OPCIÓN A

E1.- a) Discutir según los valores del parámetro **m** el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+y+mz=4 \end{cases}$$ **(1 punto)**

b) Resolverlo para el caso **m = 1 (1 punto)**

a) El sistema solo puede ser Compatible Indeterminado e Incompatible ya que tiene menos ecuaciones que incógnitas

$$|A| = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} \end{vmatrix} = \mathbf{1-2=-1} \to \forall m \in R \to rang\ (A) = 2 < Número\ de\ incógnitas \to Comaptible\ Indeterminado$$

b)

$\boldsymbol{S}$i m = 1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \end{array}\right) \to -y+3z=2 \to y=-2+3z \to x-2+3z-z=1 \to x=3-2z$$

$$\boldsymbol{Solución} \to (\boldsymbol{x}\,,\quad \boldsymbol{y}\,,\quad \boldsymbol{z}) = (\mathbf{3-2}\boldsymbol{\alpha}\,,\quad \mathbf{-2+3}\boldsymbol{\alpha}\,,\quad \boldsymbol{\alpha})$$

E2.- a) Consideremos los vectores $\vec{u}=(1\,,\quad 1,\quad a)$ y $\vec{v}=(1\,,\quad -1,\quad a)$ Calcular **a** para que sean perpendiculares. **(0,5 puntos)**

b) Calcular un vector unitario perpendicular a los vectores $\vec{p}=(1\,,\quad 2,\quad 3)$ y $\vec{q}=(1\,,\quad -2,\quad -3)$ **(1,5 puntos)**

a) Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es nulo

$$\vec{u}.\vec{v}=0 \to (1\,,\quad 1,\quad a).(1\,,\quad -1,\quad a)=0 \to 1-1+a^2=0 \to a=0$$

b) El vector $\vec{w}$ perpendicular a dos vectores es el resultante del producto vectorial de ambos vectores. El vector unitario se halla dividiendo cada uno de sus componentes entre su módulo.

$$\vec{w}=\vec{p}\times\vec{q}=\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -6\vec{\imath}+3\vec{\jmath}-2\vec{k}-\vec{2}k+6\vec{\imath}+3\vec{\jmath}=6\vec{\jmath}-4\vec{k} \to |\vec{w}|=\sqrt{6^2+(-4)^2}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$$

$$\vec{w}=(0\,,\quad 6,\quad -4) \to ||\vec{w}|| = \left(0\,,\quad \frac{6}{2\sqrt{13}},\quad -\frac{4}{2\sqrt{13}}\right) = \left(0\,,\quad \frac{3\sqrt{13}}{13},\quad -\frac{2\sqrt{13}}{13}\right)$$

E3.- Dada la función $f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x, & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 4x, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

a) Probar que posee un máximo relativo en -1 y un mínimo relativo en 2. **(1,4 puntos)**
b) Probar que no posee extremo relativo en 0. (**0,6 puntos)**

a)
Probar que posee un máximo relativo en -1 y un mínimo relativo en 2.

Sabemos que si $f'(b) = 0$ y $f''(b) < 0$, $x = b$ es un máximo de $f(x)$.
Análogamente si $f'(b) = 0$ y $f''(b) > 0$, $x = b$ es un mínimo de $f(x)$.

Como $x = -1 < 0$, nuestra función es $f(x) = -x^2 - 2x$.
Tenemos $f'(x) = -2x - 2$, $f''(x) = -2$.
Como $f'(-1) = -2(-1) - 2 = 0$ y $f''(-1) = -2 < 0$, **efectivamente x =-1 es un máximo relativo de f(x).**

Como $x = 2 > 0$, nuestra función es $f(x) = x^2 - 4x$.
Tenemos $f'(x) = 2x - 4$, $f''(x) = 2$.
Como $f'(2) = 2(2) - 4 = 0$ y $f''(2) = 2 > 0$, **efectivamente x = 2 es un mínimo relativo de f(x).**

b)
Probar que no posee extremo relativo en 0.

Aunque la función es continua en x = 0, no es derivable en x = 0. Estudiamos su monotonía en x = 0 y veremos que x = 0 no es un máximo relativo.

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 - 2x, & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 4x, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}, \quad f'(x) = \begin{cases} -2x - 2, & \text{si } x < 0 \\ 2x - 4, & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

Vemos la continuidad de la derivada.

Como $f'(0-) = \lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} (-2x - 2) = -2 < 0$, f(x) es estrictamente decreciente $(\searrow)$ en x = 0-.
Como $f'(0+) = \lim_{x \to 0-} f(x) = \lim_{x \to 0-} (2x - 4) = -4 < 0$, f(x) es estrictamente decreciente $(\searrow)$ en x = 0+, por tanto **en x = 0 la función es estrictamente decreciente y no tiene un máximo relativo en x = 0.**

E4.- a) Calcular $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(x)}{e^x - \cos(x)}$ **(1 punto)**

b) Calcular a siendo a > 1, para que el área de la región del plano comprendida entre las gráficas de las funciones f(x) = x, g(x) = ax y x = 1 sea 1. **(1 punto)**

a) Calcular $\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(x)}{e^x - \cos(x)}$

Le aplicamos la regla de L'Hôpital (L'H).- (si "f" y "g" son funciones continuas en [a -δ, a + δ], derivables en (a -δ, a + δ), verificando que f(a) = g(a) = 0 y $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$, entonces si existe $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ se verifica que $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$. La regla es válida si tenemos ∞/∞, y también si x→∞), con lo cual tenemos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{sen}(x)}{e^x - \cos(x)} = \left\{\frac{\text{sen}(0)}{e^0 - \cos(0)} = \frac{0}{0}; L'H\right\} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{e^x + \text{sen}(x)} = \frac{\cos(0)}{e^0 - \text{sen}(0)} = \frac{1}{1-0} = 1.$$

b)

Calcular a siendo a > 1, para que el área de la región del plano comprendida entre las gráficas de las funciones f(x) = x, g(x) = ax y x = 1 sea 1.

Para calcular el área entre dos funciones tenemos que calcular los límites de integración, igualando las funciones.

De f(x) = g(x) tenemos x = ax → x – ax = 0 = x(1 – a), de donde x = 0 y a = 1, lo cual es absurdo porque nos dicen que a > 1, luego **no existe ningún valor de a que cumpla las condiciones del enunciado**.

E5.- La temperatura del cuerpo humano sigue una distribución normal de media 37ºC y desviación típica 0,5ºC.

a) Calcular la probabilidad de que la temperatura de una persona esté comprendida entre 36ºC y 38ºC **(1 punto)**

b) Calcular la probabilidad de que la temperatura de una persona sea menor que 36,5ºC. **(1 punto)**

Se trata de una distribución normal N(37,0'5). Calculemos las probabilidades pedidas:

a)

Calcular la probabilidad de que la temperatura de una persona esté comprendida entre 36ºC y 38ºC.

Me piden **p(36 ≤ X ≤ 38) =** $p\left(\frac{36 - 37}{0'5} \le Z \le \frac{38 - 37}{0'5}\right)$ = p(-2 < Z ≤ 2) =

= p(Z ≤ 2) - p(Z ≤ -2) = p(Z ≤ 2) - [1 - p(Z ≤ 2)] = 2·p(Z ≤ 2) – 1 = 2·0'9772 – 1 **= 0'9544**.

b)

Calcular la probabilidad de que la temperatura de una persona sea menor que 36,5ºC.

Me piden **p(X ≤ 5) =** $p\left(Z \le \frac{36'5 - 37}{0'5}\right)$ = p(Z ≤ -1) = 1 - p(Z ≤ 1) = 1 - 0'8413 **= 0'1587**.

OPCIÓN B

E1.- Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $M=\begin{pmatrix}x & 0\\ y & 1\\ x-y & 1\end{pmatrix}$ y $N=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$ calcular los valores de x e y, para que el producto AM sea igual a la inversa de la matriz N **(2 puntos)**

1) Una matriz es invertible cuando el su matriz no es nula

$$AM=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x & 0\\ y & 1\\ x-y & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x-y & 1\\ -x+y & 1\end{pmatrix}$$

$$|N|=\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=2-1=1\neq 0\rightarrow Existe\ N^{-1}\rightarrow N^{-1}=\frac{1}{|N|}.adj\ N^t\rightarrow\ N^t=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\rightarrow$$

$$adj\ N^t=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\rightarrow N^{-1}=\frac{1}{1}.\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$AM=N^{-1}\rightarrow\begin{pmatrix}2x-y & 1\\ -x+y & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{cases}2x-y=2\\ -x+y=1\end{cases}\rightarrow x=3\rightarrow -3+y=1\rightarrow y=4$$

E2.- Hallar **a** y **b** para que los vectores (a ,−1 , 2) y (1 , b , −2) sean perpendiculares y las dos primeras coordenadas de su producto vectorial sean iguales. **(2 puntos)**

Para que sean perpendiculares su producto escalar es nulo

$$(a\ ,\quad -1,\quad 2).(1\ ,\quad b,\quad -2)=0\rightarrow a-b-4=0$$

$$\begin{vmatrix}\vec{\boldsymbol{i}} & \vec{\boldsymbol{j}} & \vec{\boldsymbol{k}}\\ \boldsymbol{a} & \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{2}\\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{b} & \boldsymbol{-2}\end{vmatrix}=\boldsymbol{2\vec{i}+2\vec{j}+ab\vec{k}+\vec{k}-2b\vec{i}+2a\vec{j}=(2-2b)\vec{i}+(2+2a)\vec{j}+(1+ab)\vec{k}}\rightarrow$$

$$(2-2b,2+2a,1+ab)\rightarrow 2-2b=\ 2+2a\rightarrow a=-b\rightarrow a+a-4=0\rightarrow 2a=4\rightarrow a=4\rightarrow b=-4$$

E3.- a) Enunciar el teorema de Rolle. **(1 punto)**

b) Indicar un punto en el que la función f(x) = 2x – sen x tome el valor 0, y demostrar (o bien usando el teorema del apartado previo o bien con algún otro razonamiento) que esta función sólo se anula en ese punto. **(1 punto)**

a) Teorema de Rolle

Sea **f(x)** una función continua en **[a , b],** derivable en **(a , b)** y que verifica que **f(a) = f(b);** entonces existe, al menos, un punto $c\in(a\ ,b)$ tal que **f'(c) = 0**

b) Se cumple en x = 0 ya que $f(0)=2.0-sen\ 0=0-0=0$

Además es una función continua en todo el campo de los números reales sin máximos y mínimos relativos en ya que $f'(x)=2-\ \cos x\rightarrow Si\ f'(x)=0\rightarrow 2-\ \cos x=0\rightarrow\cos x=2\rightarrow Sin\ solución$

Continuación del Problema E.3 de la opción B

b) Continuación

Como además $\begin{cases} \lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty \\ \lim_{x\to \infty} f(x) = \infty \end{cases}$ la función es creciente en todo su recorrido por lo tanto el único punto de corte de la función con el eje OX es en **x = 0**

E4.- Determínense los valores de **a** y de **b** para los cuales la función definida por:

$f(x) = \begin{cases} a + \cos x, & si \ x \le 0 \\ x^2 - 2bx + 1, & si \ x > 0 \end{cases}$, es continua y verifica que $\int_0^1 f(x)\, dx = \frac{1}{3}$ **(2 puntos)**

$$\begin{cases} f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = a + \cos 0 = a + 1 \\ \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0^2 - 2b.0 + 1 = 1 \end{cases} \to f(0) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) \to a + 1 = 1 \to a = 0$$

$$\int_0^1 (x^2 - 2bx + 1)\, dx = \frac{1}{3} \to \left[\frac{1}{3}x^3 - 2.\frac{1}{2}.bx^2 + x\right]\begin{matrix}1\\0\end{matrix} = \frac{1}{3}$$

$$\left(\frac{1}{3}1^3 - b.1 + 1\right) - \left(\frac{1}{3}0^3 - b.0 + 0\right) = \frac{1}{3} \to \frac{1}{3} - b + 1 = \frac{1}{3} \to -b + 1 = 0 \to b = 1$$

E5.- En una empresa de alquiler de vehículos con conductor**:**

- Trabajan 50 conductores de menos de 45 años, de los cuales 15 hablan inglés.
- Trabajan 30 conductores de entre 45 y 55 años, de los cuales 6 hablan inglés.
- Trabajan 20 conductores de más de 55 años, de los cuales 3 hablan inglés.

Considerando los sucesos: **A** = “tener menos de 45 años”, **B** = “tener entre 45 y 55 años”, **C** = “tener más de 55 años” e **I** = “hablar inglés”:

a) Calcular **P(I / A), P(I / B) , P(I / C) (0,9 puntos)**

b) Si se elige al azar un conductor, y éste habla inglés, ¿cuál es la probabilidad de que tenga menos de 45 años? **(1,1 puntos)**

Tenemos conductores 50 + 30 + 20 = 100, luego p(A) = 50/100 = 0’5, p(B) = 30/100 = 0’3 y p(C) = 0’2**.**
Tenemos que hablan inglés 15 + 6 + 3 = 24**.**

a)

Calcular **P(I / A)**, **P(I / B) y P(I / C)**

Las probabilidades que piden nos las dan directamente:
P(I / A) =15/50 **= 0’3.**
P(I / B) = 6/30 **= 0’2.**
P(I / C) = 3/20 **= 0’15.**

b)

Si se elige al azar un conductor, y éste habla inglés, ¿cuál es la probabilidad de que tenga menos de 45 años?

Me piden **p(A/I).** Aplicando el teorema de Bayes, tenemos:

p(A/I) = $\frac{p(A \cap I)}{p(I)} = \frac{p(A).p(I/A)}{p(I)} = \frac{p(A).p(I/A)}{p(A).p(I/A) + p(B).p(I/B) + p(C).p(I/C)}$ **=**

= $= \frac{(0'5).(0'3)}{(0'5)\cdot(0'3) + (0'3)\cdot(0'2) + p(0'2)\cdot(0'15)}$ **= 5/8 = 0’625**.