a los dos planos debe ser perpendicular a sus vectores normales y el producto vectorial de los vectores normales de los planos π y π´ será el vector director de *r*.

$$\left.\begin{array}{l}\pi: x+y=1 \to \vec{n}=(1,1,0)\\ \pi': x-y+z=1 \to \vec{n'}=(1,-1,1)\end{array}\right\} \Rightarrow \vec{v_r}=\vec{n}\times\vec{n'}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{vmatrix}=i-k-k-j=i-j-2k=(1,-1,-2)$$

La ecuación de la recta *r* es:

$$\left.\begin{array}{l}P(1,-1,0)\in r\\ \vec{v_r}=(1,-1,-2)\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{r:\begin{cases} x=1+\lambda\\ y=-1-\lambda\\ z=-2\lambda\end{cases}}$$

b) Como la recta *r* es paralela a ambos planos la distancia de la recta a cada uno de ellos es la distancia del punto $P(1,-1,0)$ que pertenece a *r* a cada plano.

$$d(r,\pi)=d(P,\pi)=\left.\begin{cases}P(1,-1,0)\\ \pi: x+y-1=0\end{cases}\right\}=\frac{|1-1-1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}u}$$

$$d(r,\pi')=d(P,\pi')=\left.\begin{cases}P(1,-1,0)\\ \pi': x-y+z-1=0\end{cases}\right\}=\frac{|1+1+0-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\boxed{\frac{\sqrt{3}}{3}u}$$

c) La recta *s* que resulta de la intersección de los planos tiene como ecuación:

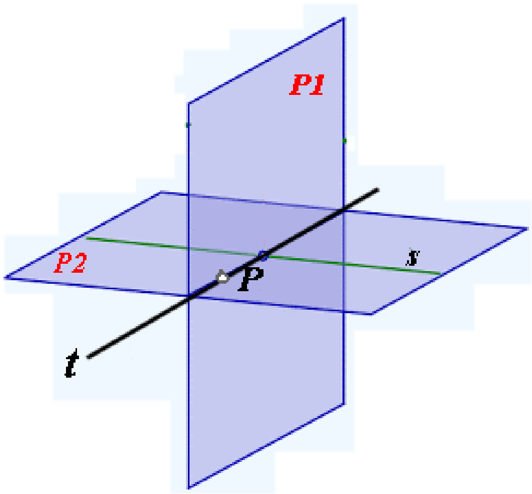
$$s:\begin{cases}x+y=1\\ x-y+z=1\end{cases}$$

Esta recta *s* tiene como vector director el producto vectorial de los vectores normales de los planos que la definen y ya lo hemos calculado, porque es el vector director de la recta *r* anterior → $\vec{v_s}=\vec{v_r}=(1,-1,-2)$. Las dos rectas son paralelas.

Y un punto de la recta s lo obtenemos dando el valor $y=0$ y calculando el resto de coordenadas del punto $s:\begin{cases}x+0=1\\ x-0+z=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=1\\ x+z=1\end{cases} \Rightarrow 1+z=1 \Rightarrow z=0 \Rightarrow P_s(1,0,0)$

$$s:\begin{cases}x=1+\lambda\\ y=-\lambda\\ z=-2\lambda\end{cases}$$

Hallamos la ecuación del plano P1 que pasa por P y es perpendicular a la recta s. También el plano P2 que pasa por P y contiene a la recta s. La recta que nos piden es la intersección de ambos planos.



$$\left.\begin{array}{l} P(1,-1,0)\in P1 \\ \vec{n}_1=\vec{v}_s=(1,-1,-2) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} P(1,-1,0)\in P1 \\ P1: x-y-2z+D=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 1+1-0+D=0 \Rightarrow D=-2 \Rightarrow \boxed{P1: x-y-2z-2=0}$$

$$\left.\begin{array}{l} P(1,-1,0)\in P2 \\ \vec{u}=\vec{v}_s=(1,-1,-2) \\ \vec{v}=\overrightarrow{P_sP}=(1,0,0)-(1,-1,0)=(0,1,0) \end{array}\right\} \Rightarrow P2: \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z+2x-2=0 \Rightarrow \boxed{P2: 2x+z-2=0}$$

La recta t buscada tiene ecuación $t:\begin{cases} x-y-2z-2=0 \\ 2x+z-2=0 \end{cases}$

Problema 3. Dada la función $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$, **obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

a) El dominio de definición y las asíntotas de la función f. (3 *puntos*)

b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como la representación gráfica de la función. (3+1 *puntos*)

c) El valor de $\int_2^3 f(x)dx$. (3 *puntos*)

a) El dominio de definición son los valores de *x* que no anulen el denominador ni hagan negativo el radicando del denominador. Es decir, el radicando debe ser positivo.

$$x^2-1=0 \Rightarrow x=\sqrt{1}=\pm 1$$

$$x^2-1>0 \Rightarrow (x+1)(x-1)>0 \Rightarrow \begin{cases} x<-1 \\ o \\ x>1 \end{cases}$$

El dominio es $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

Asíntota vertical. $x=a$

¿*x* = *–1*?

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{-1}{0}=\infty$$

¿*x* = *1*?

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{0}=\infty$$

Las asíntotas verticales son $x=-1$ y $x=1$

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to +\infty} f(x)=\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2}}=1$$

$$b=\lim_{x\to -\infty} f(x)=\lim_{x\to -\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\lim_{x\to -\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2}}=-1$$

Las asíntotas horizontales son $y=1$ en +∞ e $y=-1$ en –∞.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

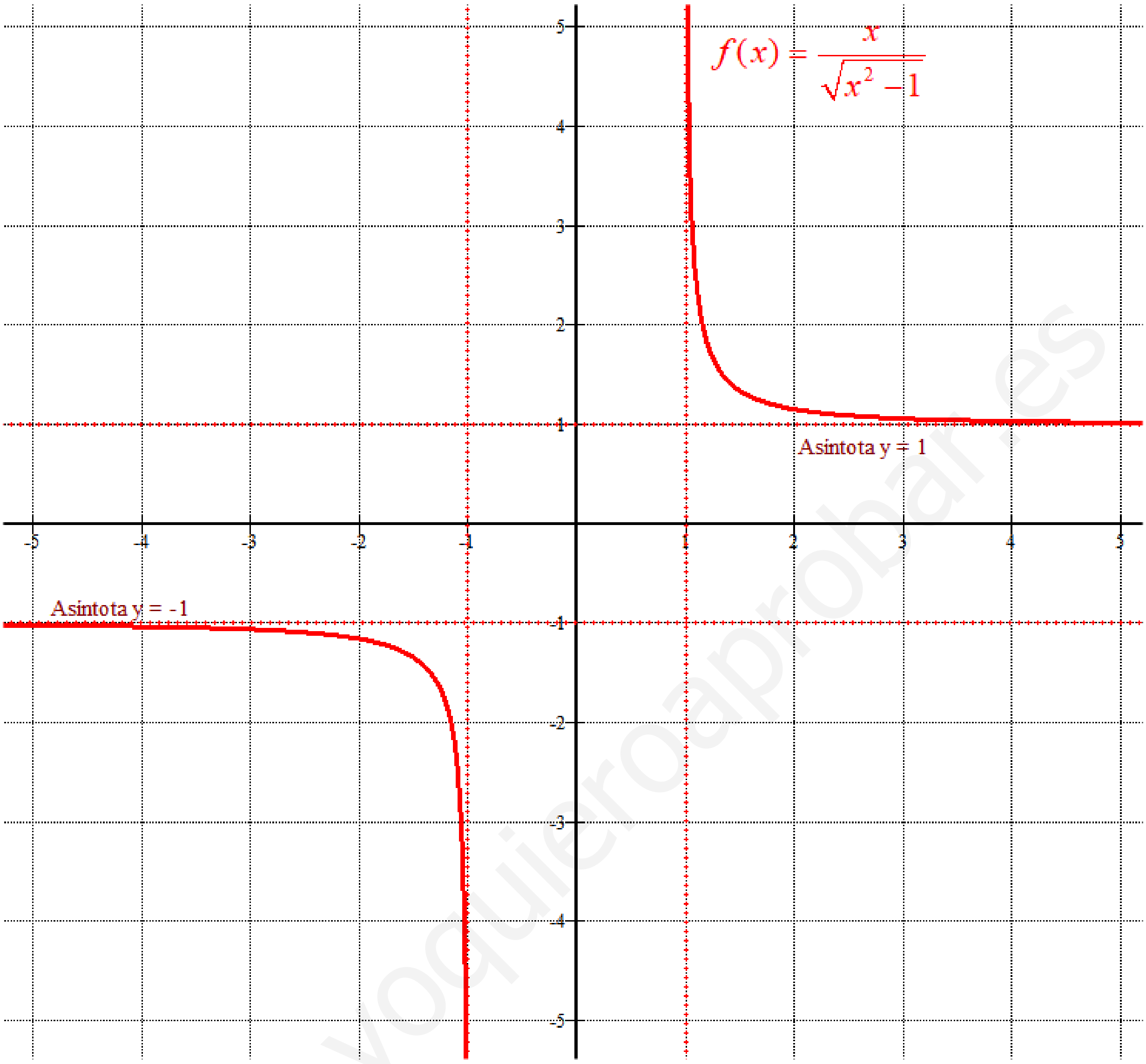
No hay pues existen asíntotas horizontales.

b) Utilizamos la derivada.

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \Rightarrow f'(x)=\frac{\sqrt{x^2-1}-x\dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2-1}}}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}=\frac{\sqrt{x^2-1}-\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1}=\frac{\dfrac{\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1}$$

$$f'(x)=\frac{x^2-1-x^2}{\left(x^2-1\right)\sqrt{x^2-1}}=\frac{-1}{\left(x^2-1\right)\sqrt{x^2-1}}$$

Esta derivada nunca se anula y siempre tendrá el mismo signo pues $x^2-1>0$ en todo su dominio. Por lo que la derivada es siempre negativa. Es decir, la función siempre decrece.



c)

$$\int_2^3 f(x)dx=\int_2^3 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx=\ldots$$

Calculamos primero la integral indefinida.

$$\boxed{\begin{array}{l}\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Cambio de variable}\\ x^2-1=t\Rightarrow 2xdx=dt\\ dx=\dfrac{dt}{2x}\end{array}\right\}=\int\frac{x}{\sqrt{t}}\frac{dt}{2x}=\int\frac{1}{2\sqrt{t}}dt=\\ \displaystyle=\frac{1}{2}\int t^{-1/2}dt=\frac{1}{2}\frac{t^{-1/2+1}}{-1/2+1}=\frac{1}{2}\frac{t^{1/2}}{1/2}=\sqrt{t}=\sqrt{x^2-1}\end{array}}$$

$$\ldots=\left[\sqrt{x^2-1}\right]_2^3=\left[\sqrt{3^2-1}\right]-\left[\sqrt{2^2-1}\right]=\boxed{\sqrt{8}-\sqrt{3}}$$

Problema 4. Sea $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La justificación de que A tiene inversa y el cálculo de dicha matriz inversa. (3 *puntos*)

b) Dos constantes *a, b* de modo que $A^{-1}=A^2+aA+bI$. Se puede usar (sin comprobarlo) que A verifica la ecuación $A^3-3A^2+3A-I=0$ siendo I la matriz identidad. (3 *puntos*)

c) El valor de λ para que el sistema de ecuaciones $(A-\lambda I)\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$ tenga infinitas soluciones.

Para dicho valor de λ hallar todas las soluciones del sistema. (2+2 *puntos*)

a)

$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$. Al ser no nulo su determinante la matriz A tiene inversa.

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}0 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}$$

b) Si multiplicamos la ecuación matricial planteada $A^{-1}=A^2+aA+bI$ por la matriz A tenemos que $AA^{-1}=AA^2+aAA+bAI\Rightarrow I=A^3+aA^2+bA\Rightarrow A^3+aA^2+bA-I=0$.
Como nos dicen que podemos utilizar que se cumple $A^3-3A^2+3A-I=0$ entonces mis constantes buscadas son $a=-3$ y $b=3$.

c)

$$(A-\lambda I)\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\Rightarrow\left(\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}\right)\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1-\lambda & 2 & 0\\ 0 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 2 & 1-\lambda\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$$

La matriz de coeficientes tiene determinante $\begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & 0\\ 0 & 1-\lambda & 0\\ 0 & 2 & 1-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)^3$

Para $\lambda\neq 1$ este determinante es no nulo y el sistema tiene una solución única. Para que tenga infinitas soluciones debe ser $\lambda=1$. Lo resolvemos para $\lambda=1$.

$$(A-I)\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}0&2&0\\0&0&0\\0&2&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}2y\\0\\2y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow y=0$$

Las soluciones son $x=\alpha;\quad y=0;\quad z=\beta$

Problema 5. Se dan las rectas $r:\begin{cases} x=1 \\ y=2+\lambda, \lambda \in \mathbb{R} \\ z=2\lambda \end{cases}$, $s: \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z+2}{1}$ y el plano $\pi: 3x+ay-z+1=0$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Si hay algún valor del parámetro *a* para el cual la recta *r* está contenida en el plano π. (4 *puntos*)

b) La distancia entre las rectas *r* y *s*. (3 *puntos*)

c) El coseno del ángulo que forman la recta *r* y la recta $t:\begin{cases} 2x-y=0 \\ y-z=2 \end{cases}$. (3 *puntos*)

a) Para que la recta esté contenida en el plano el vector director de la recta debe ser perpendicular al normal del plano, es decir, su producto escalar debe ser cero.

$$\left.\begin{array}{l} r:\begin{cases} x=1 \\ y=2+\lambda \Rightarrow \vec{v_r}=(0,1,2) \\ z=2\lambda \end{cases} \\ \pi: 3x+ay-z+1=0 \Rightarrow \vec{n}=(3,a,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{v_r}\cdot\vec{n}=0 \Rightarrow (0,1,2)(3,a,-1)=0 \Rightarrow a-2=0 \Rightarrow a=2$$

Para *a* = *2* hemos obtenido que recta y plano son paralelos o la recta está contenida en el plano.

Veamos si la recta está contenida o es paralela, para ello basta ver si el punto P(1,2 0) que pertenece a la recta r pertenece al plano $\pi: 3x+2y-z+1=0$.

$$\left.\begin{array}{l} ¿P(1,2\ 0)\in\pi? \\ \pi: 3x+2y-z+1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow ¿3+4-0+1=0?$$

No se cumple luego la recta y el plano son paralelos y para ningún valor de *a* la recta está contenida en el plano.

b) Averigüemos primero la posición relativa de las rectas.

$$r:\begin{cases} x=1 \\ y=2+\lambda \\ z=2\lambda \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} P_r(1,2,0) \\ \vec{v_r}=(0,1,2) \end{array}\right\}$$

$$s: \frac{x+1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+2}{1} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} P_s(-1,0,-2) \\ \vec{v_s}=(2,-1,1) \end{array}\right\}$$

Los vectores directores no tienen coordenadas proporcionales, por lo que las rectas no son ni coincidentes ni paralelas.

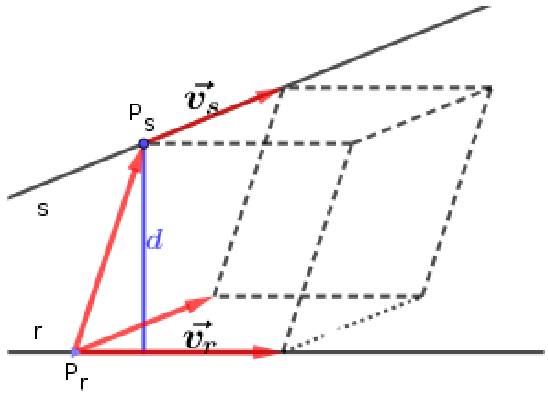
Veamos si se cortan o se cruzan. Utilizamos el producto mixto de los vectores de las rectas y un vector que une un punto de la recta *s* con un punto de la recta *s*.

$$\overrightarrow{P_rP_s}=(-1,0,-2)-(1,2,0)=(-2,-2,-2)$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{P_rP_s}=(-2,-2,-2) \\ \vec{v_r}=(0,1,2) \\ \vec{v_s}=(2,-1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\overrightarrow{P_rP_s},\vec{v_r},\vec{v_s}\right]=\begin{vmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-2-8-0+4+0-4=-10\neq 0$$

Al ser distinto de cero las rectas se cruzan.

Utilizamos la fórmula de la distancia entre dos rectas que se cruzan:



$$\vec{v_r} \times \vec{v_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = i + 4j - 2k + 2i = 3i + 4j - 2k = (3,4,-2) \Rightarrow \left|\vec{v_r} \times \vec{v_s}\right| = \sqrt{9+16+4} = \sqrt{29}$$

$$d(r,s) = \frac{\text{Volumen del paralelepípedo}}{\text{Área de la base}} = \frac{\left|\left[\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{v_r}, \vec{v_s}\right]\right|}{\left|\vec{v_r} \times \vec{v_s}\right|} = \boxed{\frac{10}{\sqrt{29}} u}$$

c) Hallamos los vectores directores y un punto de cada una de las rectas.

$$t: \begin{cases} 2x - y = 0 \\ y - z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 0 \\ y = 2 + z \end{cases} \Rightarrow 2x - 2 - z = 0 \Rightarrow 2x = 2 + z \Rightarrow x = 1 + \frac{1}{2}z \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + \frac{1}{2}z \\ y = 2 + z \end{cases}$$

$$t: \begin{cases} x = 1 + 0.5\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} P_t(1,2,0) \\ \vec{v_t}(0.5,1,1) \end{array} \right\}$$

$$r: \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 + \lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} P_r(1,2,0) \\ \vec{v_r} = (0,1,2) \end{array} \right\}$$

El coseno del ángulo que forman se obtiene de la fórmula del producto escalar.

$$\cos(r,t) = \cos\left(\vec{v_r}, \vec{v_t}\right) = \frac{\vec{v_r} \cdot \vec{v_t}}{\left|\vec{v_r}\right| \cdot \left|\vec{v_t}\right|} = \frac{(0,1,2)(0.5,1,1)}{\sqrt{0+1+4}\sqrt{0.25+1+1}} = \frac{1+2}{\sqrt{11.25}} = \boxed{\frac{2\sqrt{5}}{5} = 0.8944}$$

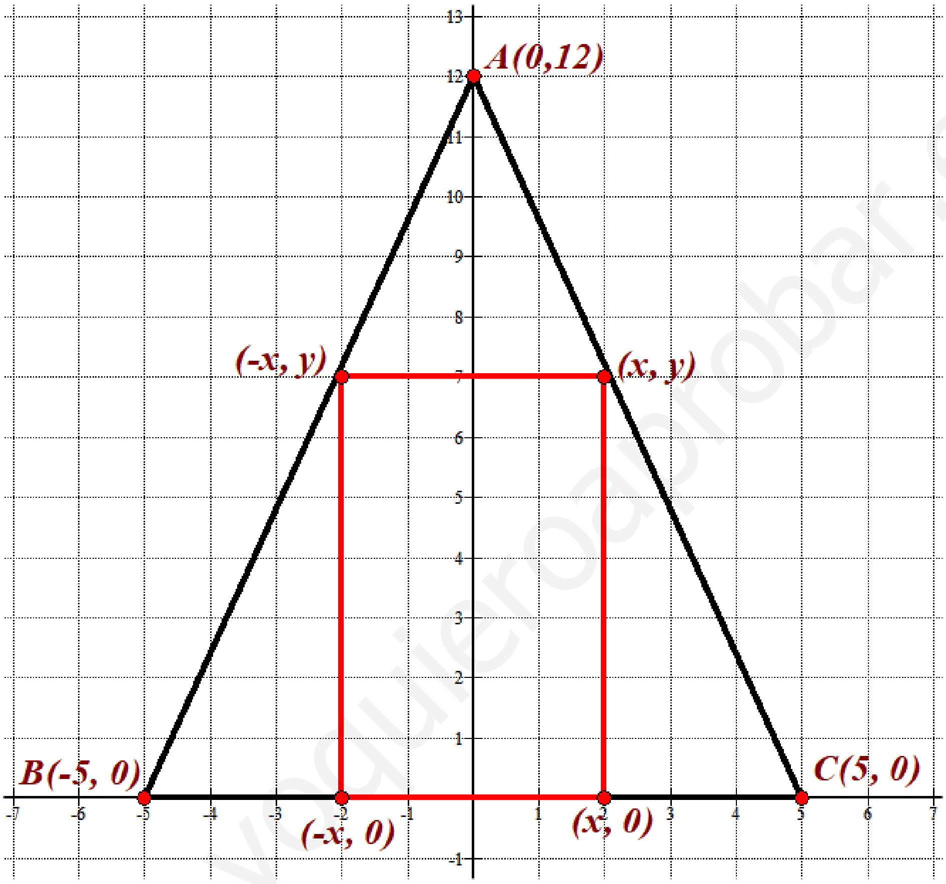
Problema 6. Los vértices de un triángulo son A(0, 12), B(–5, 0) y C(5, 0). Se desea construir un rectángulo inscrito en el triángulo anterior, de lados paralelos a los ejes coordenados y dos de cuyos vértices tienen coordenadas *(–x, 0), (x, 0),* siendo $0 \le x \le 5$. Los otros dos vértices están situados en los segmentos AB y AC.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La expresión *f(x)* del área del rectángulo anterior. (4 *puntos*)

b) El valor de *x* para el cual dicha área es máxima y las dimensiones del rectángulo obtenido. (3 *puntos*)

c) La proporción entre el área del rectángulo anterior y el área del triángulo. (3 *puntos*)



a) La base del rectángulo es *2x*, pero necesitamos conocer la altura para determinar el área. Hallamos la ecuación de la recta que pasa por C(5, 0) y A(0, 12).

$$y = mx + n \Rightarrow \left. \begin{cases} C(5,0) \to 0 = 5m + n \\ A(0,12) \to 12 = 0 + n \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} n = -5m \\ n = 12 \end{matrix} \right\} \Rightarrow -5m = 12 \Rightarrow m = -\frac{12}{5}$$

$$y = -\frac{12}{5}x + 12$$

Por lo que el área del rectángulo que se forma (depende del valor de *x*) tiene la expresión:

$$Área(x) = \text{Base} \cdot \text{Altura} = 2x \cdot \left(-\frac{12}{5}x + 12\right) = -\frac{24}{5}x^2 + 24x$$

b) Derivamos la función área e igualamos a cero en busca de sus puntos críticos.

$$Área(x) = -\frac{24}{5}x^2 + 24x \Rightarrow Área'(x) = -\frac{48}{5}x + 24$$

$$Área'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{48}{5}x + 24 = 0 \Rightarrow -\frac{48}{5}x = -24 \Rightarrow x = \frac{120}{48} = 2.5$$

Sustituimos este valor en la derivada segunda.

$$\acute{A}rea''(x) = -\frac{48}{5} \Rightarrow \acute{A}rea''(2.5) = -\frac{48}{5} < 0$$

La función área tiene un valor máximo para *x = 2.5*.

Sustituimos y averiguamos el valor de la altura del rectángulo → $y = -\frac{12}{5}2.5 + 12 = 6$

Sustituimos y obtenemos el área del rectángulo → $\acute{A}rea(2.5) = -\frac{24}{5}2.5^2 + 24 \cdot 2.5 = 30\, u^2$

Con un rectángulo de base 5 unidades y altura 6 unidades tenemos un rectángulo de área máxima, siendo esta de 30 unidades cuadradas.

c) El área del triángulo es $\frac{\text{Base} \cdot \text{Altura}}{2} = \frac{10 \cdot 12}{2} = 60\, u^2$ y la del rectángulo anterior 30 u^2.

La proporción es $\frac{60}{30} = 2$. El rectángulo tiene de área la mitad del triángulo.