Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y la Salud	
Soluciones	**Julio de 2019**

OPCIÓN A

Problema 1. a) Resolviendo por el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix}1 & -2 & 2 & 5\\ 2 & 0 & 3 & \alpha\\ 3 & -1 & 5 & \alpha+1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & -2 & 2 & 5\\ 0 & 4 & -1 & \alpha-10\\ 0 & 5 & -1 & \alpha-14\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & -2 & 2 & 5\\ 0 & 4 & -1 & \alpha-10\\ 0 & 1 & 0 & -4\end{pmatrix}$$

El sistema es compatible y determinado para todo valor de $\alpha \in \Re$.

b) Resolviendo el sistema se tiene: $y=-4$, $4(-4)-z=\alpha-10 \rightarrow z=-\alpha-6$,

$x+8+2(-\alpha-6)=5 \rightarrow x=2\alpha+9$. Si $\alpha=-1$, la solución es *(7,-4,-5).*

c) Sustituyendo la solución en el plano: $x+y+z=0 \rightarrow 2\alpha+9-4-\alpha-6=0 \rightarrow \alpha=1$.

Problema 2. a) Aplicando la fórmula: $d(P,\pi)=\dfrac{|2\cdot 10+1\cdot 0+2\cdot 10-8|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=\dfrac{32}{3}$.

b) Los puntos de corte del plano con los ejes de coordenadas son: $A(4,0,0)$, $B(0,8,0)$ y $C(0,0,4)$. Por tanto $\overrightarrow{AB}=(-4,8,0)$ y $\overrightarrow{AC}=(-4,0,4)$. El área será:

$$A=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -4 & 8 & 0\\ -4 & 0 & 4\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}|(32,16,32)|=\frac{1}{2}48=24.$$

c) Como $\overrightarrow{AP}=(6,0,10)$, el volumen será:

$$V=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix}6 & 0 & 10\\ -4 & 8 & 0\\ -4 & 0 & 4\end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}512=\frac{256}{3}.$$

Problema 3. a) x^2+2x+5 no tiene soluciones reales, por tanto $D=\Re$.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty \text{ y } \lim_{x\to 0}\frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}=\frac{-3}{5}.$$

b) No tiene asíntotas verticales por ser $D=\Re$ ni asíntota horizontal. Si tiene asíntota oblicua: $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x^2+5x-3}{x^3+2x^2+5x}=1$.

$$n = \lim_{x\to\infty}[f(x) - mx] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3 + x^2 + 5x - 3}{x^2 + 2x + 5} - x\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{-x^2 - 3}{x^2 + 2x + 5} = -1 .$$

La asíntota oblicua es $y = x - 1$.

c) $\int \frac{x^3 + x^2 + 5x - 3}{x^2 + 2x + 5}dx = \int (x-1)dx + \int \frac{2x+2}{x^2 + 2x + 5}dx = \frac{x^2}{2} - x + \ln\left|x^2 + 2x + 5\right| + C$.

El área es:

$$\int_1^5 \frac{x^3 + x^2 + 5x - 3}{x^2 + 2x + 5} = \frac{x^2}{2} - x + \ln\left|x^2 + 2x + 5\right|\Bigg|_1^5 = \frac{25}{2} - 5 + \ln 40 - \left(\frac{1}{2} - 1 + \ln 8\right) = 8 + \ln 5 .$$

Se supone que la función no cambia de signo en el intervalo $[1,5]$, lo cual es cierto, pues la única raíz real del numerador cae fuera de ese intervalo.

OPCIÓN B

Problema 1 a) $AX = \alpha X \to AX - \alpha X = 0 \to (A - \alpha I)X = 0 \to X = (A - \alpha I)^{-1}$.

Esto exige que $\left|A - \alpha I\right| = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} - \alpha \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\alpha & 4 \\ -1 & 6-\alpha \end{vmatrix} = (\alpha - 2)(\alpha - 5) \neq 0$.

Por tanto, tiene una única solución si $\alpha \neq 2 \vee \alpha \neq 5$. Como el sistema es homogéneo, la solución es *(0,0).*

b) $(A - 5I)X = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4x & 4y \\ -x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \quad \forall \lambda \in \Re$.

c) $A\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$A^{100}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = A^{99}A\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = A^{99}\cdot 2\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = A^{98}\cdot 2A\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = A^{98}\cdot 2^2\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \cdots = A\cdot 2^{99}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 2^{100}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Por tanto el valor es $\beta = 2^{100}$.

Problema 2. a) La recta en forma paramétrica es: $\begin{cases} x = \alpha - t \\ y = -4t \\ z = \beta t \end{cases}$. Buscando la intersección del plano y la recta, se tiene: $\alpha - t + 2(-4t) + 3\beta t = 6 \to t = \frac{6-\alpha}{3(\beta - 3)}$.

Si $\beta \neq 3$ la recta corta al plano (solución única). Si $\beta = 3 \wedge \alpha = 3$ la recta está contenida en el plano (infinitas soluciones). Si $\beta = 3 \wedge \alpha \neq 3$ la recta es paralela al plano (sin solución).

c) Ha de ser un plano paralelo al plano $\pi: \; x + 2y + 3z + D = 0$ y al pasar por el origen se tiene: $x + 2y + 3z = 0$.

Problema 3. a) Como $\overrightarrow{AP} = (x, 4 - x^2) - (0,2) = (x, 2 - x^2)$, entonces la distancia es $d(x) = \sqrt{x^2 + (2 - x^2)^2} = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}$ con $-2 \leq x \leq 2$.

b) $d'(x) = \dfrac{4x^3 - 6x}{2\sqrt{x^4 + 3x^2 + 4}} = 0 \rightarrow 4x^3 - 6x = 0 \rightarrow x\left(x - \sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)\left(x + \sqrt{\dfrac{3}{2}}\right) = 0$.

Calculamos la distancia en los siguientes puntos:

$d(-2) = \sqrt{8}$, $d\left(-\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right) = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$, $d(0) = 0$, $d\left(\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right) = \dfrac{\sqrt{7}}{2}$, $d(2) = \sqrt{8}$.

Hay dos máximos en $x = \pm 2$ y dos mínimos en $x = \pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

c) Como $y = 2 - |x| = \begin{cases} 2 + x & x < 0 \\ 2 - x & x > 0 \end{cases}$, se tiene que:

$$\int_{-2}^{0} \left[4 - x^2 - (2 + x)\right] dx + \int_{0}^{2} \left[4 - x^2 - (2 - x)\right] dx =$$

$$= \int_{-2}^{0} (-x^2 - x + 2) dx + \int_{0}^{2} (-x^2 + x + 2) dx =$$

$$= -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \Bigg|_{-2}^{0} + \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right)\Bigg|_{0}^{2} = \frac{10}{3} + \frac{10}{3} = \frac{20}{3}.$$