Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y la Salud	
Soluciones	**Junio de 2018**

OPCIÓN A

Problema 1. a) El determinante del sistema $\begin{cases} y - z = 1 - a \\ -x + z = 5 \\ -ax + y - z = 1 \end{cases}$ es: $\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -a & 1 & -a \end{vmatrix} = -a$,

El sistema es compatible y determinado para $\forall a \in \Re - \{0\}$ pues *r(A)=r(B)=3.*

b) Para $a = 3$ se puede aplicar la regla de Cramer:

$$x = \frac{1}{-3}\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -1,\ y = \frac{1}{-3}\begin{vmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 2,\ z = \frac{1}{-3}\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 5 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 4$$

c) Para $a = 0$ se obtiene la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y el sistema es compatible e indeterminado pues $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$ y $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$ y *r(A)=r(B)=2<3.*

Las ecuaciones: $\begin{cases} y - z = 1 \\ -x + z = 5 \end{cases}$ dan las soluciones $(-5 + z, 1 + z, z)$.

Problema 2. a) Si AC es la hipotenusa, los vectores $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BC}$ han de ser perpendiculares: $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = (-3, -1, \lambda - 5) \cdot (1, 2, -2) = 0 \to \lambda = 5/2$.

b) El área del triángulo para $\lambda = 6$ es:

$$A = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}\right| = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{2}\left|(0, -5, -5)\right| == 5\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

c) Como el vector normal del plano ha de ser paralelo a $\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC}$, se puede escoger el vector $\vec{n} = (0,1,1)$. La ecuación del plano pertenecerá al haz $y + z + D = 0$ y al pasar por $B(2,3,5)$, se tiene $3 + 5 + D = 0$ y el plano será $y + z - 8 = 0$.

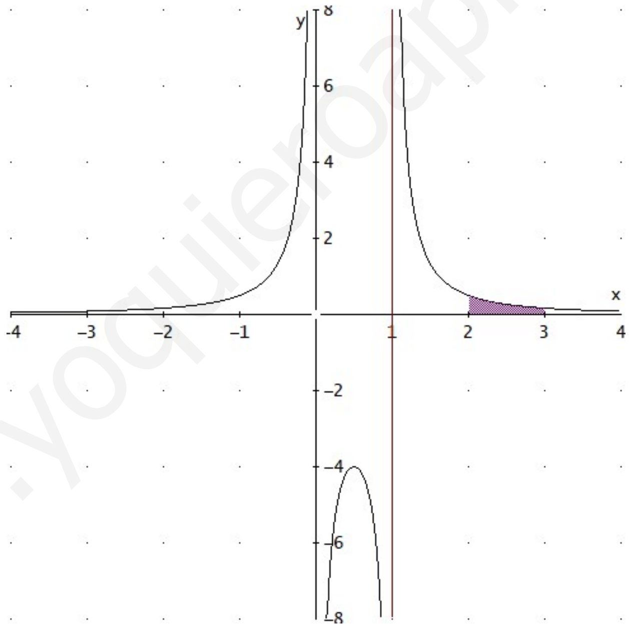
Problema 3.

a) Dominio: $D = \Re - \{0,1\}$. Asíntotas verticales: $x = 0$ y $x = 1$. Asíntota horizontal: $y = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2 - x} = 0$.

b) Derivando: $y' = \frac{1-2x}{(x^2-x)^2}$, se anula $x = 1/2$. Los intervalos son: $(-\infty,0)$ $y' > 0$ creciente; $(0,1/2)$ $y' > 0$ creciente; $(1/2,1)$ $y' < 0$ decreciente; $(1,\infty)$ $y' < 0$ decreciente.

c) $\frac{1}{x^2-x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} \to 1 = A(x-1) + Bx$. Dando a *x* los valores *0* y *1* se obtiene: $A = -1$ y $B = 1$. Por tanto el área limitada será:

$$\int_2^3 \frac{1}{x^2-x} dx = -\int_2^3 \frac{1}{x} dx + \int_2^3 \frac{1}{x-1} dx = -\ln|x|\Big|_2^3 + \ln|x-1|\Big|_2^3 = 2\ln 2 - \ln 3 \approx 0.2877 .$$



OPCIÓN B

Problema 1 a) $A^2+2A=A(A+2I)=3I \to A\left[\frac{1}{3}(A+2)\right]=I \to A^{-1}=\frac{1}{3}A+\frac{2}{3}I$

y por tanto: $a=\frac{1}{3}$ y $b=\frac{2}{3}$.

b) Como $A^2=3I-2A$, se tiene que:

$A^4=A^2A^2=(3I-2A)(3I-2A)=9I-12A+4A^2=9I-12A+4(3I-2A)=-20A+21I$
y por tanto: $\alpha=-20$ y $\beta=21$.

c) $\left|2B^{-1}\right|=2^3\left|B^{-1}\right|=\frac{8}{|B|}=\frac{8}{2}=4$

Problema 2. a) La recta *s* estará en el plano perpendicular a *r* y por tanto pertenece al haz: $-x+3y+2z+D=0$. Como tiene que pasar por el punto $A(5,7,3)$, el plano será: $-5+3\cdot7+2\cdot3+D=0 \to D=-22 \to -x+3y+2z-22=0$.

Se obtiene el punto *P* de corte del plano con la recta $r\equiv\begin{cases}3-t\\-1+3t\\2t\end{cases}$:

$-(3-t)+3(-1+3t)+2(2t)-22=0 \to t=2 \to P(1,5,4)$. La recta pedida pasa por $A(5,7,3)$ y $P(1,5,4)$. Como $\overrightarrow{AP}=(-4,-2,1)$, su ecuación es: $s\equiv\begin{cases}5-4s\\7-2s\\3+s\end{cases}$.

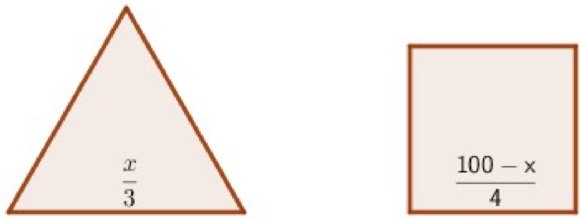
b) $d(A,r)=d(A,P)=\left|\overrightarrow{AP}\right|=\sqrt{16+4+1}=\sqrt{21}$.

c) El plano π pertenece al haz $-x+3y+2z+D=0$, pero al pasar por $(3,-1,0)$ será: $-3+3\cdot(-1)+2\cdot0+D=0 \to D=6 \to -x+3y+2z+6=0$. Entonces se tiene:

$d(B,\pi)=\frac{|-1+3+2+6|}{\sqrt{1+9+4}}=\frac{10}{\sqrt{14}}$.

Problema3. a) Observando la figura se obtiene el área del triángulo equilátero en función de x: $A_T=\frac{b\cdot h}{2}=\frac{\left(\frac{x}{3}\right)\left(\frac{x}{2\sqrt{3}}\right)}{2}=\frac{x^2}{12\sqrt{3}}$, ya que $h=\sqrt{\left(\frac{x}{3}\right)^2-\left(\frac{x}{6}\right)^2}=\frac{x}{2\sqrt{3}}$.

Análogamente se obtiene el área del cuadrado: $A_C = l^2 = \left(\dfrac{100-x}{4}\right)^2$.



La función de la suma de áreas es: $f(x) = \dfrac{x^2}{12\sqrt{3}} + \left(\dfrac{100-x}{4}\right)^2$ con $0 \le x \le 100$.

b) $f'(x) = \dfrac{2x}{12\sqrt{3}} + \dfrac{2(100-x)(-1)}{16} = 0 \rightarrow x = \dfrac{300\sqrt{3}}{4+3\sqrt{3}} \approx 56{,}50$ y es el mínimo ya que:

$f'(x) < 0 \ si \ x < 56{,}50$ y $f'(x) > 0 \ si \ x > 56{,}50$ y $f(0) = 625$ y $f(100) = 481{,}12$.

c) Como $f(0) = 625$, el máximo se alcanza cuando todo el alambre se utiliza para construir el cuadrado.