	Pruebas de acceso a enseñanzas universitarias oficiales de grado Castilla y León	MATEMÁTICAS II	EJERCICIO Nº Páginas: 3
---	---	-----------------------	---------------------------------------

El alumno deberá escoger libremente CINCO problemas completos de los DIEZ propuestos. Se expresará claramente los elegidos. Si se resolvieran más, sólo se corregirán los 5 primeros que estén resueltos (según el orden de numeración de pliegos y hojas de cada pliego) y que no aparezcan totalmente tachados.

2.- CALCULADORA: Se permitirá el uso de **calculadoras no programables** (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Los 5 ejercicios se puntuarán sobre un máximo de 2 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. **Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales**, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

E1.- (Álgebra)

a) Discutir el sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro λ :

$$\begin{cases} \lambda x + y = 1 \\ x + \lambda y + z = 2 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \quad (1,2 \text{ puntos})$$

a) Resolverlo para $\lambda = 1$. (0,8 puntos)

E2.- (Álgebra)

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & n \end{pmatrix}$

a) Encontrar los valores de m y n para que se verifique:

$$A^2 = A^t \quad (A^t \equiv \text{la traspuesta de } A) \quad (1,2 \text{ puntos})$$

b) ¿Para qué valores de m y n la matriz A no es invertible? (0,8 puntos)

E3.- (Geometría)

Dado el punto $P = (2, 1, 1)$ y la recta $r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-4}{-3}$,

a) Hallar la recta paralela a r que pase por P (0,8 puntos)

b) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto P y contiene a la recta r . (1,2 puntos)

E4.- (Geometría)

a) Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1, 2, 3)$ y es paralela a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x - y - z - 1 = 0 \\ x + y + z - 3 = 0 \end{cases} \quad (1 \text{ punto})$$

b) Calcular el punto simétrico del $(1, 2, 3)$ respecto del plano $\pi \equiv 3x + 2y + z + 4 = 0$. (1 punto)

E5.- (Análisis)

Determinar la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, conociendo que tiene un punto de inflexión en $x = 1$ y que la recta tangente a su gráfica en el punto $(-1, 0)$ es el eje de abscisas. **(2 puntos)**

E6.- (Análisis)

Demuestre que la ecuación $x^4 + 3x = 1 + \operatorname{sen} x$ tiene alguna solución real en el intervalo $[0, 2]$. Probar que la solución es única. **(2 puntos)**

E7.- (Análisis)

a) Calcular $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - \sqrt{2x - 1}}{1 - x}$. **(1 punto)**

b) Dada la función $f(x) = \frac{2x - e^{-x}}{x^2 + e^{-x}}$, hallar la función primitiva cuya $F(x)$ que verifique $F(0) = 3$. **(1 punto)**

E8.- (Análisis)

a) Dada la función $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Encontrar sus extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento. **(1 punto)**

b) Dada la función $f(x) = x^2 - 2x$. Estudiar el signo de la función en el intervalo $[1, 3]$ y encontrar el área del recinto comprendido entre su gráfica, el eje OX y las rectas $x = 1$ y $x = 3$. **(1 punto)**

E9.- (Probabilidad y estadística)

El consumo de azúcar en un determinado país, calculado en Kg (kilogramos) por persona y año, varía según una distribución normal de media 15 y desviación típica 5.

a) ¿Qué porcentaje de personas de ese país consumen menos de 10 Kg de azúcar al año? **(1 punto)**

b) ¿Cuál es el porcentaje de personas del país cuyo consumo anual de azúcar es superior a 25 Kg? **(1 punto)**

E10.- (Probabilidad y estadística)

Los estudiantes, que comienzan los estudios de Medicina, en el conjunto formado por las comunidades autónomas de Andalucía, Baleares y Castilla y León, se distribuyen de la siguiente forma: un 50% de Andalucía, un 15% de Baleares y un 35% provienen de Castilla y León. Los porcentajes de dichos estudiantes que no consiguen el título de Médico son los siguientes: 15% de Andalucía, 10% de Baleares y 5% de Castilla y León

a) Calcular la probabilidad de que uno de dichos estudiantes, elegido al azar, no consiga el título de Licenciado en Medicina. **(1 punto)**

b) Si un alumno no consigue el título de Licenciado en Medicina, ¿es más probable que provenga de Andalucía o de Castilla y León? **(1 punto)**

SOLUCIONES**E1.- (Álgebra)**a) Discutir el sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro λ :

$$\begin{cases} \lambda x + y = 1 \\ x + \lambda y + z = 2 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \quad (1,2 \text{ puntos})$$

b) Resolverlo para $\lambda = 1$. (0,8 puntos)

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Con determinante $|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1 - 1 - \lambda = \lambda^2 - \lambda$. Igualamos a cero.

$$|A| = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = 1 \end{cases}$$

Estudiamos 3 situaciones distintas.

CASO 1. $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq 1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas.

El sistema es compatible determinado.**CASO 2.** $\lambda = 0$

El sistema queda:

$$\begin{cases} y = 1 \\ x + z = 2 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{y = 1} \\ x + z = 2 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + z = 2 \\ x + 1 + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + z = 2 \\ x + z = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{¡IMPOSIBLE!}$$

Resolviendo el sistema se llega a una situación imposible pues una expresión ($x + y$) no puede dar dos valores diferentes (1 y 2).

El sistema es incompatible.**CASO 3.** $\lambda = 1$

El sistema queda:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y + z = 2 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{Ecuación 2}^a = \text{Ecuación 3}^a \\ \text{Quito ecuación 3}^a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ x + y + z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 1 - y} \\ x + z = 2 - y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 - y + z = 2 - y \Rightarrow \boxed{z = 1}$$

El sistema es compatible indeterminado.Tiene infinitas soluciones: $x = 1 - t$; $y = t$; $z = 1$ con $t \in \mathbb{R}$ b) Para $\lambda = 1$ las soluciones son $x = 1 - t$; $y = t$; $z = 1$ con $t \in \mathbb{R}$. Resuelto en apartado a) CASO 3.

E2.- (Álgebra)

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & n \end{pmatrix}$

a) Encontrar los valores de m y n para que se verifique:

$$A^2 = A^t \quad (A^t \equiv \text{la traspuesta de } A)$$

(1,2 puntos)

b) ¿Para qué valores de m y n la matriz A no es invertible?

(0,8 puntos)

a)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m+nm & n^2 \end{pmatrix}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & n \end{pmatrix} \quad A^2 = A^t \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m+nm & n^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1=1 \\ m=0 \\ 0=m+nm \\ n=n^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} \boxed{m=0} \\ \Rightarrow 0 = m + nm \\ n = n^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 0 = 0 + 0 \\ n = n^2 \end{array} \right\} \Rightarrow n = n^2 \Rightarrow n^2 - n = 0 \Rightarrow n(n-1) = 0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \boxed{n=0} \\ o \\ \boxed{n=1} \end{array} \right\}$$

Los valores son: $m = n = 0$ o $m = 0$ y $n = 1$

b) Calculamos el determinante de A y lo igualamos a cero, para averiguar esos valores para los que la matriz A no es invertible.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ m & n \end{vmatrix} = n$$

$$|A| = 0 \Rightarrow n = 0$$

Para $n = 0$ y cualquier valor de m la matriz no es invertible.

E3.- (Geometría)

Dado el punto $P = (2, 1, 1)$ y la recta $r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-4}{-3}$,

- a) Hallar la recta paralela a r que pase por P **(0,8 puntos)**
 b) Hallar la ecuación del plano que pasa por el punto P y contiene a la recta r . **(1,2 puntos)**

- a) Si la recta s es paralela a la recta r tiene el mismo vector director.

$$\vec{v}_s = \vec{v}_r = (1, -1, -3)$$

Hallamos la ecuación de la recta s paralela a r que pasa por $P = (2, 1, 1)$:

$$\left. \begin{array}{l} P = (2, 1, 1) \in s \\ \vec{v}_s = \vec{v}_r = (1, -1, -3) \end{array} \right\} \Rightarrow s \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-3}$$

- b) Si el plano π contiene al punto P y a la recta r entonces debe tener como vectores directores el director de la recta \vec{v}_r y también el vector \overrightarrow{PQ} , siendo Q un punto cualquiera de la recta r .

$$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-4}{-3} \Rightarrow Q = (2, 3, 4)$$

$$\overrightarrow{PQ} = (2, 3, 4) - (2, 1, 1) = (0, 2, 3)$$

$$\left. \begin{array}{l} P = (2, 1, 1) \in \pi \\ \vec{u} = \overrightarrow{PQ} = (0, 2, 3) \\ \vec{v} = \vec{v}_r = (1, -1, -3) \end{array} \right\} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

$$-6x + 12 + 3y - 3 - 2z + 2 + 3x - 6 = 0$$

$$\boxed{\pi \equiv -3x + 3y - 2z + 5 = 0}$$

E4.- (Geometría)

a) Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto (1, 2, 3) y es paralela a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x - y - z - 1 = 0 \\ x + y + z - 3 = 0 \end{cases} \quad (1 \text{ punto})$$

b) Calcular el punto simétrico del (1, 2, 3) respecto del plano $\pi \equiv 3x + 2y + z + 4 = 0$. (1 punto)

a) Hallamos el vector director de la recta r mediante el producto escalar de los vectores normales de los planos que la definen.

$$\vec{v}_r = \vec{n} \times \vec{n}' = (1, -1, -1) \times (1, 1, 1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -i - j + k + k - j + i = -2j + 2k = (0, -2, 2)$$

La recta s paralela a r que pasa por (1, 2, 3) tiene ecuación:

$$\left. \begin{array}{l} (1, 2, 3) \in s \\ \vec{v}_s = (0, -2, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow s \equiv \frac{x-1}{0} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{2}$$

b) Hallamos la ecuación de la recta t perpendicular al plano $\pi \equiv 3x + 2y + z + 4 = 0$ que pasa por el punto P(1, 2, 3).

$$\left. \begin{array}{l} (1, 2, 3) \in t \\ \vec{v}_t = \vec{n} = (3, 2, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow t \equiv \begin{cases} x = 1 + 3\alpha \\ y = 2 + 2\alpha \\ z = 3 + \alpha \end{cases}$$

Hallamos el punto de corte M de la recta t y el plano π .

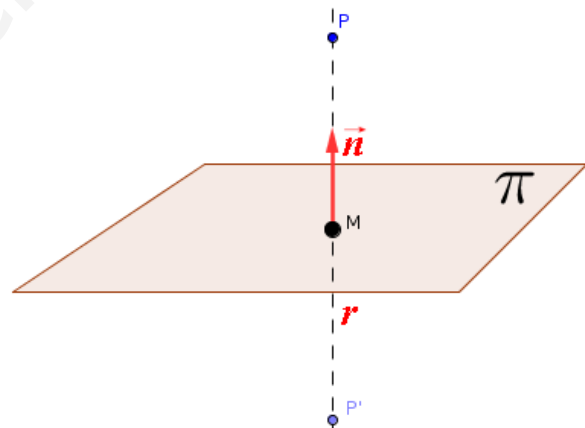
$$t \equiv \begin{cases} x = 1 + 3\alpha \\ y = 2 + 2\alpha \\ z = 3 + \alpha \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv 3x + 2y + z + 4 = 0$$

$$\Rightarrow 3(1 + 3\alpha) + 2(2 + 2\alpha) + 3 + \alpha + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 + 9\alpha + 4 + 4\alpha + 3 + \alpha + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 14\alpha + 14 = 0 \Rightarrow 14\alpha = -14 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - 3 = -2 \\ y = 2 - 2 = 0 \\ z = 3 - 1 = 2 \end{cases} \Rightarrow M(-2, 0, 2)$$



El punto simétrico $P'(a, b, c)$ es un punto tal que el vector $\overline{P'M} = \overline{MP}$.

$$\left. \begin{array}{l} \overline{P'M} = (-2, 0, 2) - (a, b, c) = (-2 - a, -b, 2 - c) \\ \overline{MP} = (1, 2, 3) - (-2, 0, 2) = (3, 2, 1) \end{array} \right\} \Rightarrow (-2 - a, -b, 2 - c) = (3, 2, 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2 - a = 3 \rightarrow a = -5 \\ -b = 2 \rightarrow b = -2 \\ 2 - c = 1 \rightarrow c = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P'(-5, -2, 1) \text{ Simétrico de P respecto del plano } \pi}$$

E5.- (Análisis)

Determinar la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, conociendo que tiene un punto de inflexión en $x = 1$ y que la recta tangente a su gráfica en el punto $(-1, 0)$ es el eje de abscisas. **(2 puntos)**

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow f''(x) = 6x + 2a \Rightarrow f'''(x) = 6$$

Al tener un punto de inflexión en $x = 1$ significa que se anula la derivada segunda y la tercera es no nula.

$$\left. \begin{array}{l} f''(1) = 6 + 2a = 0 \\ f'''(1) = 6 \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow 6 + 2a = 0 \Rightarrow \boxed{a = -3}$$

La función tiene la expresión $f(x) = x^3 - 3x^2 + bx + c$ y la derivada es $f'(x) = 3x^2 - 6x + b$

Falta determinar el valor de “b” y “c”.

Si la recta tangente a su gráfica en el punto $(-1, 0)$ es el eje de abscisas ($y = 0$) significa que

$f(-1) = 0$ y que $f'(-1) = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} f(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 + b(-1) + c \Rightarrow -1 - 3 - b + c = 0 \Rightarrow c - b = 4 \\ f'(-1) = 3(-1)^2 - 6(-1) + b = 0 \Rightarrow 3 + 6 + b = 0 \Rightarrow \boxed{b = -9} \end{array} \right\} \Rightarrow c + 9 = 4 \Rightarrow \boxed{c = -5}$$

Las constantes son $a = -3$; $b = -9$; $c = -5$ y la función es $\boxed{f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x - 5}$

E6.- (Análisis)

Demuestre que la ecuación $x^4 + 3x = 1 + \operatorname{sen} x$ tiene alguna solución real en el intervalo $[0, 2]$. Probar que la solución es única. **(2 puntos)**

A partir de la ecuación planteada consideramos la función $f(x) = x^4 + 3x - 1 - \operatorname{sen} x$.

En $x = 0$ la función vale $f(0) = 0^4 + 0 - 1 - \operatorname{sen} 0 = -1 < 0$.

En $x = 2$ la función vale $f(2) = 2^4 + 6 - 1 - \operatorname{sen} 2 = 21 - \operatorname{sen} 2 > 0$.

La función $f(x) = x^4 + 3x - 1 - \operatorname{sen} x$ es continua en $[0, 2]$ y toma valores de distinto signo en cada extremo del intervalo, por el teorema de Bolzano existe $c \in [0, 2]$ tal que $f(c) = 0$.

Esto implica que existe $c \in [0, 2]$ tal que $f(c) = c^4 + 3c - 1 - \operatorname{sen} c = 0 \Rightarrow c^4 + 3c = 1 + \operatorname{sen} c$

Además esta solución es única, ya que si hubiese otro valor $d \in [0, 2]$ tal que $f(d) = 0$.

Podríamos aplicar el teorema de Rolle a la función $f(x) = x^4 + 3x - 1 - \operatorname{sen} x$ en el intervalo $[c, d]$, pues la función es derivable en (c, d) , continua en $[c, d]$.

El teorema de Rolle nos asegura la existencia de un valor $e \in (c, d)$ tal que $f'(e) = 0$.

Pero la derivada de la función es $f'(x) = 4x^3 + 3 - \cos x$, si la igualamos a cero obtenemos:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 + 3 - \cos x = 0 \Rightarrow 4x^3 = -3 + \cos x.$$

Esta igualdad es imposible para $x \in (0, 2)$ pues $\left. \begin{array}{l} 4x^3 > 0 \\ \cos x \leq 1 \Rightarrow -3 + \cos x < 0 \end{array} \right\}$

La contradicción obtenida permite afirmar que la solución de la ecuación inicial es única.

E7.- (Análisis)

a) Calcular $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - \sqrt{2x - 1}}{1 - x}$. **(1 punto)**

b) Dada la función $f(x) = \frac{2x - e^{-x}}{x^2 + e^{-x}}$, hallar la función primitiva cuya $F(x)$ que verifique $F(0) = 3$.

(1 punto)

a)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - \sqrt{2x - 1}}{1 - x} = \frac{\sqrt{1} - \sqrt{1}}{0} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación (L'Hôpital)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}} - \frac{2}{2\sqrt{2x-1}}}{-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-2x+1}{2\sqrt{x^2-x+1}} + \frac{2}{2\sqrt{2x-1}} = \frac{-1}{2} + \frac{2}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

b) Como la derivada de $x^2 + e^{-x}$ es $2x - e^{-x}$:

$$F(x) = \int f(x) dx = \int \frac{2x - e^{-x}}{x^2 + e^{-x}} dx = \ln(x^2 + e^{-x}) + K$$

Como debe cumplirse que $F(0) = 3$ entonces $\ln|0^2 + e^{-0}| + K = 3 \Rightarrow K = 3$.

$$\boxed{F(x) = \ln(x^2 + e^{-x}) + 3}$$

E8.- (Análisis)

a) Dada la función $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Encontrar sus extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento. **(1 punto)**

b) Dada la función $f(x) = x^2 - 2x$. Estudiar el signo de la función en el intervalo $[1, 3]$ y encontrar el área del recinto comprendido entre su gráfica, el eje OX y las rectas $x = 1$ y $x = 3$. **(1 punto)**

a) El dominio de la función es $(0, +\infty)$, pues no existe el logaritmo de un número negativo.

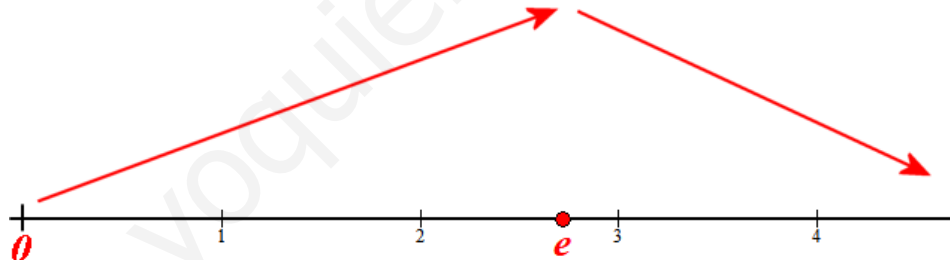
$$f(x) = \frac{\ln x}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Rightarrow 1 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow x = e$$

Estudiamos el comportamiento de la función antes y después de $x = e$.

- En $(0, e)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{1 - \ln 1}{1^2} = 1 > 0$. La función crece en $(0, e)$.
- En $(e, +\infty)$ tomamos $x = e^2$ y la derivada vale $f'(e^2) = \frac{1 - \ln e^2}{e^4} = \frac{-1}{e^4} < 0$. La función decrece en $(e, +\infty)$.



La función crece en $(0, e)$ y decrece en $(e, +\infty)$.

Tiene un máximo relativo en $x = e$.

Como $f(e) = \frac{\ln e}{e} = \frac{1}{e}$ el punto $\left(e, \frac{1}{e}\right)$ es un máximo relativo de la función.

b) Vemos donde se anula la función.

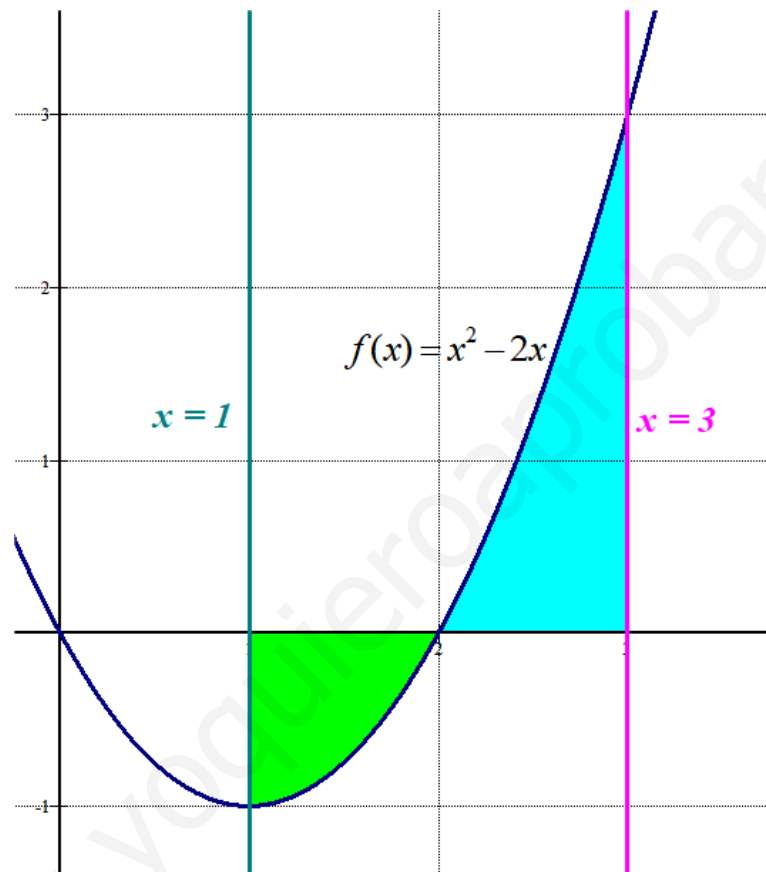
$$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$x = 2$ pertenece al intervalo $[1, 3]$ por lo que se divide en dos partes, vemos el signo de la función en cada una de ellas.

- En $[1, 2)$ tomamos $x = 1,5$ y la función vale $f(1,5) = 1,5^2 - 3 = -0,75 < 0$. Es negativa en el intervalo $[1, 2)$.
- En $(2, 3]$ tomamos $x = 2,5$ y la función vale $f(2,5) = 2,5^2 - 5 = 1,25 > 0$. Es positiva en el intervalo $(2, 3]$.

El área del recinto es la suma de las integrales definidas siguientes:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_1^2 -(x^2 - 2x) dx + \int_2^3 x^2 - 2x dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 \right]_1^2 + \left[\frac{x^3}{3} - x^2 \right]_2^3 = \\ &= \left[-\frac{2^3}{3} + 2^2 \right] - \left[-\frac{1^3}{3} + 1^2 \right] + \left[\frac{3^3}{3} - 3^2 \right] - \left[\frac{2^3}{3} - 2^2 \right] = \\ &= -\frac{8}{3} + 4 + \frac{1}{3} - 1 + 9 - 9 - \frac{8}{3} + 4 = -\frac{15}{3} + 7 = \boxed{2 \text{ u}^2} \end{aligned}$$



Si contamos cuadraditos en el dibujo (cada cuadradito es 1 unidad cuadrada) vemos que es coherente con el resultado obtenido (aproximadamente 2 cuadraditos)

E9- (Probabilidad y estadística)

El consumo de azúcar en un determinado país, calculado en Kg (kilogramos) por persona y año, varía según una distribución normal de media 15 y desviación típica 5.

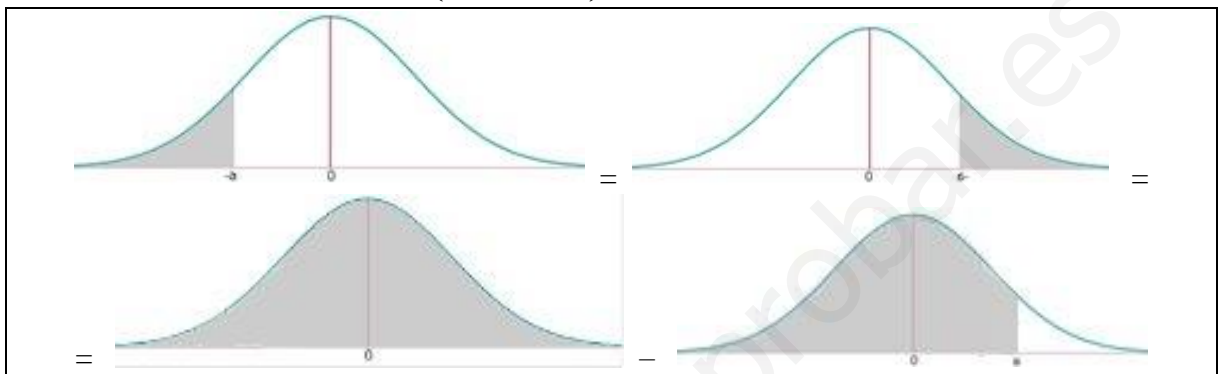
a) ¿Qué porcentaje de personas de ese país consumen menos de 10 Kg de azúcar al año? **(1 punto)**

b) ¿Cuál es el porcentaje de personas del país cuyo consumo anual de azúcar es superior a 25 Kg? **(1 punto)**

$X =$ Consumo de azúcar (kg/año) en un país. $X = N(15, 5)$.

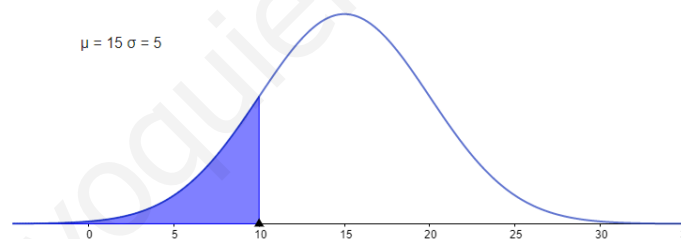
a)

$$P(X \leq 10) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z \leq \frac{10-15}{5}\right) = P(Z \leq -1) = \dots$$



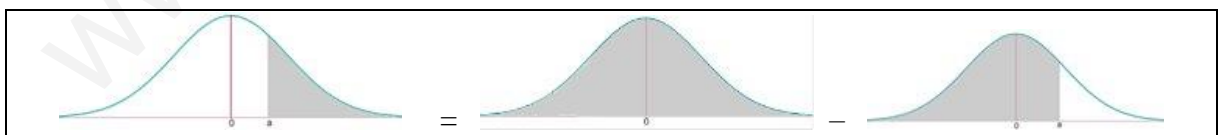
$$\dots = P(Z \geq 1) = 1 - P(Z \leq 1) = \{\text{Buscamos en la tabla } N(0,1)\} = 1 - 0,8413 = \boxed{0,1587}$$

Un porcentaje del 15,87% de personas consumen menos de 10 kg de azúcar al año.



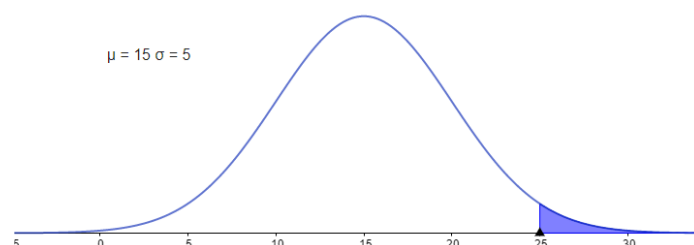
b)

$$P(X \geq 25) = \{\text{Tipificamos}\} = P\left(Z \geq \frac{25-15}{5}\right) = P(Z \geq 2) = \dots$$



$$\dots = 1 - P(Z \leq 2) = \{\text{Buscamos en la tabla } N(0, 1)\} = 1 - 0,9772 = \boxed{0,0228}$$

Un porcentaje de 2,28% de personas consumen más de 25 kg de azúcar al año.



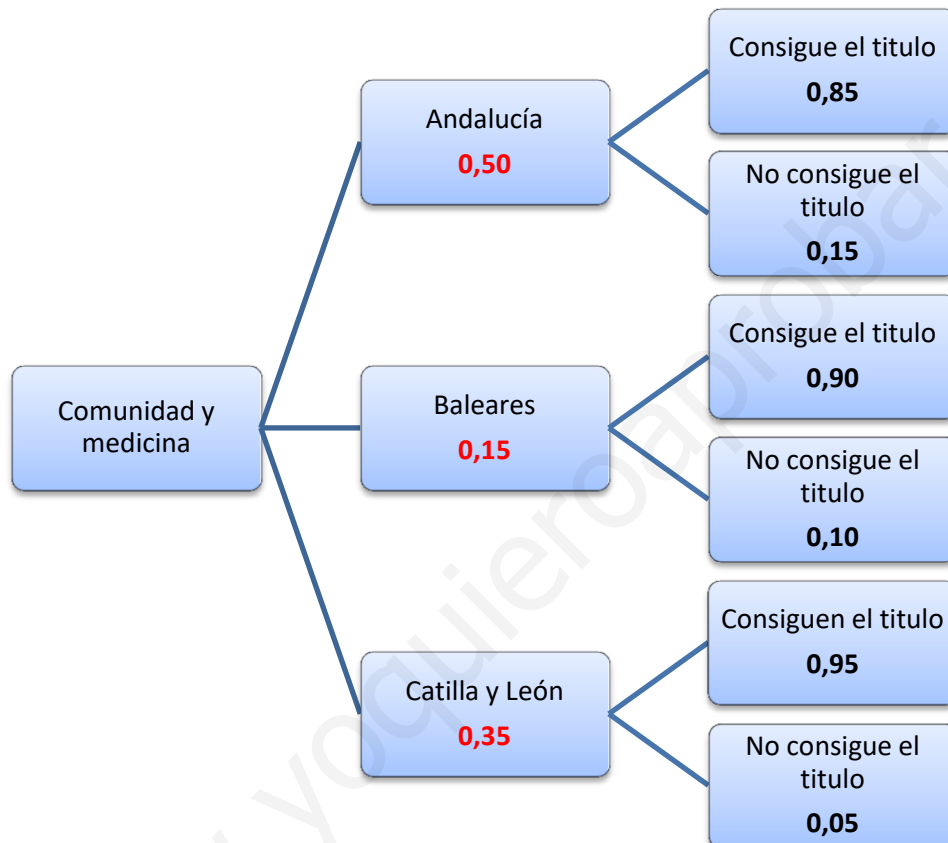
E10.- (Probabilidad y estadística)

Los estudiantes, que comienzan los estudios de Medicina, en el conjunto formado por las comunidades autónomas de Andalucía, Baleares y Castilla y León, se distribuyen de la siguiente forma: un 50% de Andalucía, un 15% de Baleares y un 35% provienen de Castilla y León. Los porcentajes de dichos estudiantes que no consiguen el título de Médico son los siguientes: 15% de Andalucía, 10% de Baleares y 5% de Castilla y León

a) Calcular la probabilidad de que uno de dichos estudiantes, elegido al azar, no consiga el título de Licenciado en Medicina. **(1 punto)**

b) Si un alumno no consigue el título de Licenciado en Medicina, ¿es más probable que provenga de Andalucía o de Castilla y León? **(1 punto)**

Realizamos un diagrama de árbol.



- a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total y sumamos las probabilidades de las tres ramas donde “no se consigue el título de médico”.

$$\begin{aligned}
 P(\text{No consigue el título}) &= P(\text{Es de Andalucía})P(\text{No consigue el título/Es de Andalucía}) + \\
 &+ P(\text{Es de Baleares})P(\text{No consigue el título/Es de Baleares}) + \\
 &+ P(\text{Es de Castilla y León})P(\text{No consigue el título/Es de Castilla y León}) = \\
 &= 0,5 \cdot 0,15 + 0,15 \cdot 0,10 + 0,35 \cdot 0,05 = 0,0750 + 0,0150 + 0,0175 = \boxed{0,1075}
 \end{aligned}$$

- b) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes para calcular las probabilidades de que sea de Andalucía o de Castilla y León.

$$\begin{aligned}
 P(\text{Sea de Andalucía / No ha conseguido el título}) &= \\
 &= \frac{P(\text{Sea de Andalucía} \cap \text{No ha conseguido el título})}{P(\text{No ha conseguido el título})} = \frac{0,50 \cdot 0,15}{0,1075} = \frac{30}{43} = 0,6976
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\text{Sea de Castilla y León} / \text{No ha conseguido el título}) &= \\ &= \frac{P(\text{Sea de Castilla y León} \cap \text{No ha conseguido el título})}{P(\text{No ha conseguido el título})} = \\ &= \frac{0,35 \cdot 0,05}{0,1075} = \frac{7}{43} = 0,1627 \end{aligned}$$

Comparando las probabilidades de que sea de Andalucía (30/43) y la de que sea de Castilla y León (7/43) concluimos que es más probable que sea de la comunidad autónoma andaluza.

www.yoquieroaprobar.es