Universidad Zaragoza 1542

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE DE 2019
EJERCICIO DE: **MATEMÁTICAS II**
TIEMPO DISPONIBLE: **1 hora 30 minutos**

PUNTUACIÓN QUE SE OTORGARÁ A ESTE EJERCICIO: (véanse las distintas partes del examen)

Elija una de las dos opciones propuestas, A o B. En cada pregunta se señala la puntuación máxima.

OPCIÓN A

1.

a) (*1,5 punto*) Considere el siguiente sistema de ecuaciones, donde k es un parámetro real:

$$\begin{aligned} 2x - y + kz &= 1 \\ -x + y - kz &= 0 \\ 2x - ky + 2kz &= -1 \end{aligned}$$

Determine los valores del parámetro real k, para los que este sistema es compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

b) (*1,5 punto*) Resuelva el sistema cuando $k = 1$.

SOLUCIÓN.

a) La matriz de los coeficientes, A, y ampliada, B, son: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & k & 1 \\ -1 & 1 & -k & 0 \\ 2 & -k & 2k & -1 \end{array}\right)$.

El máximo rango posible es 3. El único menor de orden 3 en la matriz de los coeficientes es:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & k \\ -1 & 1 & -k \\ 2 & -k & 2k \end{vmatrix} = 4k + k^2 + 2k - 2k - 2k - 2k^2 = -k^2 + 2k = k(-k+2) = 0 \quad \Rightarrow \quad k = 0 \ , \ k = 2$$

▪ Para $k \neq 0$ y $k \neq 2$: $\text{rg}A = \text{rg}B = 3 = \text{nº de incógnitas} \quad \Rightarrow$ el sistema es compatible determinado.

▪ Para $k = 0$: el rango de la matriz A es 2 pues el menor $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Orlamos el menor anterior con los términos independientes: $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 2 + 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{rg}B = 3 \quad \Rightarrow$ el sistema es incompatible pues $\text{rg}A \neq \text{rg}B$.

▪ Para $k = 2$: el rango de la matriz A es 2 pues el menor $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Orlamos el menor anterior con los términos independientes: $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -2 + 2 - 2 + 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \text{rg}B = 3 \quad \Rightarrow$ el sistema es incompatible pues $\text{rg}A \neq \text{rg}B$.

b) Para $k = 1$ el sistema es compatible determinado. Para resolverlo utilizamos la regla de Cramer:

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{2 - 1 + 1 - 1}{4 + 1 + 2 - 2 - 2 - 2} = \frac{1}{1} = 1$$

$$y=\frac{|A_y|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ -1 & 0 & -1\\ 2 & -1 & 2\end{vmatrix}}{1}=\frac{1-2+2-2}{1}=\frac{-1}{1}=-1 \quad ; \quad z=\frac{|A_z|}{|A|}=\frac{\begin{vmatrix}2 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 2 & -1 & -1\end{vmatrix}}{1}=\frac{-2+1-2+1}{1}=\frac{-2}{1}=-2$$

2.

a) (*0,75 puntos*) Determine el volumen del paralelepípedo determinado por los siguientes vectores: $\vec{u}=(1,1,1)$, $\vec{v}=(2,1,0)$ y $\vec{w}$, siendo $\vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}$, y donde el símbolo $\times$ representa el producto vectorial.

b) (*0,75 puntos*) Determine la ecuación del plano que pasa por el punto $P:(1,3,2)$ y es perpendicular a la recta.

$$r:\begin{cases}3x-2y = -1\\ 2y+3z=3\end{cases}$$

SOLUCIÓN.

a) Calculemos el vector $\vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{vmatrix}=2\vec{j}+\vec{k}-2\vec{k}-\vec{i}=-\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}=(-1,2,-1)$

El volumen del paralelepípedo es el valor absoluto del producto mixto de los tres vectores:

$$[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 0\\ -1 & 2 & -1\end{vmatrix}=-1+4+1+2=6 \;\Rightarrow\; \text{el volumen del paralelepípedo es de } 6\,u^3.$$

b) Obtengamos un vector direccional de la recta r. $\overrightarrow{n_1}=(3,-2,0)$ es un vector normal al primero de los planos que definen a la recta r y $\overrightarrow{n_2}=(0,2,3)$ es un vector normal al segundo de los planos. Un vector direccional de r es:

$$\vec{u}=\overrightarrow{n_1}\times\overrightarrow{n_2}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -2 & 0\\ 0 & 2 & 3\end{vmatrix}=-6\vec{i}+6\vec{k}-9\vec{j}=(-6,-9,6)\,//\,(2,3,-2)$$

Como el plano buscado es perpendicular a r, el vector direccional de r es normal al plano. La ecuación general del plano π es: $\quad 2x+3y-2z+D=0$

Y como $P\in\pi$: $\;2+9-4+D=0 \;\Rightarrow\; D=-7 \;\Rightarrow\;$ el plano es: $\;2x+3y-2z-7=0$

3.

a) (*1 punto*) Determine el límite:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\ln((1+x)^2)}-\frac{1}{x}\right)$$

b) (*1 punto*) Determine el valor de la constante k para que la función:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^4-1}{x-1}, & \text{si } x\neq 1\\ k-x\,, & \text{si } x=1\end{cases}$$

sea continua en $x=1$.

c) (*2 puntos*) La curva $y=x^2+1$ divide al rectángulo limitado por los vértices $A:(0,1)$, $B:(2,1)$, $C:(0,5)$ y $D:(2,5)$ en dos partes. Determine el área de cada una de esas dos partes.

SOLUCIÓN.

a) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\ln\left((1+x)^2\right)}-\frac{1}{x}\right)=\infty-\infty=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x-\ln\left((1+x)^2\right)}{x\cdot\ln\left((1+x)^2\right)}\right)=\frac{0}{0}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\left(\frac{2-\dfrac{1}{(1+x)^2}\cdot 2(1+x)}{\ln\left((1+x)^2\right)+x\cdot\dfrac{1}{(1+x)^2}\cdot 2(1+x)}\right)=$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2-\dfrac{2}{1+x}}{\ln\left((1+x)^2\right)+\dfrac{2x}{1+x}}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\dfrac{2+2x-2}{1+x}}{\dfrac{(1+x)\cdot\ln\left((1+x)^2\right)+2x}{1+x}}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2x}{(1+x)\cdot\ln\left((1+x)^2\right)+2x}\right)=\frac{0}{0}\overset{L'H}{=}$$

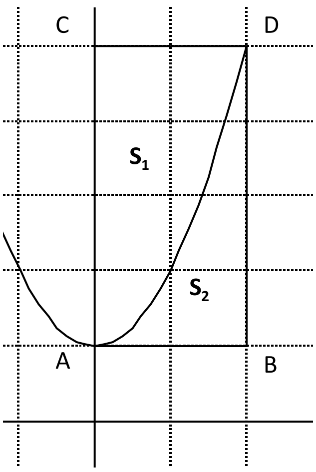
$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\ln\left((1+x)^2\right)+(1+x)\cdot\dfrac{2(1+x)}{(1+x)^2}+2}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{2}{\ln\left((1+x)^2\right)+2+2}\right)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

Nota: $\overset{L'H}{=}$ significa que se aplica la regla de L'Hôpital.

b) Para que la función sea continua en $x=1$ debe ser $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=f(1)$:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{x-1}=\dfrac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^2+1)\cdot(x+1)\cdot(x-1)}{x-1}=4\\ f(1)=k-1\end{array}\right|\ \Rightarrow\ k-1=4\ \Rightarrow\ k=5$$

c)



La curva $y=x^2+1$ es una parábola de eje OY, vértice en $(0\,,1)$ y que pasa por los puntos $(1\,,2)$ y $(2\,,5)$.

Las dos partes en que la parábola divide al rectángulo ABCD son S_1 y S_2. El lado CD del rectángulo es la recta $y=5$ y el lado AB es la recta $y=1$.

Tenemos:

$$S_1=\int_0^2\left[5-\left(x^2+1\right)\right]dx=\int_0^2\left(4-x^2\right)dx=\left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_0^2=\left(8-\frac{8}{3}\right)-0=\frac{16}{3}\,u^2$$

$$S_2=\int_0^2\left[\left(x^2+1\right)-1\right]dx=\int_0^2 x^2\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2=\frac{8}{3}-0=\frac{8}{3}\,u^2$$

4. Una encuesta realizada sobre el mes preferido, entre julio, agosto o septiembre, para salir de vacaciones arrojó los siguientes datos: un 40% prefiere julio, un 30% agosto y el resto prefiere el mes de septiembre. Entre los que prefieren el mes de julio, un 60% pasa sus vacaciones en un hotel; entre los que prefieren el mes de agosto un 40% elige hotel para sus vacaciones y entre los encuestados que prefieren septiembre, un 65% eligen hotel.

a) (*0,5 puntos*) Se elige un individuo al azar, calcule la probabilidad de que vaya a un hotel y le guste ir en agosto.

b) (*0,5 puntos*) Se elige un individuo al azar, calcule la probabilidad de que pase sus vacaciones en un hotel.

c) (*0,5 puntos*) Se elige al azar un individuo y dice que no pasa sus vacaciones en un hotel, calcule la probabilidad de que prefiera irse en agosto de vacaciones.

SOLUCIÓN.

Organicemos los datos en una tabla de contingencia (de doble entrada). Sobre un total de 100 personas, 40 prefieren julio, 30 prefieren agosto y el resto, es decir otros 30, prefieren septiembre. De los 40 que veranean en julio, un 60% ($40\cdot 0{,}60=24$) prefieren estar en hotel y el resto (16) no. De los 30 que veranean en agosto, un 40% ($30\cdot 0{,}40=12$) están en hotel y los 18 restantes no. De los 30 que prefieren veranear en septiembre, un 65%

	JULIO (J)	**AGOSTO (A)**	**SEPTIEMBRE (S)**	**TOTAL**
HOTEL (H)	$40\cdot 0{,}60=24$	$30\cdot 0{,}40=12$	$30\cdot 0{,}65=19{,}5$	55,5
NO HOTEL ($\overline{H}$)	16	18	10,5	44,5
TOTAL	40	30	30	100

($30 \cdot 0{,}65 = 19{,}5$) están en hotel y los 10,5 restantes, no. Para cada una de las filas y de las columnas, se calculan los totales.

a) Entre los 100 individuos hay 12 que prefieren veranear en agosto y en hotel: $p\left(H \cap A\right) = \dfrac{12}{100} = 0{,}12$

b) De entre las 100 personas hay 55,5 que prefieren el hotel: $p\left(H\right) = \dfrac{55{,}5}{100} = 0{,}555$

c) Sabemos que el individuo no pasa sus vacaciones en hotel por lo que nos encontramos entre los 44,5 que así lo prefieren. Los que, entre ellos, veranean en agosto son 18. Por tanto: $p\left(A / \overline{H}\right) = \dfrac{18}{44{,}5} = 0{,}4045$

OPCIÓN B

1.

a) (*1,5 puntos*) Estudie el rango de la matriz que aparece a continuación según los diferentes valores del parámetro real m.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & m & 1 \\ 0 & -2 & m \end{pmatrix}$$

b) (*1,5 puntos*) Determine la inversa de la matriz A anterior cuando $m = -1$.

SOLUCIÓN.

a) Estudiemos los valores de m para los que el rango es máximo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & m & 1 \\ 0 & -2 & m \end{vmatrix} = m^2 - 3m + 2 = 0 \;\Rightarrow\; m = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$$

▪ Para $m \neq 1$ y $m \neq 2$: $\operatorname{rg} A = 3$

▪ Para $m = 1$: $\operatorname{rg} A = 2$ pues el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 3 \neq 0$

▪ Para $m = 2$: $\operatorname{rg} A = 2$ pues el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 3 \neq 0$

b) Para $m = -1$: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$. Tenemos: $\left|A\right| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 3 + 2 = 6 \;\Rightarrow\; \exists A^{-1}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{(\text{Adj } A)^*} \begin{pmatrix} 3 & 3 & -6 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{(\text{Adj } A)^t} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ -6 & 2 & -4 \end{pmatrix} \xrightarrow{A^{-1} = (\text{Adj } A)^t / |A|} A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/6 & 1/6 \\ 1/2 & -1/6 & -1/6 \\ -1 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

*Adjuntos de los elementos de A:

$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 3$, $A_{12} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 3$, $A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -6$, $A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 1$, $A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$,

$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 2$, $A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$, $A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1$, $A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4$

2. (*1,5 puntos*) Determine la ecuación del plano que contiene a la recta:

$$r: \begin{cases} 3x + y = -1 \\ 4y + 3z = +5 \end{cases}$$

y pasa por el punto $A: (1,3,-1)$.

SOLUCIÓN.

La ecuación del haz de planos (conjunto de todos los planos que contienen a la recta) es:

$$3x + y + 1 + \lambda(4y + 3z - 5) = 0$$

De entre ellos, seleccionemos al plano que contiene al punto $A(1,3,-1)$:

$3+3+1+\lambda(12-3-5)=0 \;\Rightarrow\; 7+4\lambda=0 \;\Rightarrow\; \lambda=-\dfrac{7}{4}$ y, por tanto, el plano buscado es:

$$3x+y+1-\frac{7}{4}(4y+3z-5)=0 \;\Leftrightarrow\; 3x+y+1-7y-\frac{21}{4}z+\frac{35}{4}=0 \;\Leftrightarrow\; 12x-24y-21z+39=0 \;\Leftrightarrow\; 4x-8y-7z+13=0$$

3.

a) (*1 punto*) Considere la función:

$$f(x) = \frac{2x^3 + kx^2 + x + 3}{x^2 + 2}$$

Determine el valor de k para que la función $f(x)$ tenga como asíntota oblicua, cuando $x \to +\infty$, la recta $y = 2x - 1$.

b) (*1,5 puntos*) Determine

$$\int x(\ln(x))^2 dx$$

c) (*1,5 puntos*) Determine, si existen, los máximos, mínimos relativos y puntos de inflexión de la función:

$$f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x)$$

.

SOLUCIÓN.

a) Si $y = mx + n$ es una asíntota de la función f(x): $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ y $n = \lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x) - mx\right]$.

En nuestro caso: $m = 2$, $n = -1$:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{\dfrac{2x^3+kx^2+x+3}{x^2+2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3+kx^2+x+3}{x^3+2x} = 2$$

$$n = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2x^3+kx^2+x+3}{x^2+2} - 2x\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3+kx^2+x+3-2x^3-4x}{x^2+2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{kx^2-3x+3}{x^2+2} = k = -1 \;\Rightarrow\; k=-1$$

b) Procederemos a integrar “por partes”: $\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du$

$$\int x\left(\ln(x)\right)^2 dx = \left| \begin{matrix} u = \left(\ln(x)\right)^2 \;\Rightarrow\; du = 2\cdot\left(\ln(x)\right)\cdot\dfrac{1}{x}\cdot dx \\ dv = x\,dx \;\Rightarrow\; v = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}x^2\left(\ln(x)\right)^2 - \int \frac{x^2}{2}\,2\cdot\left(\ln(x)\right)\cdot\frac{1}{x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2\left(\ln(x)\right)^2 - \int x\cdot\left(\ln(x)\right)dx = \left| \begin{matrix} u = \ln(x) \;\Rightarrow\; du = \dfrac{1}{x}dx \\ dv = x\,dx \;\Rightarrow\; v = \dfrac{x^2}{2} \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}x^2\left(\ln(x)\right)^2 - \left[\frac{x^2}{2}\cdot\ln(x) - \int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\cdot dx\right] =$$

$$= \frac{1}{2}x^2\left(\ln(x)\right)^2 - \frac{1}{2}x^2\ln(x) + \frac{1}{4}x^2 + C = \frac{1}{2}x^2\left[\left(\ln(x)\right)^2 - \ln(x) + \frac{1}{2}\right] + C$$

c) En el cálculo de los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de la función necesitaremos sus tres primeras derivadas. Las obtenemos:

$$f(x)=\frac{1}{x}+\ln x \;\Rightarrow\; f'(x)=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{-1+x}{x^2} \;\Rightarrow\; f''(x)=\frac{x^2-(-1+x)2x}{x^4}=\frac{x^2+2x-2x^2}{x^4}=\frac{-x+2}{x^3} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; f'''(x)=\frac{-x^3-(-x+2)\cdot 3x^2}{x^6}=\frac{2x^3-6x^2}{x^6}=\frac{2x-6}{x^4}$$

▪ Máximos y mínimos relativos: $f'(x)=\dfrac{-1+x}{x^2}=0 \;\Rightarrow\; x=1$ (posible punto de máximo o de mínimo relativo).

$f''(1)>0 \;\Rightarrow\; x=1$ mínimo relativo: $(1\,,1)$

▪ Puntos de inflexión: $f''(x)=\dfrac{-x+2}{x^3}=0 \;\Rightarrow\; x=2$ (posible punto de inflexión)

$f'''(2)\neq 0 \;\Rightarrow\; x=2$ es un punto de inflexión: $\left(2\,,\dfrac{1}{2}+\ln 2\right)$

4. Un juego de ruleta tiene 25 casillas numeradas del 1 al 25. Un jugador gana si sale 2 o múltiplo de 2.

a) (*0,75 puntos*) Si juega 100 veces, calcule la probabilidad de que gane exactamente 10 veces. (En este apartado, NO es necesario finalizar los cálculos, puede dejarse indicada la probabilidad, precisando los números que la definen).

b) (*0,75 puntos*) Si juega 200 veces, calcule la probabilidad de que gane entre 90 y 110 veces, ambos valores incluidos.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

SOLUCIÓN.

a) Se trata de una situación dicotómica (sale par / no sale par) que da lugar a una distribución binomial.

Entre el 1 y el 25 hay 12 múltiplos de 2 luego la probabilidad de sacar par (éxito) en una jugada es $p=\dfrac{12}{25}=0{,}48$ y la de su suceso contrario es $q=0{,}52$.

Cuando repetimos 100 veces la jugada, en la distribución binomial $B(100\ ,0.48)$ la probabilidad de obtener 10 éxitos es: $p[x=10]=\binom{100}{10}\cdot 0,48^{10}\cdot 0,52^{90}$.

b) Estamos ante una distribución binomial $B(200\ ,0.48)$. Nos piden la probabilidad: $p\ [90\le x\le 110]$.

Como $n\cdot p=200\cdot 0,48=96>5$, $n\cdot q=200\cdot 0,52=104>5$ la distribución binomial se aproxima de forma perfecta a una distribución normal.

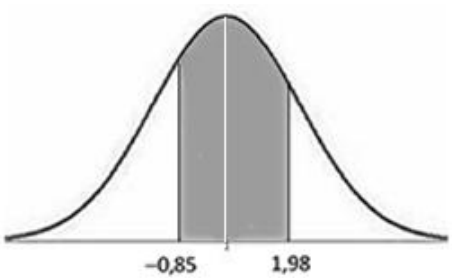
La media de la distribución normal es $\mu=n\cdot p=96$ y la desviación típica $\sigma=\sqrt{n\cdot p\cdot q}=\sqrt{200\cdot 0,48\cdot 0,52}=7,065$.

Por consiguiente, la distribución binomial $B(200\ ,0.48)$ se aproxima a una distribución normal $N(96\ ,7.065)$.

Ahora basta tipificar la variable para hacer uso de las tablas correspondientes a la normal $N(0\ ,1)$. El esquema es el siguiente:

$$x\in B(200\ ,0.48)\ \rightarrow\ x'\in N(96\ ,7.065)\ \rightarrow\ z=\frac{x'-\mu}{\sigma}=\frac{x'-96}{7,065}\in N(0\ ,1)$$

Tenemos:



$$p[90\le x\le 110]=p\left[\frac{90-96}{7,065}\le z\le\frac{110-96}{7,065}\right]=p[-0,85\le z\le 1,98]=$$

$$=p[z\le 1,98]-p[z\le -0,85]=(1)$$

$p[z\le 1,98]=0,9761$ (en la tabla)

$p[z\le -0,85]=p[z\ge 0,85]=1-p[z\le 0,85]=1-0,8025=0,1977$

Luego: $(1)=0,9761-0,1977=0,7784$