

Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y la Salud	
Soluciones	Junio de 2019

OPCIÓN A

Problema 1. a) El determinante de la matriz A es $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & a+1 & 2 \\ -3 & a-1 & a \end{vmatrix} = 2(a+1)^2$, y

si $a \neq -1$ el rango $r(A)=3$. Si $a = -1$ se tiene que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ y como el

menor $\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$, se tiene que rango $r(A)=2$. Si $a = 1$ se tiene que $|A| = 8$.

Por tanto $|2A^{-1}| = 2^3|A^{-1}| = \frac{2^3}{|A|} = \frac{8}{8} = 1$.

b) Si $a = -1$ al sistema le corresponde la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y como

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$, se concluye que $r(A)=r(B)=2 < 3$ y el sistema es compatible e

indeterminado. El sistema $\begin{cases} -2x + 2z = 2 \\ -3x - 2y - z = 0 \end{cases}$ da las soluciones $(\lambda, -1/2 - 2\lambda, 1 + \lambda)$.

c) $BB^{-1} = B(mB + nI) = mB^2 + nB \rightarrow I = mB^2 + nB = 3B^2 - 6B$ ya que $3B^2 = I - 6B$.
Por tanto tiene inversa, $m=3$ y $n=-6$.

Problema 2. La recta r en paramétricas es $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 3 + 2\lambda \end{cases}$. La recta r pasa por el

punto $A(0,3,3)$ y tiene de dirección $\vec{u} = (1,2,2)$. La recta s pasa por el punto $B(0,-1,2)$ y tiene el mismo vector dirección. Por tanto las rectas son paralelas (coincidentes se descarta porque el punto A no pertenece a s ni el punto B pertenece a r).

El vector normal del plano pedido será: $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -4 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-7, -1, 4)$.

La ecuación del plano pertenece al haz de planos paralelos: $-7x - y + 4z + D = 0$ y al pasar por el punto A: $-3 + 12 + D = 0 \rightarrow -7x - y + 4z - 9 = 0$ será el plano pedido.

b) Obtenemos el plano que pasa por $P(0, -1, -2)$ y es perpendicular a la recta r : $x + y + 2z + D = 0$ y al pasar por el punto P: $-1 + 4 + D = 0 \rightarrow x + y + 2z - 3 = 0$.

Obtenemos el punto Q intersección de la recta con el plano:

$$\lambda + 3 + \lambda + 2(3 + 2\lambda) - 3 = 0 \rightarrow 6\lambda + 6 = 0 \rightarrow \lambda = -1. \text{ El punto es } Q(-1, 2, 1).$$

La recta pedida pasará por P y tendrá de dirección \overrightarrow{PQ} :
$$\begin{cases} x = -\mu \\ y = -1 + 3\mu \\ z = 2 - \mu \end{cases}$$

c) Si la recta s está contenida en el plano, su vector dirección debe ser perpendicular al vector normal del plano: $\vec{v} \cdot \vec{n} = (1, 1, 2) \cdot (1, -2, a) = 1 - 2 + 2a = 0 \rightarrow a = \frac{1}{2}$.

Como la recta está contenida en el plano, al sustituir las coordenadas de la recta en la ecuación del plano tiene que haber infinitas soluciones:

$$\begin{cases} x = t \\ y = -1 + t \\ z = -2 - 2t \end{cases} \rightarrow t - 2(-1 + t) + \frac{1}{2}(2 - 2t) = b \rightarrow 0t = b - 3 \rightarrow b = 3$$

Problema 3.

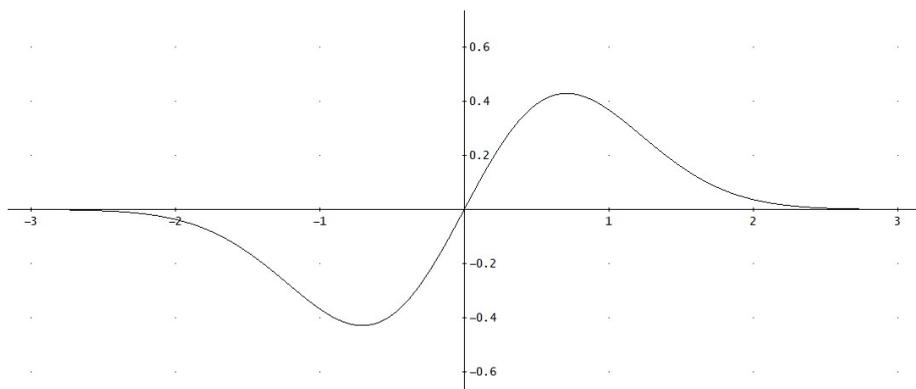
a) Dominio: $D = \mathbb{R}$ y por tanto, asíntotas verticales no tiene.

Asíntota horizontal: $y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = 0$. La función pasa por el origen y es impar.

Derivando: $y' = e^{-x^2} + xe^{-x^2}(-2x) = e^{-x^2}(1 - 2x^2)$, se anula $x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Los intervalos de crecimiento y decrecimiento son: $(-\infty, -1/\sqrt{2})$ $y' < 0$ decreciente; $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ $y' > 0$ creciente; $(1/\sqrt{2}, \infty)$ $y' < 0$ decreciente. La gráfica presenta un mínimo en $(-1/\sqrt{2}, -0.429)$ y un máximo en $(1/\sqrt{2}, 0.429)$.

b) La gráfica de la función es:



c) $g(x) = xe^{-x^2} + ax$. El teorema de Rolle exige que la función sea continua y derivable en $[0,1]$, que es cierto porque lo es en \mathcal{R} . Además debe verificar que

$$g(0) = g(1) \rightarrow 0 = -e^{-1} + a \rightarrow a = -\frac{1}{e}.$$

d) $\int xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int -2xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C$. Integrando por partes:

$$\int xe^{-x} dx \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f = x \rightarrow f' = 1 \\ g' = e^{-x} \rightarrow g = -e^{-x} \end{array} \right\} \rightarrow -xe^{-x} + \int e^{-x} dx = -xe^{-x} - e^{-x} + C$$

OPCIÓN B

Problema 1 a) Aplicamos el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 7 & 9 & 11 & \alpha \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -7 \\ 0 & 2 & 4 & \alpha - 28 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - 14 \end{pmatrix}.$$

si $\alpha = 14$, $r(A)=r(B)=2$, sistema compatible indeterminado.

si $\alpha \neq 14$, $r(A)=2$ y $r(B)=3$, sistema incompatible.

b) $y = -7 - 2z \rightarrow x = 4 - (-7 - 2z) - z = 11 + z$. Por tanto las infinitas soluciones del sistema son: $(11 + \lambda, -7 - 2\lambda, \lambda)$.

c) Aplicamos el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 5 \\ 7 & 9 & k & \alpha \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -7 \\ 0 & 2 & k-7 & \alpha-28 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -7 \\ 0 & 0 & k-11 & \alpha-14 \end{pmatrix}.$$

si $k \neq 11$, $r(A)=r(B)=3$, sistema compatible determinado.

Problema 2. a) Los planos paralelos al plano $9x + 12y + 20z - 180 = 0$ tendrán de expresión: $9x + 12y + 20z + D = 0$.

Aplicando la fórmula de la distancia entre planos paralelos:

$$\frac{|D - D'|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|D + 180|}{\sqrt{9^2 + 12^2 + 20^2}} = \frac{|D + 180|}{25} = 4 \rightarrow |D + 180| = 100 \rightarrow \begin{cases} D_1 = -80 \\ D_2 = -280 \end{cases}$$

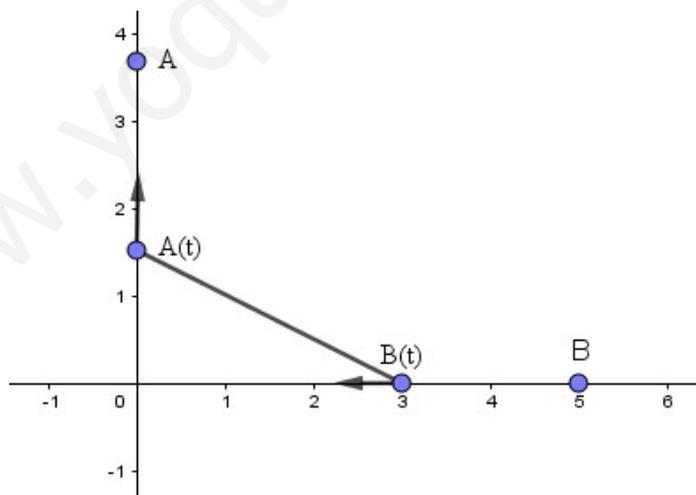
b) El plano corta a los ejes de coordenadas en los puntos $A(20,0,0)$, $B(0,15,0)$ y $C(0,0,9)$. Tenemos los vectores $\overrightarrow{AB} = (-20,15,0)$ y $\overrightarrow{AC} = (-20,0,9)$.

Para obtener el ángulo que forman:

$$\cos \alpha = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|} = \frac{400}{\sqrt{625} \sqrt{481}} \approx 0.73 \rightarrow \alpha \approx \arccos(0.73) = 43.15^\circ.$$

$$c) V = \frac{1}{6} [\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}] = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = \frac{2700}{6} = 450 \text{ u.v.}$$

Problema 3. a) En el gráfico, A representa el punto de llegada del móvil que partiendo desde el origen se desplaza a lo largo del eje de ordenadas a una velocidad de 30 Km/h. El punto B es el de partida del móvil que se desplaza hacia el origen a lo largo del eje de abscisas a una velocidad de 40 Km/h.



Las coordenadas de los móviles en un instante: $A(t) = (0, 30t)$ y $B(t) = (250 - 40t, 0)$.

Por tanto la función que da la distancia entre ellos en función del tiempo es:

$$f(t) = \sqrt{(250 - 40t)^2 + (-30t)^2} = \sqrt{2500t^2 - 20000t + 62500}$$

b) $T = \frac{250}{40} = \frac{375/2}{30} = 6.25 \text{ h}$ y ambos móviles tardan lo mismo en hacer sus recorridos respectivos.

$$f''(t) = \frac{5000t - 20000}{2\sqrt{2500t^2 - 20000t + 62500}} \text{ que se anula en } t = 4 \text{ h}.$$

La función en $[0,4)$ $f'(t) < 0$ decreciente y en $(4,6.25]$ $f'(t) > 0$ creciente.

c) La distancia mínima es $f(4) = 150 \text{ Km}$ y la máxima es en el extremo $f(0) = 250 \text{ Km}$ ya que $f(6.25) = 187.5 \text{ Km}$.