Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y la Salud	
Soluciones	**Julio de 2018**

OPCIÓN A

Problema 1. a) La matriz *B* ampliada del sistema es: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & a-1 & 1 & 0 \\ 1 & a & a-1 & a \end{pmatrix}$.

Como $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a-1 & 1 \\ 1 & a & a-1 \end{vmatrix} = a^2 - 3a + 2 = (a-1)(a-2)$, si $a \neq 1 \wedge a \neq 2$ entonces $r(A) = r(B) = 3$ y el sistema es compatible y determinado.

Si $a = 1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, de donde se obtienen los determinantes $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Entonces $r(A) = r(B) = 2$ y el sistema es compatible e indeterminado.

Si $a = 2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, de donde se obtienen los determinantes $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Entonces $r(A) = 2$ y $r(B) = 3$ y el sistema es incompatible.

b) El sistema indeterminado es $\begin{cases} x + y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow (x, 1-x, 0) \quad \forall x \in \Re$.

c) Si $a = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ aplicando el método de Gauss. Se obtiene la solución $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$.

Problema 2. Expresamos la recta *s* en paramétricas: $\begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases}$.

a) Obtenemos el plano σ paralelo a al plano π que pasa por el punto *A*. Ese plano contendrá a la recta pedida, pues el plano y la recta dados no son paralelos (se cortan), ya que el vector de la recta y el vector normal del plano no son perpendiculares: $(2,1,0)\cdot(1,-1,1) = 1 \neq 0$.

$x - y + z + D = 0 \rightarrow 1 - 1 + 1 + D = 0 \rightarrow D = -1$. El plano es $x - y + z - 1 = 0$.

Se determina el punto de corte de la recta con el plano σ:

$2t - t + 0 - 1 = 0 \rightarrow t = 1 \rightarrow P(2,1,0)$. La recta pedida pasará por los puntos *A* y *P*. Como $\overrightarrow{AP} = (2,1,0) - (1,1,1) = (1,0,-1)$ su ecuación es $\begin{cases} x = 1 + s \\ y = 1 \\ z = 1 - s \end{cases}$.

b) El plano buscado es perpendicular al plano π y es paralelo a la recta *s*, por tanto su vector normal es perpendicular al vector normal del plano π. Por tanto, su ecuación es: $\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -x + 2y + 3z - 4 = 0$.

c) La recta es $\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 3 + t \\ z = 1 \end{cases}$. Sustituyendo el punto $(3,2,1)$ se tiene: $\begin{cases} 3 = 5 + 2t \\ 2 = 3 + t \\ 1 = 1 \end{cases}$.

$t = 1$ es la solución en ambas ecuaciones y por tanto el punto es de la recta.

Problema 3. a) $f(1) = a + b - c = 22$

b) $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c\cdot\cos(\pi x) - c\pi\cdot sen(\pi x)$ y como la tangente ha de ser horizontal: $f'(1) = 0$. Por tanto $3a + 2b + c = 0$.

c) Calculamos primero la integral por partes:

$\int x\cdot\cos(\pi x)dx = \frac{x}{\pi}sen(\pi x) - \frac{1}{\pi}\int sen(\pi x)dx = \frac{x}{\pi}sen(\pi x) + \frac{1}{\pi^2}\cos(\pi x)$. Calculamos:

$$\int_0^1 x\cdot\cos(\pi x)dx = \left.\frac{x}{\pi}sen(\pi x) + \frac{1}{\pi^2}\cos(\pi x)\right|_0^1 = -\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{\pi^2} = -\frac{2}{\pi^2}.$$

OPCIÓN B

Problema 1 a) $A^2 = AA = (AB)(AB) = A(BA)B = (AB)B = AB = A$.

$B^2 = BB = (BA)(BA) = B(AB)A = (BA)A = BA = A$.

b) $B^2 = B \to \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ a+b & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$. De la igualdad de matrices se debe cumplir: $\begin{cases} a^2 = a \\ a+b = 1 \\ b^2 = b \end{cases} \to \begin{cases} a = 0 \wedge b = 1 \\ a = 1 \wedge b = 0 \end{cases}$. Como además se debe cumplir:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to a \neq 1.$$

$$BA = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} \to b \neq 0.$$

Los valores pedidos son $a = 1$ y $b = 0$.

c) $\begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 \\ 2y & 2 & 1 \\ 2z & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 2 & 1 \\ z & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 = 6.$ $\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 0 \\ y+3 & 2 & 1 \\ z+5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 2 & 1 \\ z & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3$ pues si a la 1ª columna se le resta la 2ª y la 3ª, el determinante no varía.

Problema 2. a) Llamando $y = t$ se obtiene $\begin{cases} x + y = 3 \\ x + 4y - z = 8 \end{cases} \to \begin{cases} x = 3 - t \\ y = t \\ z = -5 + 3t \end{cases}$.

b) El plano tiene de vectores directores: $\vec{u} = (1,1,3)$ y $\vec{v} = (5,0,1) - (4,1,0) = (1,-1,1)$.

La ecuación del plano es: $\begin{vmatrix} x-5 & y & z-1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \to x + y - 5 = 0$.

c) El punto $A(3,0,-5)$ pertenece a la recta *r.* La distancia de la recta al plano es:

$$d(r,\pi) = d(A,\pi) = \frac{|3+0-5|}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Problema 3. a) Como $xy = 600$, siendo *x* la base, se tiene $y = \dfrac{600}{x}$.

El área de la cartulina es:

$$A(x) = (x+4)(y+6) = xy + 4y + 6x + 24 = 4\frac{600}{x} + 6x + 624 = \frac{2400}{x} + 6x + 624.$$

b) $A'(x) = \frac{-2400}{x^2} + 6 = 0 \rightarrow 2400 = 6x^2 \rightarrow x = 20$.

Como $A''(x) = \frac{4800}{x^3} \rightarrow A''(20) > 0$ y presenta un mínimo.

c) Las dimensiones de la cartulina son:

base $x + 4 = 20 + 4 = 24$ y altura $y + 6 = \frac{600}{20} + 6 = 30 + 6 = 36$.