

- 1A.** a) Enuncia el Teorema del valor medio de Lagrange y da su interpretación geométrica. **(1 punto)**
b) Calcula un punto del intervalo $[0, 2]$ en el que la recta tangente a la gráfica de $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ sea paralela a la cuerda (o segmento) que une los puntos de la gráfica de $f(x)$ en $x = 0$ y $x = 2$.
(1,5 puntos)

2A. Calcula la integral

$$\int \frac{x+2}{x^3+x^2} dx \quad \text{(2,5 puntos)}$$

3A. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

se pide:

- a) Calcula A^n cuando $n \in \mathbb{N}$ es par. **(0,75 puntos)**
b) Resuelve la ecuación matricial $6A^{20}X = B - 3AX$, donde X es una matrix cuadrada de orden 3.
(Indicación: Sustituye de inicio el valor de A^{20} para facilitar los cálculos) **(1,75 puntos)**

4A. Dadas las rectas

$$r \equiv \frac{x+1}{2} = y = \frac{z-1}{3}, \quad s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = a + \lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

- a) Calcula el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que r y s se corten en un punto. Da dicho punto de corte. **(1,25 puntos)**
b) Para el valor de a obtenido, calcula la ecuación general del plano π que contiene a r y s . **(1,25 puntos)**

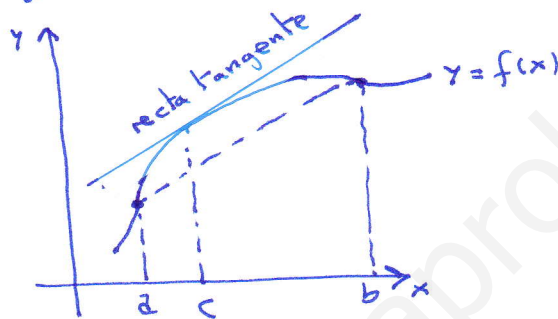
1A) a) Teorema del valor medio de Lagrange

Si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) , entonces

$$\exists c \in (a, b) \text{ t. q. } \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Interpretación geométrica

Si se cumplen las hipótesis del teorema, existe al menos un punto $c \in (a, b)$ en el que su recta tangente es paralela al segmento determinado por los puntos $A(a, f(a))$ y $B(b, f(b))$.



b) La función $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ es continua en $[0, 2]$ y derivable en $(0, 2)$, luego vamos a aplicar el TVM de Lagrange a f en dicho intervalo.

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 1 \\ f(2) = 17 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = \frac{17 - 1}{2} = \frac{16}{2} = 8 \left. \begin{array}{l} \\ f'(c) = 6c + 2 \end{array} \right\} \Rightarrow 6c + 2 = 8 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6c = 6 \Rightarrow \boxed{c = 1}$$

$$2A) \int \frac{x+2}{x^3+x^2} dx$$

Factorizamos el denominador

$$x^3 + x^2 = x^2(x+1) = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} -1 \\ 0 \text{ (doble)} \end{cases}$$

Descomponemos en fracciones simples

$$\frac{x+2}{x^3+x^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x^2} = \frac{Ax^2 + Bx(x+1) + C(x+1)}{(x+1)x^2} \Rightarrow$$

⇒ (igualando los numeradores y dándole valores a x):

$$Ax^2 + Bx(x+1) + C(x+1) = x+2 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \Rightarrow C=2 \\ x=-1 \Rightarrow A=1 \\ x=2 \Rightarrow 4A+6B+3C=4 \Rightarrow B=-1 \end{cases}$$

$$\frac{x+2}{x^3+x^2} = \frac{1}{x+1} + \frac{-1}{x} + \frac{2}{x^2}$$

Integral

$$\begin{aligned} \int \frac{x+2}{x^3+x^2} dx &= \int \frac{1}{x+1} dx - \int \frac{1}{x} dx + 2 \int \frac{1}{x^2} dx = \\ &= \ln|x+1| - \ln|x| + 2 \int x^{-2} dx = \ln|x+1| - \ln|x| + 2 \frac{x^{-2+1}}{-2+1} = \\ &= \boxed{\ln|x+1| - \ln|x| - \frac{2}{x} + C} \end{aligned}$$

$$3A) a) A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = I \cdot I = I$$

Por tanto, $A^n = I$ cuando n es par

$$b) 6A^{20}X = B - 3AX$$

Como $A^{20} = I$ se tiene: $6X = B - 3AX \Rightarrow 6X + 3AX = B \Rightarrow$

$$\Rightarrow (6I + 3A)X = B \Rightarrow (6I + 3A)^{-1} (6I + 3A)X = (6I + 3A)^{-1}B \Rightarrow$$

↑
Cuidado

$$\Rightarrow \boxed{X = (6I + 3A)^{-1}B}$$

Calculamos $6I + 3A$

$$6I + 3A = 6 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 0 & 9 & 0 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Calculamos $(6I + 3A)^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 6 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1:3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow{-6F_1 + F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 1 & 0 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow[\begin{array}{l} F_2: 9 \\ F_3: (-9) \end{array}]{F_2: 9} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/9 & 0 & 2/9 \end{array} \right) \xrightarrow{-2F_3 + F_1}$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2/9 & 0 & -1/9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/9 & 0 & 2/9 \end{array} \right) \Rightarrow (6I + 3A)^{-1} = \begin{pmatrix} 2/9 & 0 & -1/9 \\ 0 & 1/9 & 0 \\ -1/9 & 0 & 2/9 \end{pmatrix}$$

Calculamos X

$$\boxed{X = (6I + 3A)^{-1} B = \begin{pmatrix} 2/9 & 0 & -1/9 \\ 0 & 1/9 & 0 \\ -1/9 & 0 & 2/9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & -1/3 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ -1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}}$$

$$4A) \quad r \equiv \frac{x+1}{2} = y = \frac{z-1}{3}, \quad s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = a + \lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

a) Para calcular a de forma que se corten en un punto lo que hay que hacer es resolver el sistema formado por las ecuaciones de r y s:

$$r \equiv \begin{cases} x = -1 + 2\mu \\ y = \mu \\ z = 1 + 3\mu \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = a + \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} -1 + 2\mu = \lambda \\ \mu = a + \lambda \\ 1 + 3\mu = -\lambda \end{array} \right\} \begin{array}{l} \lambda - 2\mu = -1 \\ \lambda - \mu = -a \\ \lambda + 3\mu = -1 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \lambda - 2\mu = -1 \\ -\lambda - 3\mu = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5\mu = 0 \Rightarrow \underline{\underline{\mu = 0}} \Rightarrow \lambda - 2 \cdot 0 = -1 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda = -1}} \Rightarrow -1 + 0 = a \Rightarrow \boxed{a = 1}$$

El punto de corte de r y s es:

$$r \equiv \begin{cases} x = -1 + 2 \cdot 0 \\ y = 0 \\ z = 1 + 3 \cdot 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P(-1, 0, 1)}$$

b) El plano π que nos piden está determinado por $\vec{u}_r = (2, 1, 3)$, $\vec{u}_s = (1, 1, -1)$ y \vec{PG} donde P es el punto de intersección de r y s, y G es un punto genérico: $\vec{PG} = (x, y, z) - (-1, 0, 1) = (x+1, y, z-1)$.

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x+1 & 2 & 1 \\ y & 1 & 1 \\ z-1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \boxed{4x - 5y - z + 5 = 0 \equiv \pi}$$