Galicia. Examen EBAU resuelto de Matemáticas II. Junio 2019

OPCIÓN A

1. Da respuesta a los apartados siguientes:

a) Suponiendo que A y X son matrices cuadradas y que A+I es invertible, despeja X en la ecuación $A - X = A \cdot X$.

b) Si $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, calcula X tal que $A - X = A \cdot X$.

a) Pasamos primero todas las matrices X para el mismo miembro y después sacamos factor común:

$$A - X = A \cdot X \quad \Rightarrow \quad A = A \cdot X + X \quad \Rightarrow \quad A = (A + I) \cdot X$$

Multiplicamos por la matriz inversa de A+I en los dos miembros, por el lado izquierdo, que es el lado por donde la mat eliminar no tiene ninguna otra matriz:

$$(A + I)^{-1} \cdot A = (A + I)^{-1} \cdot (A + I) \cdot X$$

Como el producto de una matriz por su inversa es igual a la matriz identidad, tenemos despejado X:

$$(A + I)^{-1} \cdot A = I \cdot X \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{X = (A + I)^{-1} \cdot A}$$

b) Para calcular la matriz pedida tenemos que hacer los cálculos indicados en la solución del apartado anterior:

$$A + I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A + I = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculamos a hora la inversa de esta matriz, por ejemplo por adjuntos. Empezamos calculando el determinante:

$$|A + I| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - (-1) = 5$$

$$Adj\ (A + I) = \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \cdot 4 & (-1)^{1+2} \cdot 1 \\ (-1)^{2+1} \cdot (-1) & (-1)^{2+2} \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la traspuesta intercambiando filas por columnas:

$$[Adj\ (A + I)]^t = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la inversa sería:

$$(A + I)^{-1} = \frac{1}{|A + I|} \cdot [Adj\ (A + I)]^t = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad (A + I)^{-1} = \begin{pmatrix} 4/5 & 1/5 \\ -1/5 & 1/5 \end{pmatrix}$$

Por último, multiplicamos la matriz inversa por la matriz A:

$$X = (A + I)^{-1} \cdot A = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} 1/5 & -1/5 \\ 1/5 & 4/5 \end{pmatrix}}$$

2. Da respuesta a los apartados siguientes:

a) Mediante integración por partes, demuestra que $\int \ln x\ dx = x \cdot (\ln x - 1) + C$. Luego, demuestra la misma ig derivación.

b) Si $f(x) = \begin{cases} \ln x & se \quad x \in (0, e] \\ ax + b & se \quad x \in (e, \infty) \end{cases}$,

di que relación tiene que existir entre los parámetros a y b para que f sea continua y cuales tienen que ser sus valore derivable.

c) Calcula el área de la región encerrada por el eje X, la recta x = 4 y la gráfica de

$f(x) = \begin{cases} \ln x & se \quad x \in (0, e] \\ \frac{x}{e} & se \quad x \in (e, \infty) \end{cases}$

a) Comenzamos, tal y como nos dice el enunciado, resolviendo la integral propuesta por partes:

$$\int u\ dv = u \cdot v - \int v\ du$$

$$u = \ln x \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{x}\, dx$$

$$dv = dx \quad \Rightarrow \quad v = \int dx = x$$

La integral quedaría:

$$\int \ln x \; dx = \ln x \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx = x \cdot \ln x - \int dx = x \cdot \ln x - x + C$$

$$\int \ln x \; dx = x \cdot (\ln x - 1) + C$$

Efectivamente vemos que el resultado de la integral era el que nos daban en el enunciado. Ese resultado es una primitiva de que si la derivamos debemos obtener la función:

$$\frac{d[x \cdot (\ln x - 1) + C]}{dx} = 1 \cdot (\ln x - 1) + x \cdot \left(\frac{1}{x} - 0\right) + 0$$

$$\frac{d[x \cdot (\ln x - 1) + C]}{dx} = \ln x - 1 + 1$$

$$\frac{d[x \cdot (\ln x - 1) + C]}{dx} = \ln x$$

Comprobamos que la función obtenida antes era una primitiva, pues al derivarla obtenemos la función original que teníamos

b) Empezamos estudiando la continuidad. La función $\ln x$ es continua en el intervalo $(0, \infty)$ y la función $ax + b$, por ser polinó en $\mathbb{R}$. Por lo tanto, el único punto donde puede no serlo es en el que cambiamos de dibujar un trozo a dibujar el otro, es $x = e$. Para estudiar la continuidad ahí, debe existir el límite en el punto, es decir, que el límite por la izquierda y por la derec iguales y además, el valor del límite debe ser igual al valor que toma la función en ese punto:

$$f(e) = \ln e = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to e^-} f(x) = \lim\limits_{x \to e} \ln x = \ln e = 1 \\ \lim\limits_{x \to e^+} f(x) = \lim\limits_{x \to e} a \cdot x + b = a \cdot e + b \end{array}\right\}$$

Para que f(x) sea continua debe cumplir:

$$\exists \lim_{x \to e} f(x) \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \to e^-} f(x) = \lim_{x \to e^+} f(x) \quad \Rightarrow \quad 1 = a \cdot e + b$$

$$\lim_{x \to e} f(x) = f(e) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{a \cdot e + b = 1}$$

Esta última expresión nos da la relación que tiene que existir entre *a* y *b* para que la función sea continua. Estudiamos ahor que puede presentar problemas en el mismo punto de antes. Hacemos la derivada por la izquierda y por la derecha:

$$f'(e^-) = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(e+h) - \ln e}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\ln(e+h) - 1}{h} = \frac{\ln(e+0) - 1}{0} = \frac{0}{0} = IND.$$

L'Hôpital

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{e+h} - 0}{1} = \frac{\frac{1}{e+0} - 0}{1} = \frac{1}{e}$$

$$f'(e^+) = \lim_{h \to 0} \frac{a \cdot (e+h) + b - (a \cdot e + b)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a \cdot (e+h) + b - 1}{h} = \frac{a \cdot (e+0) + b - 1}{0}$$

*

$$= \frac{a \cdot e + b - 1}{0} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0} = IND$$

L'Hôpital

$$= \lim_{h \to 0} \frac{0 \cdot (e+h) + a \cdot (0+1) + 0}{1} = \lim_{h \to 0} \frac{a}{1} = a$$

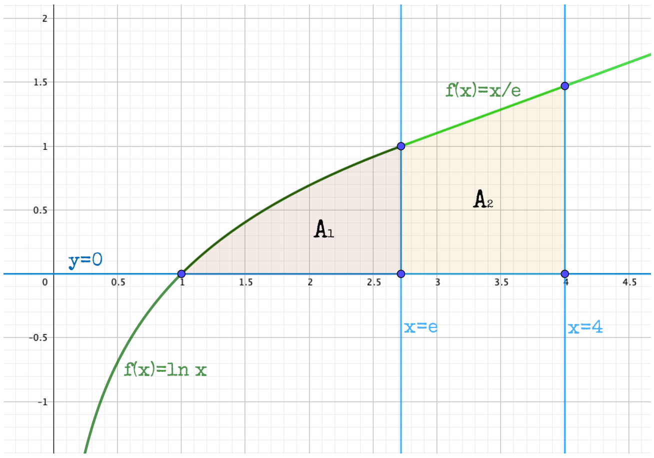
* Aplicamos la condición que debe cumplir la función para ser continua.
Para que sea derivable debe cumplir que las derivadas laterales sean iguales:

$$f'(e^-) = f'(e^+) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\frac{1}{e} = a}$$

Si vamos a la condición de antes, obtenemos el valor de b:

$$a \cdot e + b = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{e} \cdot e + b = 1 \quad \Rightarrow \quad 1 + b = 1 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{b = 0}$$

c) Como vemos la función que nos dan en este último apartado es la que se obtendría de substituir los valores calculados en el en la función inicial. Para calcular el área, primero dibujamos los dos trozos de la función y la recta x = 4. Trazamos en ese vertical que pasa por el punto donde se unen los dos trozos de la función f(x), es decir, la recta x = e:



Como vemos tenemos dos áreas, una de ellas A_1 está limitada por la parte superior por el primer trozo de la función y por la el eje OX, es decir la recta y = 0. Calculamos su área sabiendo que la integral la tenemos resuelta en el primer apartado del ej

$$A_1 = \int_1^e \ln x \ dx = [x \cdot (\ln x - 1)]_1^e = e \cdot (\ln e - 1) - 1 \cdot (\ln 1 - 1)$$

$$A_1 = \int_1^e \ln x \ dx = 1 \ u^2$$

La segunda, A_2, está limitada por la parte superior por el otro trozo de la función y por la parte inferior otra vez por el calculamos así:

$$A_2 = \int_e^4 \frac{x}{e} \ dx = \frac{1}{e}\int_e^4 x \ dx = \frac{1}{e} \cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_e^4 = \frac{1}{e} \cdot \left(\frac{4^2}{2} - \frac{e^2}{2}\right)$$

$$A_2 = \int_e^4 \frac{x}{e} \ dx = \frac{1}{e} \cdot \frac{16 - e^2}{2} \quad u^2$$

El área que nos piden es la suma de estas dos: $A_T = A_1 + A_2 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{A_T = 1 + \frac{1}{e} \cdot \frac{16 - e^2}{2} = 2,58 \ u^2}$

3. Se pide:

a) Calcular el ángulo del intervalo $[0^0, 90^0]$ que forman los vectores $\vec{u}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$ y $\vec{v}\left(-\frac{1}{2}, \frac{-1+\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)$.

b) Obtener la ecuación implícita del plano que pasa por el punto $P(1, -3, 0)$ y es perpendicular a la recta:

$$\begin{cases} x - y + 2z = 1 \\ \quad\ \ y - \ \ z = 0 \end{cases}$$

c) Calcular la distancia del punto $Q(1, 1, 1)$ al plano $\pi: \ -x + y + z + 4 = 0$ y el punto simétrico de Q respecto a π.

a) Para calcular o ángulo que forman dos vectores utilizamos el producto escalar:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \quad \Rightarrow \quad \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Operando queda:

$$\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{-\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{-1+\sqrt{2}}{2} + 0 \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{2}}}{\sqrt{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 0^2} \cdot \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1+\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)^2}}$$

$$\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{-\sqrt{2}+2}{4} + 0}{\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0} \cdot \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1+2-2\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{\sqrt[4]{2^2}}}}$$

$$\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\frac{\sqrt{2}-\sqrt{2}+2}{4}}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{\frac{1+1+2-2\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{\sqrt{2}}}} = \frac{\frac{1}{2}}{1 \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot (2-\sqrt{2})}{4} + \frac{\sqrt{2}}{2}}}$$

$$\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{\frac{1}{2}}{1 \cdot \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}+\sqrt{2}}{2}}} = \frac{\frac{1}{2}}{1 \cdot \sqrt{1}} = \frac{1}{2} \qquad (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = arc\cos\left(\frac{1}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 60^0}$$

b) Vamos a poner la recta en las ecuaciones paramétricas, para eso vamos a pasar la z como parámetro:

$$\begin{cases} x - y = 1 - 2\lambda \\ \quad\; y = \quad\;\; \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - \lambda = 1 - 2\lambda \\ \quad\; y = \quad\;\; \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \quad\;\; \lambda \end{cases}$$

Así entonces las ecuaciones paramétricas serían:

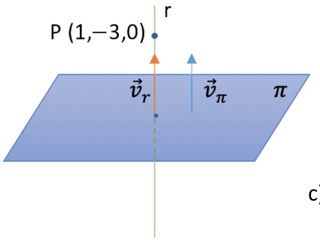
$$r: \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \quad\;\; \lambda \\ z = \quad\;\; \lambda \end{cases} \; \lambda \in \mathbb{R}$$

De la recta r obtenemos un punto y el vector director:

$$r: \begin{cases} P_r(1,0,0) \\ \vec{v}_r = (-1,1,1) \end{cases}$$

Para hacer la ecuación implícita del plano necesitamos un punto del mismo, nos lo dan, es el punto P y el vector normal del vector director de la recta, pues esta tiene que ser perpendicular a él:

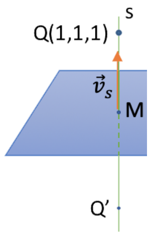
$$\pi: \begin{cases} P(1,-3,0) \\ \vec{v}_\pi = (-1,1,1) \end{cases} \Rightarrow \quad A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$$



$$-1 \cdot 1 + 1 \cdot (-3) + 1 \cdot 0 + D = 0 \quad \Rightarrow \quad D = 4$$

$$-1 \cdot x + 1 \cdot y + 1 \cdot z + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{\pi: -x + y + z + 4 = 0}$$

c) El plano obtenido en el apartado anterior es el que nos dan en este apartado. Ahora tenemos que calcular el punto simétrico de Q con respecto al plano, para eso empezaremos calculando la recta s que pasa por ese punto y es perpendicular al plano, por lo tanto, su vector director es el mismo que el de la recta r y que el del plano π:



$$s: \begin{cases} Q(1,1,1) \\ \vec{v}_s = (-1,1,1) \end{cases} \Rightarrow \quad s: \begin{cases} x = 1 - \mu \\ y = 1 + \mu \\ z = 1 + \mu \end{cases} \; \mu \in \mathbb{R}$$

Ahora calcularemos el punto de corte de esta recta con el plano. Para eso substituimos las ecuaciones paramétricas de la rec implícita del plano y obtenemos el valor del parámetro que posteriormente lo substituimos en las ecuaciones de la recta:

$$-(1-\mu) + (1+\mu) + (1+\mu) + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu = -5/3$$

$$M \begin{cases} x = 1 - \left(-\frac{5}{3}\right) \\ y = 1 + \left(-\frac{5}{3}\right) \\ z = 1 + \left(-\frac{5}{3}\right) \end{cases} \Rightarrow \quad M\left(\frac{8}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

Para calcular la distancia del punto Q al plano, sólo tenemos que calcular la distancia entre los puntos Q y M. Lo hacemos ha que vaya desde un punto a otro y calculando su módulo:

$$\overrightarrow{QM} = \left(\frac{8}{3} - 1, -\frac{2}{3} - 1, -\frac{2}{3} - 1\right) = \left(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\right)$$

$$d(Q,\pi) = \sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2 + \left(-\frac{5}{3}\right)^2 + \left(-\frac{5}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{9} + \frac{25}{9} + \frac{25}{9}} = \sqrt{\frac{75}{9}}$$

$$\boldsymbol{d(Q,\pi) = \frac{5\sqrt{3}}{3} \; u}$$

Para calcular el punto simétrico, sabemos que el punto M es el punto medio entre el punto Q y el punto Q', que es e Utilizando la fórmula del punto medio lo calculamos:

$$M = \frac{Q + Q'}{2} \quad \Rightarrow \quad Q' = 2M - Q = 2 \cdot \left(\frac{8}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right) - (1,1,1)$$

$$Q'\left(\frac{16}{3} - 1, -\frac{4}{3} - 1, -\frac{4}{3} - 1\right) \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{Q'\left(\frac{13}{3}, -\frac{7}{3}, -\frac{7}{3}\right)}$$

4. Da respuesta a los apartados siguientes:

a) El 40% de los habitantes de una cierta comarca tienen camelias, el 35% tienen rosas y el 21% tienen camelias y rosas. Si s habitante de esa comarca, calcular las cinco probabilidades siguientes: de que tenga camelias o rosas; de que no tenga ni c de que tenga camelias, sabiendo que tiene rosas; de que tenga rosas, sabiendo que tiene camelias; y de que solamen solamente tenga camelias.

b) Si en un auditorio hay 50 personas, ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos 2 naciesen en el mes de enero?

a) Definimos los siguientes sucesos y sus probabilidades:

C = "Habitantes de una cierta comarca que tienen camelias", $P(C) = 0{,}40$

R = "Habitantes de una cierta comarca que tienen rosas", $P(R) = 0{,}35$

Nos dicen también que el 21% de los habitantes de cierta comarca tienen camelias y rosas, es decir, nos dan la probabilidad d $P(C \cap R) = 0{,}21$.

Vamos a hacer un diagrama de árbol con los datos del problema. Para eso necesitamos en primer lugar calcular la probabili rosas sabiendo que tiene camelias, que ya es una de las probabilidades que nos piden:

$$P(R/C) = \frac{P(R \cap C)}{P(C)} = \frac{0{,}21}{0{,}40} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{P(R/C) = \frac{21}{40} = 0{,}53}$$

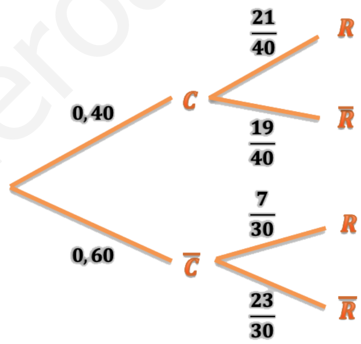
Ahora calculamos la probabilidad, también condicionada, de que tenga rosas sabiendo que no tiene camelias. Lo hacem probabilidad total de que tenga rosas, que nos la da el enunciado:

$$P(R) = P(C) \cdot P(R/C) + P(\bar{C}) \cdot P(R/\bar{C})$$

$$P(R/\bar{C}) = \frac{P(R) - P(C) \cdot P(R/C)}{P(\bar{C})} = \frac{0{,}35 - 0{,}40 \cdot \frac{21}{40}}{1 - 0{,}40}$$

$$P(R/\bar{C}) = \frac{7}{30} = 0{,}23$$

Representamos todas estas probabilidades en el diagrama:



Con los datos del diagrama es fácil calcular todo lo que nos piden. Empezamos por la probabilidad de que tenga camelia unión de dos sucesos:

$$P(C \cup R) = P(C) + P(R) - P(C \cap R)$$

$$P(C \cup R) = 0{,}40 + 0{,}35 - 0{,}40 \cdot \frac{21}{40} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{P(C \cup R) = \frac{27}{50} = 0{,}54}$$

Calculamos la probabilidad de que no tenga ni camelias ni rosas. Esta es la intersección de dos sucesos contrarios o complem

$$P(\bar{C} \cap \bar{R}) = P(\bar{C}) \cdot P(\bar{R}/\bar{C}) = 0{,}60 \cdot \frac{23}{30} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{P(\bar{C} \cap \bar{R}) = \frac{23}{50} = 0{,}46}$$

La siguiente es la probabilidad de que tenga camelias sabiendo que tiene rosas. Es una probabilidad condicionada:

$$P(C/R) = \frac{P(C \cap R)}{P(R)} = \frac{0{,}40 \cdot \frac{21}{40}}{0{,}35} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{P(C/R) = \frac{3}{5} = 0{,}60}$$

La probabilidad de que sólo tenga rosas será la de que tenga rosas y no camelias:

$$P(R \cap \bar{C}) = P(\bar{C} \cap R) = 0{,}60 \cdot \frac{7}{30} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{P(R \cap \bar{C}) = \frac{7}{50} = 0{,}14}$$

La última que queda es la de que sólo tenga camelias, es decir, que tenga camelias y no rosas:

$$P(C \cap \bar{R}) = 0{,}40 \cdot \frac{19}{40} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{P(C \cap \bar{R}) = \frac{19}{100} = 0{,}19}$$

b) Sea "p: proporción de personas que nacieron en el mes de enero".

$\hat{P}$: proporción muestral de personas de un auditorio, en el que hay 50 personas, que nacieron en el mes de enero.

$$\hat{P} \equiv N\left(p, \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right) \equiv N\left(\frac{1}{12}, \sqrt{\frac{\frac{1}{12} \cdot \frac{11}{12}}{50}}\right) = (0{,}0833;\ 0{,}0391)$$

Calculamos la probabilidad pedida:

$$P\left(\hat{P} \geq \frac{2}{50}\right) = P\left(\frac{\hat{P} - 0{,}0833}{0{,}0391} \geq \frac{\frac{2}{50} - 0{,}0833}{0{,}0391}\right) = P(Z \geq -1{,}11) =$$

$$= P(Z < 1{,}11) = 0{,}8665$$

OPCIÓN B

1. Da respuesta a los apartados siguientes:

a) Discute, según los valores del parámetro *m*, el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x - \ y + \qquad 3z = \ \ 0 \\ \qquad my + (3-m)z = -6 \\ 2x - \ y + \qquad mz = \ \ 6 \end{cases}$$

b) Resuélvelo, si es posible, en los casos $m = 0$ y $m = 4$.

a) Planteamos dos matrices, la de coeficientes (A) y la ampliada con los términos independientes (A*):

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & m & 3-m \\ 2 & -1 & m \end{pmatrix} \quad ; \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & m & 3-m & -6 \\ 2 & -1 & m & 6 \end{array}\right)$$

Calculamos el determinante de la matriz A para determinar su rango. I:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & m & 3-m \\ 2 & -1 & m \end{vmatrix} = 2m^2 - 6m$$

Igualamos a cero el determinante para saber qué valores de *m* lo anulan:

$$2m^2 - 6m = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} m = 0 \\ m = 3 \end{cases}$$

El rango de la matriz A será:

- Si $m \neq 0{,}3 \quad \Rightarrow \quad rang\ (A) = 3.$
- Si $m = 0 \quad \Rightarrow \quad rang\ \ (A) = 2$, ya que encontramos algún determinante de este orden distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 6 = -6 \neq 0$$

- Si $m = 3 \quad \Rightarrow \quad rang\ \ (A) = 2$, ya que encontramos algún determinante de este orden distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 0 = 6 \neq 0$$

Los casos que tenemos entonces serían los siguientes:

- **Si** $\boldsymbol{m \neq 0{,}3 \quad \Rightarrow \quad rang\ (A) = 3 = rang(A^*) = nº\ incógnitas \quad \Rightarrow \quad S.C.D.}$

  El rango de la matriz ampliada es 3, porque el determinante de A, que era distinto de cero, también está en la matriz ampli

- **Si** $\boldsymbol{m = 0 \quad \Rightarrow \quad rang\ \ (A) = 2 = rang(A^*) < nº\ incógnitas \quad \Rightarrow \quad S.C.I.}$
  El rango de la matriz ampliada también es 2, porque todos los determinantes de orden 3 son nulos:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \\ 2 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 0 \ ; \ \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -6 & 3 \\ 2 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 0 \ ; \ \begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -6 & 0 & 3 \\ 6 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

- **Si** $\boldsymbol{m = 3 \quad \Rightarrow \quad rang\ \ (A) = 2 \neq rang(A^*) = 3 \quad \Rightarrow \quad S.I.}$
  El rango de la matriz ampliada es 3, porque por lo menos uno de los determinantes de orden 3 es distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 36$$

b) Para el caso de m = 0, el sistema es compatible indeterminado, por lo tanto, una de las ecuaciones es combinación line sumamos la segunda ecuación y la tercera obtenemos la primera. Por lo tanto, podemos eliminar esa primera ecuación por lineal de las otras:

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ \phantom{2x-y+{}} 3z = -6 \\ 2x - y = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3z = -6 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$$

Ahora ponemos una incógnita como parámetro, por ejemplo, $y = \lambda$ y resolvemos:

$$\begin{cases} z = -2 \\ 2x = 6 + \lambda \end{cases} \Rightarrow \quad x = 3 + \lambda/2 \quad \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x = 3 + \lambda/2} \\ \boldsymbol{y = \phantom{3+{}} \lambda} \\ \boldsymbol{z = -2} \end{cases} \quad \boldsymbol{\lambda \in \mathbb{R}}$$

Para el caso de m = 4, el sistema es compatible determinado, por lo que tendrá una única solución. La calculamos por Cramer

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 0 \\ \phantom{2x-{}} 4y - z = -6 \\ 2x - y + 4z = 6 \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -6 & 4 & -1 \\ 6 & -1 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}} = -9 \ ; \ y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & -6 & -1 \\ 2 & 6 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}} = 0 \ ; \ z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -6 \\ 2 & -1 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}} = 6$$

Para este caso, m = 4, la solución del sistema es $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) = (-\mathbf{9}, \mathbf{0}, \mathbf{6})$.

2. Considérese la función $f(x) = x^2 \cdot e^{-x}$. Se pide:

a) Calcular los límites $\lim_{x \to \infty} f(x)$ y $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

b) Determinar intervalos de crecimiento y decrecimiento, extremos relativos y puntos de inflexión.

c) Calcular $\int f(x)\, dx$.

a) Vamos a resolver los límites, en el primero de ellos, aplicando dos veces la regla de L'Hôpital para resolver las indeterminac es inmediato:

$$\lim_{x\to\infty} x^2 \cdot e^{-x} \, (= \infty \cdot 0) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} \left(= \frac{\infty}{\infty}\right) \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} \left(= \frac{0}{0}\right) \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^2 \cdot e^{-x} \, (= \infty \cdot \infty) = \infty$$

b) Para calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento hacemos la primera derivada:

$$f'(x) = 2x \cdot e^{-x} + x^2 \cdot (-1) \cdot e^{-x} = (2x - x^2) \cdot e^{-x}$$

Igualamos a cero para calcular los posibles extremos relativos y para obtener los intervalos de crecimiento y decrecimiento:

$$(2x - x^2) \cdot e^{-x} = 0 \quad \Rightarrow \begin{cases} 2x - x^2 = 0 & \Rightarrow & \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \\ e^{-x} = 0 & \Rightarrow & \nexists \ sol. \end{cases}$$

Miramos el signo de la primera derivada en los intervalos obtenidos:

	$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
$2x - x^2$	$-$	$+$	$-$
e^{-x}	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$

f(x) crece en $(\mathbf{0}, \mathbf{2})$

f(x) decrece en $(-\infty, \mathbf{0}) \cup (\mathbf{2}, \infty)$

La función va a tener dos extremos relativos, en x = 0 y en x = 2. Comprobamos, substituyéndolos en la segunda derivada, mínimos:

$$f''(x) = (2 - 2x) \cdot e^{-x} + (2x - x^2) \cdot (-1) \cdot e^{-x} = (x^2 - 4x + 2) \cdot e^{-x}$$

$$f''(0) = (0^2 - 4 \cdot 0 + 2) \cdot e^{-0} = 2 > 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \ \text{hai un mínimo}$$

$$f''(2) = (2^2 - 4 \cdot 2 + 2) \cdot e^{-2} = \frac{-2}{e^2} < 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2 \ \text{hai un máximo}$$

Calculamos las coordenadas y de estos 2 puntos:

$$f(0) = 0^2 \cdot e^{-0} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{(0,0)} \ \textbf{mínimo}$$

$$f(2) = 2^2 \cdot e^{-2} = \frac{4}{e^2} \quad \Rightarrow \quad \left(\mathbf{2}, \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{e^2}}\right) \ \textbf{máximo}$$

Por último, los puntos de inflexión anulan la segunda derivada, por lo que igualamos esta a cero:

$$f''(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad (x^2 - 4x + 2) \cdot e^{-x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x^2 - 4x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 2 - \sqrt{2} \\ x = 2 + \sqrt{2} \end{cases} \\ \qquad e^{-x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nexists \ sol. \end{cases}$$

Comprobamos si realmente son puntos de inflexión substituyendo en la tercera derivada:

$$f'''(x) = (2x - 4) \cdot e^{-x} + (x^2 - 4x + 2) \cdot (-1) \cdot e^{-x}$$

$$f'''(x) = (-x^2 + 6x - 6) \cdot e^{-x}$$

$$f'''(2 - \sqrt{2}) = \left[-(2 - \sqrt{2})^2 + 6 \cdot (2 - \sqrt{2}) - 6\right] \cdot e^{-(2-\sqrt{2})} \neq 0$$

$$f'''(2 + \sqrt{2}) = \left[-(2 + \sqrt{2})^2 + 6 \cdot (2 + \sqrt{2}) - 6\right] \cdot e^{-(2+\sqrt{2})} \neq 0$$

Como vemos al substituirlas en la tercera derivada da distinto de cero, por lo que sí son puntos de inflexión. Calculamos las co

$$f(2 - \sqrt{2}) = (2 - \sqrt{2})^2 \cdot e^{-(2-\sqrt{2})} = \quad \Rightarrow \quad \left(\mathbf{2 - \sqrt{2}}, \frac{\mathbf{6 - 4\sqrt{2}}}{\mathbf{e^{2-\sqrt{2}}}}\right)$$

$$f(2 + \sqrt{2}) = (2 + \sqrt{2})^2 \cdot e^{-(2+\sqrt{2})} = \quad \Rightarrow \quad \left(\mathbf{2 + \sqrt{2}}, \frac{\mathbf{6 + 4\sqrt{2}}}{\mathbf{e^{2+\sqrt{2}}}}\right)$$

c) Vamos a resolver la integral propuesta:

$$\int x^2 \cdot e^{-x} \, dx$$

La integral propuesta vamos a resolverla por partes, a fórmula sería:

$$\int u \ dv = u \cdot v - \int v \ du$$

$$u = x^2 \quad \Rightarrow \quad du = 2x \, dx$$

$$dv = e^{-x} \, dx \quad \Rightarrow \quad v = -\int -(1) \cdot e^{-x} \, dx = -e^{-x}$$

La integral quedaría:

$$\int x^2 \cdot e^{-x} \, dx = -x^2 \cdot e^{-x} - \int -2x \cdot e^{-x} \, dx = -x^2 \cdot e^{-x} + 2 \int x \cdot e^{-x} \, dx$$

Esta otra integral que nos queda volvemos a resolverla por partes:

$$u = x \quad \Rightarrow \quad du = dx$$

$$dv = e^{-x} \, dx \quad \Rightarrow \quad v = -\int -(1) \cdot e^{-x} \, dx = -e^{-x}$$

$$\int x \cdot e^{-x} \, dx = -x \cdot e^{-x} - \int -e^{-x} \, dx = -x \cdot e^{-x} - e^{-x} = (-x - 1) \cdot e^{-x}$$

Retomamos ahora el resultado que teníamos ya integrado anteriormente y tenemos la solución final:

$$\int x^2 \cdot e^{-x} \, dx = -x^2 \cdot e^{-x} + 2 \cdot (-x - 1) \cdot e^{-x} = -x^2 \cdot e^{-x} - (2x + 2) \cdot e^{-x}$$

$$\int \boldsymbol{x^2 \cdot e^{-x} \, dx = -(x^2 + 2x + 2) \cdot e^{-x} + C}$$

3. Da respuesta a los apartados siguientes:

a) Estudia la posición relativa de los planos $\pi_1: mx - y + 2 = 0$ y $\pi_2: 2x + 3y = 0$ en función del parámetro m.

b) Obtén la ecuación implícita del plano que pasa por los puntos $A(0,0,0)$, $B(1,0,1)$ y $C(0,1,0)$.

c) Calcula el punto simétrico del punto $P(1,2,3)$ con respecto al plano $\pi: -x + z = 0$.

a) Para estudiar la posición relativa de los planos vamos a hacer dos matrices con las ecuaciones de los mismos. En una pondre normales y en la otra pondremos también los términos independientes:

$$A: \begin{pmatrix} m & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^*: \left(\begin{array}{ccc|c} m & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Calculamos los rangos de ambas:

$$\begin{vmatrix} m & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3m - (-2) = 0 \Rightarrow m = -\frac{2}{3}$$

- Si $m \neq -2/3 \Rightarrow rang\ (A) = 2 = rang\ (A^*)$. Si las dos matrices tienen rango 2, significa que los vectores normales n dirección y por lo tanto los planos tampoco. En este caso serían **secantes**.
- Si $m = -2/3 \Rightarrow rang\ (A) = 1 \neq rang\ (A^*) = 2$. El rango de la matriz ampliada es 2 porque hay por lo menos u orden con determinante distinto de cero:

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 - (-6) = 6$$

El rango de la matriz de los vectores normales es 1, es decir, estos vectores son paralelos, por lo que los planos o b paralelos o coincidentes. Como el rango de la matriz ampliada es 2 significa que no son el mismo plano, es decir, no son **paralelos**.

b) Una de las maneras de determinar un plano es a partir de dos vectores y un punto. Por lo que, vamos a hacer dos vectores co nos dan:

$$\overrightarrow{AB} = (1,0,1) \ ; \ \overrightarrow{AC} = (0,1,0)$$

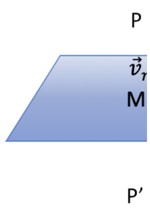
Con los vectores y uno cualquiera de los puntos calculamos el determinante, igualamos a cero y obtenemos la ecuación impl

$$\pi: \begin{cases} A(0,0,0) \\ \overrightarrow{AB} = (1,0,1) \\ \overrightarrow{AC} = (0,1,0) \end{cases} \Rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\boldsymbol{\pi: -x + z = 0}$$

Fijándonos en el plano que nos dan en el último apartado, como es el mismo, le ponemos el mismo nombre.

c) Para calcular el punto simétrico del punto $P(1,2,3)$ respecto del plano π vamos a calcular una recta r, perpendicular al plano que pase por el punto P. Por lo tanto, el vector director de esa recta llevará la misma dirección que el vector normal del plano:



$$r: \begin{cases} P(1,2,3) \\ \vec{v}_s = (-1,0,1) \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 \\ z = 3 + \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Ahora vamos a calcular el punto M, es decir, el punto donde esta recta corta al plano. Para ello substituimos las ecuaciones paramétricas de la recta en el plano:

$$-(1-\lambda) + 3 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -1$$

Con el valor del parámetro calculamos el punto sustituyéndolo en las ecuaciones paramétricas de la recta:

$$\begin{cases} x = 1 - (-1) \\ y = 2 \\ z = 3 + (-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow M(2,2,2)$$

Este punto es el punto medio entre el punto P y su simétrico, P':

$$M = \frac{P + P'}{2} \Rightarrow P' = 2M - P = 2 \cdot (2,2,2) - (1,2,3) \Rightarrow \boldsymbol{P'(3,2,1)}$$

4. Da respuesta a los apartados siguientes:

a) Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestal. Calcula $P(A)$ si $P(B) = 0,8$, $P(A \cap B) = 0,2$ y $P(A \cup$ $P(A)$.

b) En un determinado lugar, la temperatura máxima durante el mes de julio sigue una distribución normal de media 25 ^{0} típica 4 ^{0}C. Calcula la probabilidad de que la temperatura máxima de un cierto día esté comprendida entre 21 ^{0}C y 27,2 ^{0}C. del mes se espera que la temperatura máxima permanezca dentro de ese rango?

a) Los datos que sabemos son los siguientes:

$$P(B) = 0,8 \quad ; \quad P(A \cap B) = 0,2 \quad ; \quad P(A \cup B) = 3 \cdot P(A)$$

Ahora a partir de la fórmula de la unión de dos sucesos y substituyendo estos datos obtenemos la probabilidad pedida:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$3 \cdot P(A) = P(A) + 0,8 - 0,2 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{P(A) = 0,3}$$

b) Sea "X: la temperatura máxima durante el mes de julio de un determinado lugar". $X \sim N(25, 4)$

La probabilidad pedida es:

$$P(21 \leq X \leq 27,2) = P\left(\frac{21-25}{4} \leq \frac{X-25}{4} \leq \frac{27,2-25}{4}\right) = P(-1 \leq Z \leq 0,55) =$$

$$= P(Z \leq 0,55) - [1 - P(Z \leq 1)] = P(Z \leq 0,55) - 1 + P(Z \leq 1) =$$

$$= 0,7088 - 1 + 0,8413 = 0,5501$$

La probabilidad de que la temperatura máxima de un cierto día, en ese determinado lugar, esté comprendida entre 21 ^{0} 0,5501.

Para saber cuántos días de ese mes se encontrarán en ese rango de temperatura, sólo tenemos que multiplicar la probabili el número de días que tiene el mes de julio:

$$31 \cdot 0,5501 = 17,05 \cong 17 \ \ días$$

Durante 17 días de ese mes de julio, en un determinado lugar, la temperatura máxima permanecerá dentro del rango de 21 ^{0}C y 27,2 ^{0}C.