PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

2020

MATEMÁTICAS II

TEMA 3: ESPACIO AFIN Y EUCLIDEO

- Junio, Ejercicio 4
- Junio, Ejercicio 8
- Reserva 1, Ejercicio 4
- Reserva 1, Ejercicio 8
- Septiembre, Ejercicio 4
- Septiembre, Ejercicio 8

Siendo $a \neq 0$, considera las rectas

$$r \equiv x-1 = y-2 = \frac{z-1}{a} \quad \text{y} \quad s \equiv \frac{x-3}{-a} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{2}$$

a) (1’25 puntos) Estudia la posición relativa de ambas rectas según los valores de *a*.
b) (1’25 puntos) Para $a = 2$, determina las ecuaciones de la recta que pasa por el punto de corte de *r* y *s* y es perpendicular a ambas.
MATEMÁTICAS II. 2020. JUNIO. EJERCICIO 4

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos un punto y vector director de cada recta.

$$r \equiv x-1 = y-2 = \frac{z-1}{a} \Rightarrow A = (1,2,1)\ ;\ \vec{u} = (1,1,a)$$

$$s \equiv \frac{x-3}{-a} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{2} \Rightarrow B = (3,3,-1)\ ;\ \vec{v} = (-a,-1,2)$$

Calculamos el vector $\overrightarrow{AB} = (2,1,-2)$ y averiguamos el rango de la matriz formada por los vectores $\vec{u}, \vec{v}\ y\ \overrightarrow{AB}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ -a & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2+4-a^2+2a-2a-2 = 4-a^2 = 0 \Rightarrow a = \pm 2$$

Si $a \neq \pm 2 \Rightarrow Rango(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}) = 3 \Rightarrow$ Las rectas se cruzan.

Si $a = \pm 2 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow Rango(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}) = 2 \Rightarrow$ Las rectas son secantes.

b) Calculamos el punto de corte de las dos rectas

$$r \equiv x-1 = y-2 = \frac{z-1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+t \\ z = 1+2t \end{cases} \qquad s \equiv \frac{x-3}{-2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 3-2\lambda \\ y = 3-\lambda \\ z = -1+2\lambda \end{cases}$$

Igualando tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} 1+t = 3-2\lambda \\ 2+t = 3-\lambda \\ 1+2t = -1+2\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow t = 0\ ;\ \lambda = 1 \Rightarrow \text{Punto de corte: } (1,2,1)$$

Calculamos el vector director de la recta que es perpendicular a $\vec{u}\ \ y\ \ \vec{v}$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2\vec{i} - 4\vec{j} - \vec{k} + 2\vec{k} - 2\vec{j} + 2\vec{i} = (4,-6,1)$$

Luego, la recta es: $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y-2}{-6} = \dfrac{z-1}{1}$

Se considera el punto $A(1,-2,0)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x+y=0 \\ y-3z+2=0 \end{cases}$

a) (1'25 puntos) Calcula la ecuación del plano que pasa por *A* y es perpendicular a *r*.

b) (1'25 puntos) Calcula la ecuación del plano que pasa por *A* y contiene a *r*.

MATEMÁTICAS II. 2020. JUNIO. EJERCICIO 8

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta a paramétricas y calculamos un punto y su vector director.

$$r \equiv \begin{cases} x+y=0 \\ y-3z+2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2-3t \\ y=-2+3t \Rightarrow B=(2,-2,0)\ ;\ \vec{u}=(-3,3,1) \\ z=t \end{cases}$$

El vector normal del plano que nos piden es el mismo que $\vec{u}=(-3,3,1)$. Luego, el plano tendrá de ecuación

$$-3x+3y+z+D=0$$

Como tiene que pasar por el punto $A(1,-2,0)$, sustituimos para calcular D

$$-3\cdot 1+3\cdot(-2)+0+D=0 \Rightarrow D=9 \Rightarrow -3x+3y+z+9=0$$

b) El plano que nos piden viene definido por: $A(1,-2,0)$; $\overrightarrow{AB}=(1,0,0)$ y $\vec{u}=(-3,3,1)$. Luego, la ecuación general del plano será:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & -3 \\ y+2 & 0 & 3 \\ z & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3z-y-2=0 \Rightarrow y-3z+2=0$$

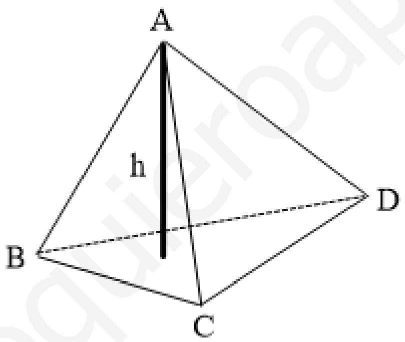
Considera el tetraedro de vértices $A(0,0,0)$, $B(1,1,0)$, $C(0,1,3)$ y $D(1,0,3)$.
a) (1 punto) Calcula el volumen de dicho tetraedro.
b) (1'5 puntos) Calcula la medida de la altura trazada desde el vértice *A* de dicho tetraedro.
MATEMÁTICAS II. 2020. RESERVA 1. EJERCICIO 4

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos los vectores $\vec{AB}=(1,1,0)$; $\vec{AC}=(0,1,3)$ y $\vec{AD}=(1,0,3)$. El volumen del tetraedro será:

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 3\\ 1 & 0 & 3\end{vmatrix}=\frac{1}{6}|6|=1\,u^3$$

b)



La medida de la altura será la distancia del punto *A* al plano de vértices *B*,*C* y *D*.

Calculamos los vectores $\vec{BD}=(0,-1,3)$, $\vec{BC}=(-1,0,3)$. La ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix}x-1 & 0 & -1\\ y-1 & -1 & 0\\ z & 3 & 3\end{vmatrix}=0 \Rightarrow -3x-3y-z+6=0$$

Calculamos la distancia del punto *A* a dicho plano

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|-3\cdot 0-3\cdot 0-1\cdot 0+6|}{\sqrt{(-3)^2+(-3)^2+(-1)^2}}=\frac{6}{\sqrt{19}}=1'376\,u$$

Se considera los puntos $A(-1,3,2)$, $B(2,-1,-1)$ y $C(a-2,7,b)$.

a) (1'25 puntos) Determina a y b para que los puntos A,B y C estén alineados.

b) (1'25 puntos) En el caso $a=b=1$, halla la recta que pasa por el origen de coordenadas y es perpendicular al plano que contiene los puntos A,B y C

MATEMÁTICAS II. 2020. RESERVA 1. EJERCICIO 8

R E S O L U C I Ó N

a) Si los puntos están alineados, entonces los vectores $\overrightarrow{AB}(3,-4,-3)$ y $\overrightarrow{AC}(a-1,4,b-2)$ tienen que ser proporcionales, luego:

$$\frac{3}{a-1}=\frac{-4}{4}=\frac{-3}{b-2}\Rightarrow\begin{cases}3=-a+1\Rightarrow a=-2\\ -b+2=-3\Rightarrow b=5\end{cases}.$$

b) Calculamos los vectores: $\overrightarrow{AB}(3,-4,-3)$ y $\overrightarrow{AC}(0,4,-1)$. El vector director de la recta es el vector normal del plano, luego:

$$\vec{u}=\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -4 & -3\\ 0 & 4 & -1\end{vmatrix}=16\vec{i}+3\vec{j}+12\vec{k}=(16,3,12)$$

Por lo tanto la recta que nos piden es: $\dfrac{x}{16}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{12}$

Considera el plano $\pi \equiv x - y + az = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} 4x - 3y + 4z = 1 \\ 3x - 2y + z = 0 \end{cases}$

a) (1'5 puntos) Halla *a* sabiendo que π es paralelo a *r*.

b) (1 punto) Determina el plano perpendicular a *r* que pasa por el punto $P(1,2,3)$.

MATEMÁTICAS II. 2020. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4

R E S O L U C I Ó N

a) El vector normal del plano es $\vec{n} = (1,-1,a)$. Calculamos el vector director de la recta

$$\vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -3 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -3\vec{i} + 12\vec{j} - 8\vec{k} + 9\vec{k} - 4\vec{j} + 8\vec{i} = 5\vec{i} + 8\vec{j} + \vec{k} = (5,8,1)$$

Si el plano y la recta son paralelos, los vectores $\vec{u}$ y $\vec{n}$ son perpendiculares, luego, su producto escalar vale cero

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 5 - 8 + a = 0 \Rightarrow a = 3$$

b) Si el plano y la recta son perpendiculares, el vector director de la recta $\vec{u} = (5,8,1)$, es el vector normal del plano, luego:

$$5x + 8y + z + D = 0$$

Como pasa por el punto $P(1,2,3)$, entonces:

$$5 \cdot 1 + 8 \cdot 2 + 3 + D = 0 \Rightarrow D = -24$$

Por lo tanto, el plano que nos piden tiene de ecuación: $5x + 8y + z - 24 = 0$

Considera el plano $\pi \equiv x-y+z=2$ y la la recta $r \equiv \frac{x}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+2}{-1}$

a) (1 punto) Calcula la distancia entre *r* y π .

b) (1’5 puntos) Halla la ecuación general del plano perpendicular a π que contiene a *r*.

MATEMÁTICAS II. 2020. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 8

R E S O L U C I Ó N

a) El vector normal del plano $\vec{n}=(1,-1,1)$ y el vector director de la recta $\vec{u}=(2,1,-1)$, son perpendiculares ya que:

$$\vec{n}\cdot\vec{u}=(1,-1,1)\cdot(2,1,-1)=2-1-1=0$$

Luego, la recta y el plano son paralelos. Por lo tanto, la distancia viene dada por la distancia de un punto de la recta $A=(0,-1,-2)$ al plano.

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|1\cdot 0-1\cdot(-1)+1\cdot(-2)-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}\ u$$

b) El plano que nos piden viene definido por $A=(0,-1,-2)$ y los vectores $\vec{n}=(1,-1,1)$ y $\vec{u}=(2,1,-1)$. Luego su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ y+1 & -1 & 1 \\ z+2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 3y+3z+9=0 \Rightarrow y+z+3=0$$