Ejercicio 1. (1 pto.)

Escribe el término general para las siguientes sucesiones:

a) $5; 8; 11; 14; 17; \dots$

b) $1; \frac{1}{4}; \frac{1}{9}; \frac{1}{16}; \frac{1}{25}; \dots$

c) $1; 5; 9; 13; 17; \dots$

d) $\frac{2}{3}; \frac{3}{5}; \frac{4}{7}; \frac{5}{9}; \frac{6}{11}; \dots$

a) $5; 8; 11; 14; 17; \dots \Rightarrow \mathbf{a_n = 3n + 2}$ *(progresión aritmética)*

b) $1; \frac{1}{4}; \frac{1}{9}; \frac{1}{16}; \frac{1}{25}; \dots \Rightarrow \mathbf{b_n = \frac{1}{n^2}}$

c) $1; 5; 9; 13; 17; \dots \Rightarrow \mathbf{c_1 = 1;\ c_n = (c_{n-1} + 4)}$ ***o*** $\mathbf{c_n = 4n - 3}$

d) $\frac{2}{3}; \frac{3}{5}; \frac{4}{7}; \frac{5}{9}; \frac{6}{11}; \dots \Rightarrow \mathbf{d_n = \frac{n+1}{2n+1}}$

$(cociente\ de\ dos\ progresiones\ aritméticas)$

Recuerda que una sucesión de números reales es una aplicación entre números naturales y números reales: $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}; n \to a_n$, donde el término de la sucesión es cada uno de los elementos que la componen. El término general de una sucesión a_n es la expresión que representa al término que ocupa el lugar enésimo y sirve para denotar cualquier término de la misma.

Ejercicio 2. (1 pto.)

Para las sucesiones siguientes explica su monotonía y acotación.

a) $3; 6; 9; 12; \dots$

b) $\frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{12}; \frac{1}{16}; \dots$

c) $\frac{1}{3}; \frac{1}{3} + \frac{1}{6}; \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9}; \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12}; \dots$

d) $-1; 1; -1; 1; -1; \dots$

a) $3; 6; 9; 12; \ldots \Rightarrow$ Monótona creciente, no está acotada (tiende a ∞)

b) $\frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{12}; \frac{1}{16}; \ldots \Rightarrow$ Monótona decreciente, está acotada inferioremente por cero (tiende a cero) y superiormente por ¼

c) $\frac{1}{3}; \frac{1}{3}+\frac{1}{6}; \frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}; \frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{24}; \ldots \Rightarrow$ Monótona creciente, está acotada inferiormente por $\frac{1}{3}$ y superiormente por $\frac{2}{3}$

d) $-1; 1; -1; 1; -1; \ldots \Rightarrow$ NO es monótona , está acotada entre -1 y 1

Recuerda que una sucesión está acotada si existe un número $k \in \mathbb{R}$; tal que $|a_n| < k$ para todo n.

Una sucesión a_n es monótona creciente en el sentido estricto si para todo n se verifica que $a_n < a_{n+1}$

Una sucesión a_n es monótona decreciente en el sentido estricto si para todo n se verifica que $a_n > a_{n+1}$

Ejercicio 3. (2 ptos.)

Di de las siguientes sucesiones cual es una progresión aritmética y cual geométrica, calcula sus primeros 5 términos. Para a) y b) halla la suma de sus primeros 15 términos S_{15}.

a) $a_n = -2n + 4$

b) $b_n = 3^{n-1}$

c) $c_n = 9n - 1$

d) $d_n = \frac{2^{n-1}}{3}$

a) $a_n = -2n + 4 \Rightarrow$ **progresión aritmética**

$a_1 = -2 \cdot 1 + 4 = \boxed{2}$; $\quad a_2 = -2 \cdot 2 + 4 = \mathbf{0}$; $\quad a_3 = -2 \cdot 3 + 4 = \mathbf{-2}$;

$a_4 = -2 \cdot 4 + 4 = \mathbf{-4}$; $\quad a_5 = -2 \cdot 3 + 4 = \mathbf{-6}$

Hallando $a_{15} = -2 \cdot 15 + 4 = -30 + 4 = \boxed{-26}$

Hallando: $S_{15} = \dfrac{n(a_1 + a_{15})}{2} \Rightarrow \ S_{15} = \dfrac{15 \cdot (2 + (-26))}{2} = \mathbf{-180}$

Una progresión aritmética es una sucesión de números reales en la que la diferencia entre cada término es constante, este número se llama d diferencia de la progresión, que puede ser positivo o negativo:

$(a_{n+1} = a_n + d)$

El término general a_n de una progresión aritmética cuyo primer término es a_1 y cuya diferencia es d es : $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

La suma S_n de los n primeros términos de una progresión aritmética es:

$$S_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

b) $b_n = 3^{n-1} \Rightarrow$ **progresión geométrica**

$b_1 = 3^{1-1} = 3^0 = \boxed{1}$; $\quad b_2 = 3^{2-1} = 3^1 = \mathbf{3}$; $\quad b_3 = 3^{3-1} = 3^2 = \mathbf{9}$;

$b_4 = 3^{4-1} = 3^3 = \mathbf{27}$; $\quad b_5 = 3^{5-1} = 3^4 = \mathbf{81}$

Hallando $r = \dfrac{b_2}{b_1} = \dfrac{3}{1} = \boxed{3}$

Hallando: $S_{15} = \dfrac{b_1 \cdot (r^{15} - 1)}{r - 1} \Rightarrow \ S_{15} = \dfrac{1 \cdot (3^{15} - 1)}{3 - 1} = \ \mathbf{7\,174\,453}$

Una progresión geométrica es una sucesión de números reales en la que el cociente entre un término y el anterior es constante llamado r razón de la progresión. $\frac{a_{n+1}}{a_n} = r \ (para\ a_n \neq 0)$

El término general de una progresión geométrica cuyo primer término es a_1 *y cuya razón es* ***r*** *es:* $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

La suma S_n *de los n primeros términos de una progresión geométrica es:*

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}$$

c) $c_n = 9n - 1 \Rightarrow$ **progresión aritmética**

$c_1 = 9 \cdot 1 - 1 = \mathbf{8}$; $\quad c_2 = 9 \cdot 2 - 1 = \mathbf{17}$; $\quad c_3 = 9 \cdot 3 - 1 = \mathbf{26}$;

$c_4 = 9 \cdot 4 - 1 = \mathbf{35}$; $\quad c_5 = 9 \cdot 5 - 1 = \mathbf{44}$

d) $d_n = \dfrac{2^{n-1}}{3} \Rightarrow$ **progresión geométrica**

$d_1 = \dfrac{2^{1-1}}{3} = \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}$; $\quad d_2 = \dfrac{2^{2-1}}{3} = \dfrac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}$; $\quad d_3 = \dfrac{2^{3-1}}{3} = \dfrac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}$;

$d_4 = \dfrac{2^{4-1}}{3} = \dfrac{\mathbf{8}}{\mathbf{3}}$; $\quad d_5 = \dfrac{2^{5-1}}{3} = \dfrac{\mathbf{16}}{\mathbf{3}}$

Ejercicio 4. (2 ptos.)

Ana acude a un banco para informarse como invertir una herencia recibida de su abuela de unos 10 000€. El asesor financiero del banco le plantea a Ana dos posibles opciones:

Opción 1. Mantener el capital por 7 años al 4% de interés anual.

Opción 2. Mantener el capital los primeros 4 años al 5% anual y los 3 años restantes al 3,5% anual.

¿Cuál es la mejor opción para Ana si quiere tener el mayor capital al final de los 7 años?

El interés compuesto puede calcularse como una progresión geométrica.

Recuerda que si depositamos en una entidad financiera una cantidad de dinero C_o durante un tiempo t, y un rédito r (dado en tanto por uno), se obtiene un beneficio denominado interés $I = C_0 \cdot t \cdot r$

El capital final obtenido después de t años, dado un capital inicial C_0 y un rédito r (dado en tanto por uno) es: $C = C_0 \cdot (1 + r)^t$

<u>Opción 1:</u>

$\mathrm{r} = 0{,}04 \Rightarrow$ 4% anual por 7 años

$C = C_0 \cdot (1 + r)^t \Rightarrow C = 10\,000€ \cdot (1 + 0{,}04)^7 \approx 13\,159{,}32€ \Rightarrow$ *7 años*

<u>Opción 2:</u>

$\mathrm{r}_1 = 0{,}05 \Rightarrow$ 5% anual por 4 años

$\mathrm{C}_1 = \mathrm{C}_0 \cdot (1 + \mathrm{r}_1)^{\mathrm{t}} \Rightarrow \mathrm{C}_1 = 10\,000€ \cdot (1 + 0{,}05)^4 \approx \boxed{12\,155{,}06€}$

$\mathrm{r}_2 = 0{,}035 \Rightarrow$ 3,5% anual por 3 años restantes

$\mathrm{C}_2 = \mathrm{C}_1 \cdot (1 + \mathrm{r}_2)^{\mathrm{t}} \Rightarrow \mathrm{C}_2 = 12\,155{,}06€ \cdot (1 + 0{,}035)^3 \approx 13\,476{,}53€$

La mejor opción a implementar es la 2 ya que el capital final obtenido es mayor de $\mathbf{13\,476,53€}$

Ejercicio 5. (2 ptos.)

Calcula los límites de las sucesiones siguientes:

a) $\mathrm{a_n} = \dfrac{3\mathrm{n} + 2}{5(\mathrm{n} + 1)}$

b) $\mathrm{a_n} = \dfrac{8}{2^n}$

c) $\mathrm{a_n} = \dfrac{\mathrm{n}^3 + 2\mathrm{n}}{2\mathrm{n} + 1}$

a) $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{3n + 2}{5(n + 1)} = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{3n + 2}{5n + 5} = \mathbf{\dfrac{3}{5}}$

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{8}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{8}{\infty} = \mathbf{0}$

c) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3 + 2n}{2n + 1}$
$\Rightarrow$ **no es convergente tiende a** ∞(mayor grado en numerador)

Recuerda que las sucesiones no son funciones continuas y puedes ser:
1) no convergentes y tender a infinito
2) pueden tender a 0
3) pueden converger a un número.

Ejercicio 6. (2 ptos.)

Resuelve las ecuaciones siguientes:

a) $3^{2x+5} = 27$

b) $\sqrt[6]{4^x} = \sqrt[3]{4}$

c) $\ln(3x - 7) = \ln(2)$

a) $3^{2x+5} = 27 \Rightarrow 3^{2x+5} = 3^3 \Rightarrow 2x + 5 = 3 \Rightarrow 2x = 3 - 5 \Rightarrow 2x = -2$

$$\Rightarrow x = \frac{-2}{2} = -1$$

b) $\sqrt[6]{4^x} = \sqrt[3]{4} \Rightarrow 4^{\frac{x}{6}} = 4^{\frac{1}{3}} \Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{3} = 2$

Para resolver ecuaciones exponenciales hay que conseguir que las bases sean iguales y luego igualar los exponentes.

c) $\ln(3x - 7) = \ln(2) \Rightarrow 3x - 7 = 2 \Rightarrow 3x = 2 + 7 \Rightarrow 3x = 9$

$$\Rightarrow x = \frac{9}{3} = 3$$

Para resolver ecuaciones logarítmicas hay que despejar el logaritmo en ambos miembros y luego igualamos.