PROBLEMAS RESUELTOS
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
2020

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES

TEMA 1: MATRICES

- Junio, Ejercicio A1
- Reserva 1, Ejercicio A2
- Reserva 2, Ejercicio A2
- Reserva 3, Ejercicio A2
- Reserva 4, Ejercicio A1
- Septiembre, Ejercicio A1

Sean *A, B, X, Y* matrices invertibles que verifican: $A \cdot X = B$ *y* $B \cdot Y = A$.

a) (1 punto) Compruebe que $Y^{-1} = X$.

b) (1'5 puntos) Para $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, halle *X* e *Y*.

SOCIALES II. 2020 JUNIO. EJERCICIO A1

R E S O L U C I Ó N

a) Sustituimos la primera ecuación en la segunda

$$\left. \begin{array}{l} A \cdot X = B \\ B \cdot Y = A \end{array} \right\} \Rightarrow A \cdot X \cdot Y = A$$

Multiplicamos los dos términos por A^{-1} a la izquierda

$$A \cdot X \cdot Y = A \Rightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot Y = A^{-1} \cdot A \Rightarrow X \cdot Y = I$$

Multiplicamos los dos términos por Y^{-1} a la derecha

$$X \cdot Y = I \Rightarrow X \cdot Y \cdot Y^{-1} = I \cdot Y^{-1} \Rightarrow X = Y^{-1}$$

b) Resolvemos las ecuaciones matriciales

$$A \cdot X = B \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ a+3c & b+3d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} a+2c=2 \\ a+3c=0 \\ b+2d=1 \\ b+3d=-1 \end{array} \right\} \Rightarrow a=6; b=5; c=-2; d=-2 \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot Y = A \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a+c & 2b+d \\ -c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{r} 2a+c=1 \\ -c=1 \\ 2b+d=2 \\ -d=3 \end{array} \right\} \Rightarrow a=1; b=\frac{5}{2}; c=-1; d=-3 \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{2} \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ a & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -2a \end{pmatrix}$ $\quad B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

a) (0'7 Puntos). Determine para qué valores de a **tiene inversa la matriz** A**.**
b) (1 Punto). Para $a=2$**, calcule la matriz inversa de** A**.**
c) (0'8 Puntos). Para $a=0$**, resuelva la ecuación matricial** $X\cdot A^{-1}-B\cdot B^{t}=I_3$**.**
SOCIALES II. 2020 RESERVA 1. EJERCICIO A2

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ a & -1 & -1 \\ 3 & 0 & -2a \end{vmatrix}=4a-3-3+2a^2=2a^2+4a-6=0\Rightarrow a=1\ ;\ a=-3$$

Luego, la matriz A tiene inversa para todos los valores distintos de 1 y -3.

b) Calculamos la inversa para $a=2$

$$A^{-1}=\frac{(A^{adj})^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 4 & -5 & 3 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}^t}{10}=\frac{\begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 5 & -5 & 0 \\ 3 & 3 & -4 \end{pmatrix}}{10}=\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{10} & \frac{3}{10} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

b) Resolvemos la ecuación matricial para $a=0$

$$X\cdot A^{-1}-B\cdot B^{t}=I_3\Rightarrow X\cdot A^{-1}=I_3+B\cdot B^{t}\Rightarrow X\cdot A^{-1}\cdot A=(I_3+B\cdot B^{t})\cdot A\Rightarrow X=(I_3+B\cdot B^{t})\cdot A$$

$$X=(I_3+B\cdot B^{t})\cdot A=\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}=$$

$$=\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}\right]\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 15 & 1 & -5 \\ 10 & -3 & -7 \\ 24 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=A\cdot A^t$ y $C=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, siendo a un parámetro real.

a) (0'75 puntos) ¿Para qué valores del parámetro a existe la inversa de la matriz B?

b) (0'75 puntos) Para $a=1$, calcule la inversa de la matriz B.

c) (1 punto) Para $a=1$, resuelva la ecuación matricial $B^t\cdot X+9C=O$.

SOCIALES II. 2020 RESERVA 2. EJERCICIO A2

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la matriz *B* y su determinante.

$$B=A\cdot A^t=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & a \\ a & a^2+1 \end{pmatrix}$$

$|B|=\begin{vmatrix} 5 & a \\ a & a^2+1 \end{vmatrix}=5a^2+5-a^2=4a^2+5=0\Rightarrow$ No tiene solución real, luego, para cualquier valor de a siempre tiene inversa la matriz *B*.

b) Calculamos la inversa para $a=1$

$$B^{-1}=\frac{(B^{adj})^t}{|B|}=\frac{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}^t}{9}=\frac{\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}}{9}=\begin{pmatrix} \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}$$

c) Resolvemos la ecuación matricial

$$B^t\cdot X+9C=O\Rightarrow B^t\cdot X=O-9C=-9C\Rightarrow (B^t)^{-1}\cdot B^t\cdot X=-9\cdot(B^t)^{-1}\cdot C\Rightarrow X=-9\cdot(B^t)^{-1}\cdot C$$

Como $(B^t)^{-1}=(B^{-1})^t=\begin{pmatrix} \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}$

$$X=-9\cdot(B^t)^{-1}\cdot C=-9\cdot\begin{pmatrix} \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ k & -3 & 2 \\ 1 & k & 1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

a) (0'8 puntos) Razone si las siguientes operaciones se pueden realizar y en aquellos casos en que sea posible, indique la dimensión de la matriz resultante:

$$B^t \cdot A \quad , \quad C \cdot B \quad , \quad B \cdot A + B \quad , \quad B^2$$

b) (0.7 puntos) Calcule los valores del parámetro k **para los que la matriz** A **es invertible.**

c) (1 punto) Para $k=-1$**, calcule la inversa de la matriz** A**.**

SOCIALES II. 2020 RESERVA 3. EJERCICIO A2

R E S O L U C I Ó N

a)

$B^t_{(3,2)} \cdot A_{(3,3)}$ No se puede, ya que el número de columnas de la primera matriz no coincide con el número de filas de la segunda matriz.

$C_{(2,2)} \cdot B_{(2,3)}$ Si se puede y la matriz resultante es de orden $(2,3)$.

$B_{(2,3)} \cdot A_{(3,3)} + B_{(2,3)}$ Si se puede y la matriz resultante es de orden $(2,3)$.

$B_{(2,3)} \cdot B_{(2,3)}$ No se puede, ya que el número de columnas de la primera matriz no coincide con el número de filas de la segunda matriz.

b) Calculamos el determinante

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ k & -3 & 2 \\ 1 & k & 1 \end{vmatrix}=-3+k^2+3-2k=k^2-2k=0 \Rightarrow k=0 \; ; \; k=2$$

Luego, la matriz A tiene inversa para todos los valores de $k \neq 0 \; y \; 2$.

c) Calculamos la inversa de $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^{-1}=\frac{(A^{adj})^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & -3 \end{pmatrix}^t}{3}=\frac{\begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}}{3}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix}$$

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & m \\ 1 & 1 & 1 \\ m & 3 & 5 \end{pmatrix}$ **.**

a) (0'8 Puntos). ¿Para qué valores del parámetro *m* tiene inversa la matriz *A*?.

b) (1'7 Puntos). Para $m=0$, resuelva la ecuación matricial $X\cdot A=A\cdot A^t$.

SOCIALES II. 2020 RESERVA 4. EJERCICIO A1

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el determinante

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 0 & m \\ 1 & 1 & 1 \\ m & 3 & 5 \end{vmatrix}=10+3m-m^2-6=-m^2+3m+4=0 \Rightarrow m=-1\ ;\ m=4$$

Luego, la matriz *A* tiene inversa para todos los valores de $m\neq -1$ y 4.

b) Resolvemos la ecuación matricial

$$X\cdot A=A\cdot A^t \Rightarrow X\cdot A\cdot A^{-1}=A\cdot A^t\cdot A^{-1} \Rightarrow X=A\cdot A^t\cdot A^{-1}$$

Calculamos la inversa de $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

$$A^{-1}=\frac{(A^{adj})^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 \\ 0 & 10 & -6 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}^t}{4}=\frac{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -5 & 10 & -2 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix}}{4}=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -5 & 10 & -2 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz *X*

$$X=A\cdot A^t\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -5 & 10 & -2 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 8 \\ 0 & 8 & 34 \end{pmatrix}\cdot\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -5 & 10 & -2 \\ 3 & -6 & 2 \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 20 & -4 \\ 13 & -18 & 10 \\ 62 & -124 & 52 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 5 & -1 \\ \frac{13}{4} & -\frac{9}{2} & \frac{5}{2} \\ \frac{31}{2} & -31 & 13 \end{pmatrix}$$

Tres institutos piden presupuesto de alojamiento en Roma en dos agencias de viajes, que les dan el precio por noche según tipo de habitación, individual, doble y triple.
La primera agencia ofrece los siguientes precios: individual a 65 euros, doble a 85 euros y triple a 104 euros. La segunda agencia oferta la individual a 78 euros, la doble a 83 euros y la triple a 106 euros. El primer instituto necesita tres habitaciones individuales, quince dobles y dos triples, el segundo dos individuales, doce dobles y cinco triples y el tercer instituto una individual, dieciséis dobles y siete triples.
a) (1 punto) Exprese, mediante una matriz A, los precios de las dos agencias según el tipo de habitación y con otra matriz D la demanda de los tres institutos.
b) (1 punto) Mediante operaciones con las matrices anteriores, calcule el precio por noche que cada agencia facilita a los distintos institutos por el total de habitaciones solicitadas. ¿Qué agencia le interesa a cada instituto?
c) (0'5 puntos) ¿Existe inversa de la matriz D? ¿Y de la matriz A? Justifique las respuestas.
SOCIALES II. 2020 SEPTIEMBRE EJERCICIO A1

R E S O L U C I Ó N

a) Llamamos: $A_1 = Agencia\ 1$; $A_2 = Agencia\ 2$
$In = Individual$; $Do = Doble$; $Tr = Triple$
$I_1 = Instituto 1$; $I_2 = Instituto 2$; $I_3 = Instituto\ 3$

Las matrices que nos piden son:

$$A = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} In & Do & Tr \end{array} \\ \begin{pmatrix} 65 & 85 & 104 \\ 78 & 83 & 106 \end{pmatrix} \end{array} \qquad D = \begin{array}{c} \\ In \\ Do \\ Tr \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} I_1 & I_2 & I_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 15 & 12 & 16 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} \end{array}$$

b) Calculamos la matriz $A \cdot D$

$$A \cdot D = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} In & Do & Tr \end{array} \\ \begin{pmatrix} 65 & 85 & 104 \\ 78 & 83 & 106 \end{pmatrix} \end{array} \cdot D = \begin{array}{c} \\ In \\ Do \\ Tr \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} I_1 & I_2 & I_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 15 & 12 & 16 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} I_1 & I_2 & I_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1678 & 1670 & 2153 \\ 1691 & 1682 & 2148 \end{pmatrix} \end{array}$$

Vemos que al Instituto 1 e Instituto 2, le interés la Agencia 1. Mientras que al Instituto 3 le interesa la Agencia 2.

c) La matriz A no tiene inversa ya que no es cuadrada.

Calculamos el determinante de la matriz D

$$|D| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 15 & 12 & 16 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = 252 + 64 + 75 - 24 - 210 - 240 = -83 \neq 0 \Rightarrow \text{Si tiene inversa}$$