Galicia. Examen EBAU de Matemáticas CC.SS. Julio 2019

OPCIÓN A

1. En una caja hay billetes de 5, 10 y 20 por un valor de 400 €. Se sabe que el número de billetes de 20 € es la tercera par el número de billetes de 5 € es inferior en 4 unidades al del resto.
a) Escribe un sistema de ecuaciones que represente el problema.
b) Escríbelo en forma matricial.
c) Calcula la matriz inversa de la matriz de coeficientes y resuelve el sistema.

a) Sea:

x: nº de billetes de 5 €
y: nº de billetes de 10 €
z: nº de billetes de 20 €

La primera ecuación la obtengo sabiendo que hay billetes por un valor de 400 €:

$$5x + 10y + 20z = 400 \quad \Rightarrow \quad x + 2y + 4z = 80$$

Nos dicen que el número de billetes de 20 € es la tercera parte del número total de billetes:

$$z = \frac{1}{3}(x + y + z) \quad \Rightarrow \quad x + y - 2z = 0$$

La última ecuación la obtenemos al saber que el número de billetes de 5 € es inferior en 4 unidades al del resto:

$$x + 4 = y + z \quad \Rightarrow \quad x - y - z = -4$$

El sistema con las tres ecuaciones quedaría de la siguiente manera:

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 80 \\ x + y - 2z = 0 \\ x - y - z = -4 \end{cases}$$

b) Si escribimos el sistema en forma matricial nos quedará:

$$A \cdot X = B \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

c) Como nos dice el enunciado, calculamos la inversa de la matriz de coeficientes, A. En este caso vamos a calcularla por el m Jordan:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3' = F_3 - F_1]{F_2' = F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3' = F_3 - 3F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2' = 13F_2 + 6F_3]{F_1' = 13F_1 - 4F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 13 & 26 & 0 & 5 & 12 & -4 \\ 0 & -13 & 0 & -1 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 13 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 13 & 26 & 0 & 5 & 12 & -4 \\ 0 & -13 & 0 & -1 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 13 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1' = F_1 + 2F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 13 & 0 & 0 & 3 & 2 & 8 \\ 0 & -13 & 0 & -1 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 13 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 13 & 0 & 0 & 3 & 2 & 8 \\ 0 & -13 & 0 & -1 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 13 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{F_2' = F_2 \cdot (-1/13) \\ F_3' = F_3 \cdot (1/13)}]{F_1' = F_1 \cdot (1/13)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/13 & 2/13 & 8/13 \\ 0 & 1 & 0 & 1/13 & 5/13 & -6/13 \\ 0 & 0 & 1 & 2/13 & -3/13 & 1/13 \end{array}\right)$$

Para que sea más fácil operar, podemos sacar factor común en la matriz inversa y nos queda:

$$A^{-1} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 1 & 5 & -6 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Para resolver el sistema, sólo tendríamos que despejar X en la ecuación con la que representamos el sistema:

$$A \cdot X = B \quad \Rightarrow \quad A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1} \cdot B$$

Como vemos para resolver el sistema nos queda multiplicar la matriz inversa de los coeficientes por la matriz de términos ind

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 1 & 5 & -6 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 80 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

En la caja hay 16 billetes de 5 €, 8 billetes de 10 € y 12 billetes de 20 €.

2. **El precio de venta de un electrodoméstico en un centro comercial (en cientos de euros) viene dado por la función:**

$$P(t) = \frac{44}{t^2 - 4t + 16} + 2$$

siendo *t* el tiempo transcurrido en años desde el momento en que se puso a la venta.

a) Calcula el precio de lanzamiento del producto. ¿En qué momento el precio del electrodoméstico vuelve a ser el mismo lanzamiento?

b) Determina los periodos en los que el precio del electrodoméstico ha aumentado y ha disminuido. ¿Cuál ha sido e máximo? ¿En qué momento se ha producido?

c) Estudia la tendencia del precio de venta del electrodoméstico con el paso del tiempo.

a) Como t es el tiempo, expresado en años, desde el momento en que el electrodoméstico se puso en venta, el precio de cuando t = 0:

$$P(0) = \frac{44}{0^2 - 4 \cdot 0 + 16} + 2 = \frac{19}{4} = 4{,}75$$

Como el precio está en cientos de euros, el precio de lanzamiento será de 475 €.

Calculamos ahora cuando el precio vuelve a ser el mismo que el de lanzamiento:

$$P(t) = \frac{44}{t^2 - 4t + 16} + 2 = 4{,}75 \quad \Rightarrow \quad 44 = 2{,}75 \cdot (t^2 - 4t + 16)$$

$$44 = 2{,}75t^2 - 11t + 44 \quad \Rightarrow \quad 2{,}75t^2 - 11t = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} t = 0 \\ t = 4 \end{cases}$$

El precio del electrodoméstico vuelve a ser el mismo que el de lanzamiento al cabo de 4 años.

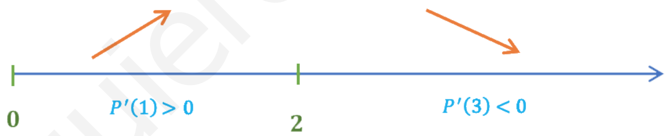
b) Para calcular el crecimiento y decrecimiento necesitamos la primera derivada de la función:

$$P'(t) = \frac{0 \cdot (t^2 - 4t + 16) - 44 \cdot (2t - 4)}{(t^2 - 4t + 16)^2} + 0 = \frac{-44 \cdot (2t - 4)}{(t^2 - 4t + 16)^2}$$

Igualamos la derivada a cero para calcular los puntos críticos:

$$P'(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{-44 \cdot (2t - 4)}{(t^2 - 4t + 16)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 2$$

Nos quedamos sólo con el valor positivo, ya que el tiempo tiene que ser mayor o igual a cero. Miramos el signo de la prime intervalos resultantes:



$$P(t) \ crece \ en \ (0{,}2)$$
$$P(t) \ decrece \ (2, \infty)$$

El precio del electrodoméstico aumenta durante los dos primeros años y a partir de ese momento decrece, por lo que, función tiene un máximo en t = 2. Calculamos el precio de venta máximo:

$$P(2) = \frac{44}{2^2 - 4 \cdot 2 + 16} + 2 \quad \Rightarrow \quad P(2) = \frac{17}{3} = 5{,}6667$$

El precio de venta máximo se produce a los dos años desde que el electrodoméstico se puso a la venta y es de 566,67 €.

c) Para saber la tendencia del precio a lo largo del tiempo hacemos la derivada cuando este tiende a infinito:

$$\lim_{t \to \infty} P(t) = \lim_{t \to \infty} \frac{44}{t^2 - 4t + 16} + 2 = \frac{44}{\infty^2 - 4 \cdot \infty + 16} + 2 = 0 + 2 = 2$$

El precio de venta del electrodoméstico al cabo del tiempo tiende a 200 €.

3. En una ciudad, el 20% de las personas que acceden a un centro comercial proceden del centro de la ciudad, el 45% de barrio resto de pueblos cercanos. Efectúan alguna compra el 60%, el 75% y el 50% de cada procedencia respectivamente.

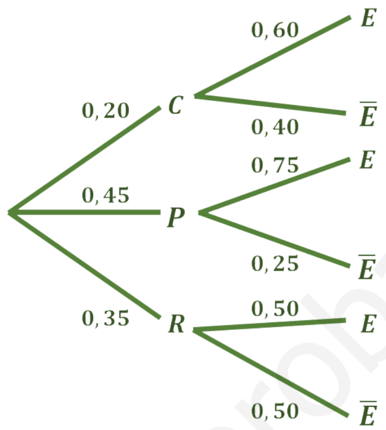
a) Si en un determinado día visitan el centro comercial 2 000 personas, ¿cuál es el número esperado de personas compras?

b) Si elegimos al azar una persona que ha realizado alguna compra en ese centro comercial, ¿cuál es la probabilidad de qu pueblo cercano?

a) Definimos los siguientes sucesos.

C = “personas que acceden a un centro comercial procedentes del centro de la ciudad”
P = “personas que acceden a un centro comercial procedentes de barrios periféricos”
R = “personas que acceden a un centro comercial procedentes de pueblos cercanos”
E = “personas que acceden a un centro comercial y efectúan alguna compra”

Con los datos del problema podemos hacer el siguiente diagrama de árbol:



Primero vamos a calcular la probabilidad de que una persona, elegida al azar, que acceda al centro comercial no realice com una probabilidad total, ya que puede no comprar y proceder del centro de la ciudad, de barrios periféricos o de pueblos cerc

$$P(\overline{E}) = P(C \cap \overline{E}) + P(P \cap \overline{E}) + P(R \cap \overline{E})$$

$$P(\overline{E}) = P(C) \cdot P(\overline{E}/C) + P(P) \cdot P(\overline{E}/P) + P(R) \cdot P(\overline{E}/R)$$

$$P(\overline{E}) = 0{,}20 \cdot 0{,}40 + 0{,}45 \cdot 0{,}25 + 0{,}35 \cdot 0{,}50$$

$$P(\overline{E}) = 0{,}3675$$

Para calcular el número de personas esperadas que no realizan compras si visitan el centro comercial 2 000 personas, s multiplicar ese número de personas por la probabilidad de que no realice compras:

$$2\,000 \cdot 0{,}3675 = 735$$

Si visitan el centro comercial 2 000 personas, es de esperar que no realicen ninguna compra 735.

b) Antes de calcular lo que nos piden vamos a calcular la probabilidad de que una persona elegida al azar realice alguna com comercial:

$$P(E) = 1 - P(\overline{E}) = 1 - 0{,}3675 \quad \Rightarrow \quad P(E) = 0{,}6325$$

Ahora calculamos la probabilidad condicionada que nos piden:

$$P(R/E) = \frac{P(R \cap E)}{P(E)} = \frac{P(R) \cdot P(E/R)}{P(E)}$$

$$P(R/E) = \frac{0{,}35 \cdot 0{,}50}{0{,}6325}$$

$$P(R/E) = 0{,}28$$

La probabilidad de que elegida una persona al azar haya realizado alguna compra, sabiendo que procede de un pueblo cer

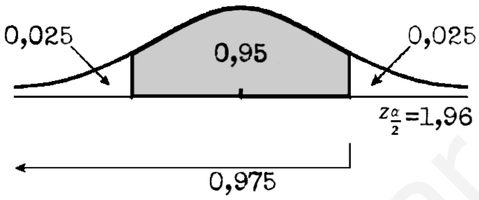
4. Se tomó una muestra aleatoria de 100 jóvenes y se les midió el nivel de glucosa en sangre obteniendo una media mg/cm^3. Se sabe que la desviación típica en la población es de 15 mg/cm^3.
a) Obtén un intervalo de confianza, al 95%, para el nivel de glucosa en sangre en la población.
b) ¿Cuándo vale el error máximo en el intervalo anterior?
c) ¿Qué ocurre con la amplitud del intervalo si el nivel de confianza es del 99%?

a) Se quiere analizar el nivel de glucosa en sangre, por lo tanto, la variable sería: X = "nivel medio, en mg/cm^3, de gluc $\Rightarrow X \sim N(\mu, \sigma = 15)$. Para hacer el estudio, se toma una muestra aleatoria de 100 jóvenes, y si $\overline{x}$ es el estadístico medio de la particular que toma para la muestra dada es $\overline{x} = 105$.

La expresión del intervalo de confianza sería:

$$P\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha$$

Vamos a calcular a partir del nivel de confianza $z_{\frac{\alpha}{2}}$:



Ahora podemos calcular el intervalo de confianza:

$$\left(105 - 1{,}96 \cdot \frac{15}{\sqrt{100}}, 105 + 1{,}96 \cdot \frac{15}{\sqrt{100}}\right) = (\mathbf{102{,}06; 107{,}94})$$

Se puede concluir que, en base a la muestra dada, se estima con un 95% de confianza, que el nivel medio de glucosa en sa muestra aleatoria de 100 jóvenes se encuentra entre 102,06 y 107,94.

b) El error de estimación es el radio del intervalo anterior. Se calcula:

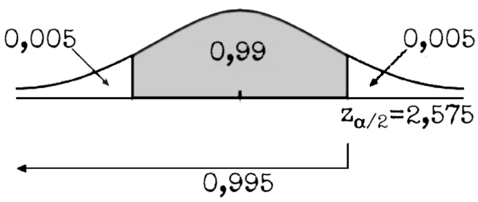
$$E = \pm\, z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$E = \pm\, 1{,}96 \cdot \frac{15}{\sqrt{100}}$$

$$E = \pm\, 2{,}94$$

Admitimos un error máximo de estimación de $\pm\, \mathbf{2{,}94}$ para el intervalo anterior.

c) Calculamos $z_{\alpha/2}$ para el nuevo nivel de confianza:



El nuevo intervalo de confianza será:

$$\left(105 - 2{,}575 \cdot \frac{15}{\sqrt{100}}, 105 + 2{,}575 \cdot \frac{15}{\sqrt{100}}\right) = (\mathbf{101{,}14; 108{,}86})$$

Al aumentar el nivel de confianza también lo hace la amplitud del intervalo de confianza.

OPCIÓN B

1. Una bodega produce vinos blancos y tintos. La producción de ambos tipos de vino no debe superar los 90 millones de litros y vino blanco no debe superar el doble de la de vino tinto ni ser inferior a su mitad. También se sabe que para atender la de producir al menos 45 millones de litros. La bodega comercializa el vino blanco a 8 € el litro y el tinto a 6 € el litro.
a) Plantea y representa gráficamente el problema.
b) ¿A cuánto ascienden los ingresos máximos y cómo se consiguen?

a) Definimos:

x: millones de litros de vino tinto.
y: millones de litros de vino blanco.

Como nos dicen que la producción de ambos tipos de vino no debe superar los 90 millones de litros, obtenemos la primera re

$$x + y \leq 90$$

Obtenemos la siguiente restricción del enunciado cuando nos dice que la producción de vino blanco no debe superar el do tinto:

$$y \leq 2x$$

Pero también nos dice que la producción de vino blanco no debe ser inferior a la mitad de la de vino tinto:

$$y \geq \frac{x}{2}$$

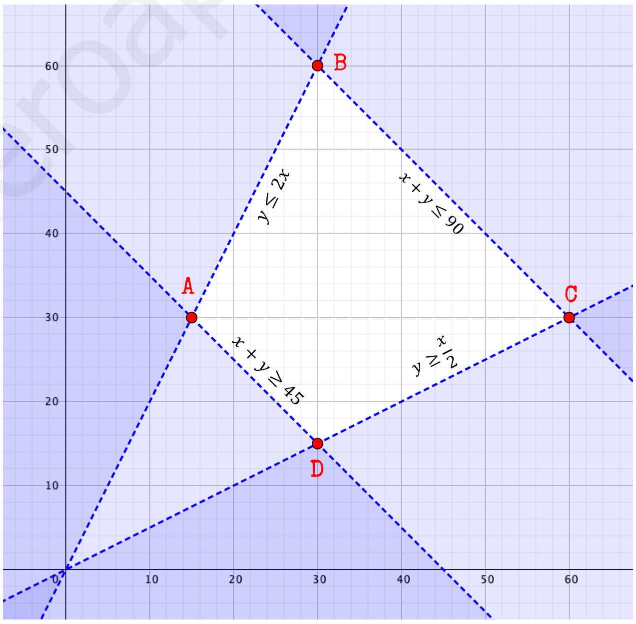
La última restricción se obtiene de la condición de que se deben producir al menos 45 millones de litros:

$$x + y \geq 45$$

Todas las restricciones que tenemos que representar serán las siguientes:

$$x + y \leq 90$$
$$y \leq 2x$$
$$y \geq \frac{x}{2}$$
$$x + y \geq 45$$

Representamos las restricciones e identificamos la región factible:



Calculamos los vértices:

$$\begin{cases} x + y = 45 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow A(15,30) \quad ; \quad \begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + y = 90 \end{cases} \Rightarrow B(30,60)$$

$$\begin{cases} x + y = 90 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow C(60,30) \quad ; \quad \begin{cases} x - 2y = 0 \\ x + y = 45 \end{cases} \Rightarrow D(30,15)$$

b) La función de ingresos sería la siguiente:

$$I(x,y) = 6x + 8y$$

Esta función nos dará los ingresos en millones de euros, ya que x e y están en millones de litros. Calculamos en cuál de los v función el valor mínimo:

$$A \Rightarrow I\,(15,30) = 6 \cdot 15 + 8 \cdot 30 = 300 \ \ millones \ €$$
$$B \Rightarrow I\,(30,60) = 6 \cdot 30 + 8 \cdot 60 = 660 \ millones \ €$$
$$C \Rightarrow I\,(60,30) = 6 \cdot 60 + 8 \cdot 30 = 600 \ millones \ €$$
$$D \Rightarrow I\,(30,15) = 6 \cdot 30 + 8 \cdot 15 = 300 \ millones \ €$$

Los ingresos máximos son de 660 millones de euros y se obtienen produciendo 30 millones de litros de vino tinto y 60 mil vino blanco.

2. Considera la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4x + 3 & si \quad 0 \le x \le 4 \\ 7 - x & si \quad 4 < x \le 7 \end{cases}$.

a) Representa la función estudiando sus puntos de corte con los ejes, monotonía y extremos relativos. ¿Para qué $f(x) \ge 0$**?**

b) Calcula el área del recinto limitado por los ejes y la parte de la función tal que $f(x) \ge 0$**.**

a) Empezamos estudiando los puntos de corte:

Corte eje OX: y = 0

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (1,0) \\ (3,0) \end{cases}$$

$$7 - x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 7 \quad \Rightarrow \quad (7,0)$$

Hay que tener la precaución de comprobar que los puntos obtenidos pertenezcan al dominio de definición de cada uno de l caso sí lo son, por lo tanto, tenemos 3 puntos de corte.

Corte eje OY: x = 0

$y = 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 \quad \Rightarrow \quad y = 3 \quad \Rightarrow$ Punto de corte: $(0,3)$

El segundo trozo no toma el valor cero, por lo que no va a cortar el eje Y.

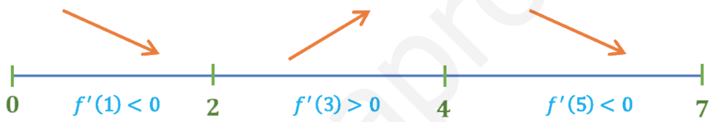
Monotonía:

Hacemos la primera derivada e igualamos a cero:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 4 & si \quad 0 < x < 4 \\ -1 & si \quad 4 < x < 7 \end{cases}$$

$$2x - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2$$

Miramos ahora el signo de la derivada en los intervalos resultantes:



Los intervalos de crecimiento y decrecimiento quedarán de la siguiente forma:

$f(x)$ *decrece* $(0,2) \cup (4,7)$

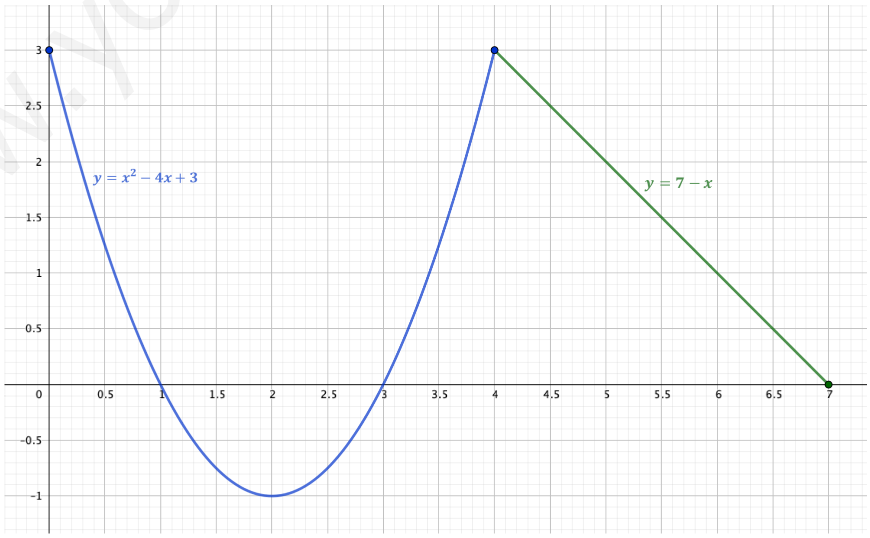
$f(x)$ *crece* $(2,4)$

Extremos relativos:

Sabemos que en x = 2 hay un punto crítico. En este caso hay un mínimo, porque la función antes decrece y después cre coordenada y de este punto:

$$f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1 \quad \Rightarrow \quad Mínimo\ (2,-1)$$

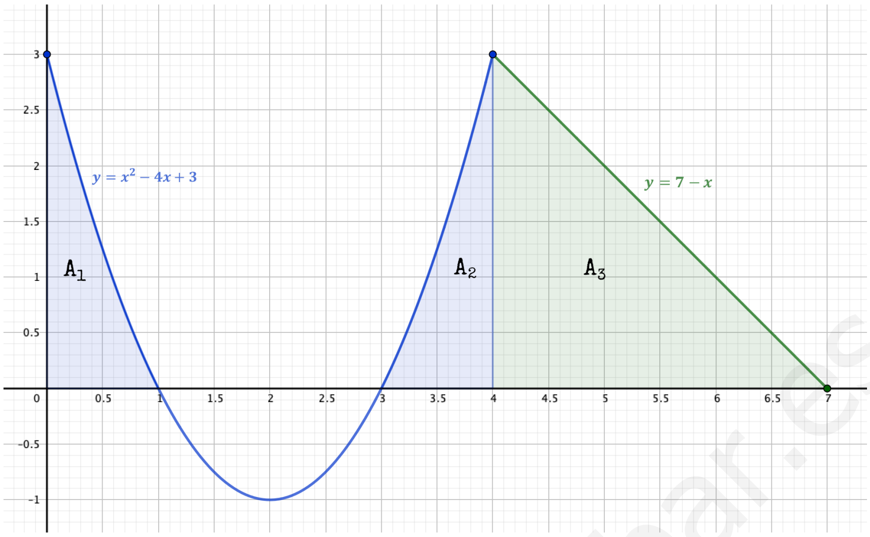
Con estos datos podemos dibujar la función:



La última pregunta de este apartado es fácil de contestar viendo la gráfica. La función toma valores positivos en los siguientes

$$f(x) \geq 0 \;\; en \;\; [0,1] \cup [3,7]$$

b) El área que nos piden es justamente la que encierran las funciones con el eje X. Para calcularla tenemos que dividirla en 3 entre 3 y 7 el área por la parte superior está encerrada por dos funciones distintas. Calculamos cada una de esas áreas:



$$A_1 = \int_0^1 (x^2 - 4x + 3)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 3x\right]_0^1 = \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x\right]_0^1 =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 - \left(\frac{1}{3} \cdot 0^3 - 2 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0\right) = \frac{4}{3} \;\; u^2$$

$$A_2 = \int_3^4 (x^2 - 4x + 3)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 3x\right]_3^4 = \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x\right]_3^4 =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 4^3 - 2 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 - \left(\frac{1}{3} \cdot 3^3 - 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3\right) = \frac{4}{3} \;\; u^2$$

$$A_3 = \int_4^7 (7 - x)\, dx = \left[7x - \frac{x^2}{2}\right]_4^7 = \left[7x - \frac{1}{2} \cdot x^2\right]_4^7 =$$

$$= 7 \cdot 7 - \frac{1}{2} \cdot 7^2 - \left(7 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 4^2\right) = \frac{9}{2} \;\; u^2$$

Las dos primeras áreas son iguales porque ese trozo de función, la parábola, es simétrica. Sumando obtenemos el área pedid

$$A_{Total} = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} + \frac{9}{2} \;\; \Rightarrow \;\; \boldsymbol{A_{Total} = \frac{43}{6} \;\; u^2}$$

3. Para la construcción de un panel luminoso se dispone de un contenedor con 200 bombillas blancas, 150 bombillas azules rojas. La probabilidad de que una bombilla del contenedor no funcione es 0,01 si es blanca, 0,02 si es azul y 0,03 si es roja. Se bombilla del contenedor:
a) Calcula la probabilidad de que la bombilla no funcione.
b) Sabiendo que la bombilla elegida funciona, calcula la probabilidad de que dicha bombilla no sea roja.

a) Vamos a definir los siguientes sucesos:

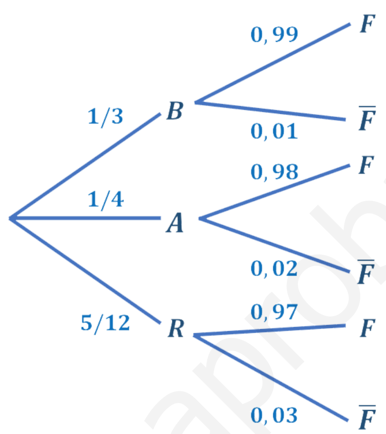
B: "bombillas blancas", $P(B) = \frac{200}{600} = \frac{1}{3}$

A: "bombillas azules", $P(A) = \frac{150}{600} = \frac{1}{4}$

R: "bombillas rojas", $P(R) = \frac{250}{600} = \frac{5}{12}$

F: "bombillas que funciona correctamente"

Como sabemos el número de bombillas totales y las de cada color podemos calcular la probabilidad de cada una de ellas. datos en un diagrama de árbol:



La probabilidad de que una bombilla no funcione es una probabilidad total, porque hay bombillas blancas, azules y rojas que

$$P(\bar{F}) = P(B \cap \bar{F}) + P(A \cap \bar{F}) + P(R \cap \bar{F})$$

$$P(\bar{F}) = P(B) \cdot P(\bar{F}/B) + P(A) \cdot P(\bar{F}/A) + P(R) \cdot P(\bar{F}/R)$$

$$P(\bar{F}) = \frac{1}{3} \cdot 0{,}01 + \frac{1}{4} \cdot 0{,}02 + \frac{5}{12} \cdot 0{,}03$$

$$P(\bar{F}) = \frac{1}{48} = 0{,}02$$

La probabilidad de que elegida al azar una bombilla del contenedor, esta no funcione es de 0,02.

b) Antes de nada, vamos a calcular la probabilidad de que la bombilla funcione. Es el suceso inverso del calculado en el apartado

$$P(F) = 1 - P(\bar{F}) = 1 - \frac{1}{48} \quad \Rightarrow \quad P(F) = \frac{47}{48}$$

Ahora nos piden calcular una probabilidad condicionada. Debemos tener en cuenta de que si la bombilla no es roja, entonce blanca o bien azul:

$$P(\bar{R}/F) = \frac{P(\bar{R} \cap F)}{P(F)} = \frac{P(B) \cdot P(F/B) + P(A) \cdot P(F/A)}{P(F)}$$

$$P(\bar{R}/F) = \frac{\frac{1}{3} \cdot 0{,}99 + \frac{1}{4} \cdot 0{,}98}{\frac{47}{48}}$$

$$P(\bar{R}/F) = \frac{138}{235}$$

La probabilidad de que elegida al azar una bombilla del contenedor, esta funcione sabiendo que no es roja es de 0,59.

4. En una muestra aleatoria de n = 25 estudiantes de bachillerato, el 75% afirman querer realizar estudios universitarios.

a) Calcula un intervalo de confianza para la proporción de estudiantes de bachillerato que quieren realizar estudios universita de confianza del 90%.

b) Si se sabe que 8 de cada 10 estudiantes de bachillerato afirman querer realizar estudios universitarios y tomam aleatoria de n = 100 estudiantes, ¿cuál es la probabilidad de que la proporción de estudiantes de la muestra que quieren universitarios sea superior al 65%?

a) Sea "p = proporción (poblacional) de estudiantes de bachillerato que quieren realizar estudios universitarios".

Tenemos que, siendo $\hat{p}$ el estadístico proporción de estudiantes de bachillerato que quieren realizar estudios universitarios aleatoria) sería:

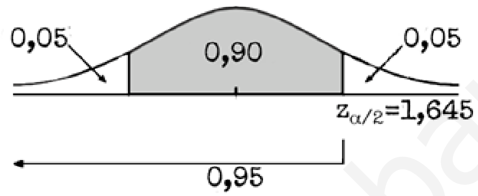
$$\hat{p} = 0{,}75$$

La expresión del nivel de confianza para la proporción es:

$$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}}\right)$$

Vamos a calcular, a partir del nivel de confianza, $z_{\frac{\alpha}{2}}$:

$$1-\alpha = 0{,}90 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0{,}10$$



Para calcular $z_{\frac{\alpha}{2}}$ miramos en la tabla y vemos que no hay exactamente esa probabilidad. Por eso hacemos la media aritm valores que dejan esa probabilidad en medio.

Sustituimos y calculamos el intervalo:

$$\left(0{,}75 - 1{,}645 \cdot \sqrt{\frac{0{,}75\cdot(1-0{,}75)}{25}}, 0{,}75 + 1{,}645 \cdot \sqrt{\frac{0{,}75\cdot(1-0{,}75)}{25}}\right)$$

$$(0{,}6075; 0{,}8925)$$

Se puede concluir que, en base a la muestra dada, se estima con un 90% de confianza, que la proporción de estudiantes de quieren realizar estudios universitarios está entre 0,6075 y 0,8925.

b) Como nos dicen que 8 de cada 10 estudiantes de bachillerato afirman querer realizar estudios universitarios, conocem proporción poblacional:

$$p = \frac{8}{10} = 0{,}8$$

$\hat{P}$: proporción de estudiantes universitarios que van a realizar estudios universitarios, en muestras de 100 estudiantes. Por lo

$$\hat{P} \sim N\left(p, \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}}\right) = N\left(0{,}8; \sqrt{\frac{0{,}8\cdot 0{,}2}{100}}\right) = N(0{,}8; 0{,}04)$$

Ahora la probabilidad que nos piden será:

$$P(\hat{P} > 0{,}65) = P\left(Z > \frac{0{,}65-0{,}8}{0{,}04}\right) = P(Z > -3{,}75) = P(Z < 3{,}75) = 0{,}9999$$

La probabilidad de que la proporción de estudiantes, de una muestra de 100 alumnos, quieran realizar estudios universita al 65% es de 0,9999.