

OPCIÓN A

Ejercicio 1. Calificación máxima: 6 puntos.

Resolver los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{e^x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen} x}$

c) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 2x}{\sqrt{x^2 + 5} - 3}$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - \frac{x^2+1}{x-2} \right)$

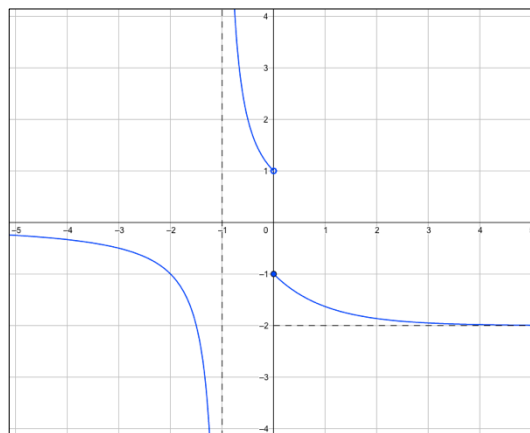
e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 2x} \right)$

f) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x}{x^2 - 1}$

Ejercicio 2. Calificación máxima: 2 puntos.

Dada la gráfica de la función $f(x)$, donde las líneas discontinuas representan las asíntotas de la función, determinar:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(0), \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 0} f(x),$$
$$f(-1), \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow -1} f(x), f(-2).$$



Ejercicio 3. Calificación máxima: 2 puntos.

Calcular la derivada de la función $f(x)$ sin simplificar la expresión resultante:

$$f(x) = \frac{2^{3x+1}}{\operatorname{sen}(\cos 3x)}$$

Ejercicio 1. Resuelve los siguientes límites:

- a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{e^x}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \text{sen}x}$ c) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 2x}{\sqrt{x^2 + 5} - 3}$
d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - \frac{x^2+1}{x-2} \right)$ e) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 2x})$ f) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x}{x^2 - 1}$

SOLUCIÓN

a) Como el denominador es un límite del tipo k^∞ , distinguiremos entre los casos $x \rightarrow +\infty$ y $x \rightarrow -\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{e^x} = \frac{+\infty}{e^{+\infty}} = \frac{+\infty}{+\infty} \quad (\text{L'Hopital}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x}{e^x} = \frac{+\infty}{e^{+\infty}} = \frac{+\infty}{+\infty} \quad (\text{L'Hopital}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{e^x} = \frac{6}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2}{e^x} = \frac{+\infty}{e^{-\infty}} = +\infty \cdot e^{+\infty} = +\infty \cdot (+\infty) = +\infty$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \text{sen}x} &= \frac{1 - 1 - 0}{0 - \text{sen}0} = \frac{0}{0} \quad (\text{L'Hopital}) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} \cdot (-1) - 2}{1 - \text{cos}x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \text{cos}x} = \\ &= \frac{1 + 1 - 2}{1 - 1} = \frac{0}{0} \quad (\text{L'Hopital}) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} \cdot (-1)}{0 - (-\text{sen}x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\text{sen}x} = \frac{1 - 1}{0} = \frac{0}{0} \quad (\text{L'Hopital}) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}(-1)}{\text{cos}x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\text{cos}x} = \frac{1 + 1}{1} = 2 \end{aligned}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 2x}{\sqrt{x^2 + 5} - 3} = \frac{4 - 4}{\sqrt{9} - 3} = \frac{0}{0} \quad (\text{L'Hopital}) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x + 2}{\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 5}} - 0} = \frac{-4 + 2}{\frac{-4}{2\sqrt{9}}} = \frac{-2}{\frac{-4}{6}} = 3$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - \frac{x^2+1}{x-2} \right) &= \frac{\infty}{\infty} - \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2}{x} - \frac{x^2}{x} \right) = \infty - \infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2(x-2) - (x^2+1)(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x^2 - (x^3 - x^2 + x - 1)}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x^2 - x^3 + x^2 - x + 1}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 - x + 1}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 2x}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 - 2x})(\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 2x})}{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 2x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 2x})^2 - (\sqrt{x^2 - 2x})^2}{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x - (x^2 - 2x)}{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x - x^2 + 2x}{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 2x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 2x}} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{x + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{2x} = 2 \end{aligned}$$

f) Como es un límite del tipo $k/0$, obtendremos los límites laterales en $x = -1$:

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x}{x^2 - 1} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x}{x^2 - 1} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

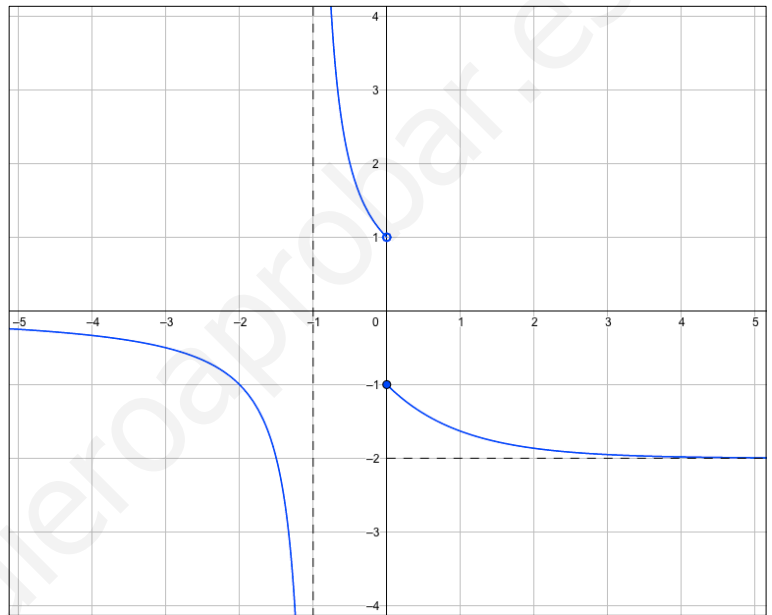
$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x}{x^2 - 1} = \nexists$$

Ejercicio 2. Dada la gráfica de la función $f(x)$, donde las líneas discontinuas representan las asíntotas de la función, determinar:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(0), \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 0} f(x), f(-1), \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow -1} f(x), f(-2).$$



SOLUCIÓN

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2, f(0) = -1, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \nexists, f(-1) = \nexists,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \nexists, f(-2) = -1.$$

Ejercicio 3. Calcular la derivada de la función $f(x)$ sin simplificar la expresión resultante:

$$f(x) = \frac{2^{3x+1}}{\operatorname{sen}(\cos 3x)}$$

SOLUCIÓN

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2^{3x+1})' \cdot \operatorname{sen}(\cos 3x) - 2^{3x+1} \cdot (\operatorname{sen}(\cos 3x))'}{\operatorname{sen}^2(\cos 3x)} = \\ &= \frac{2^{3x+1} \cdot \ln 2 \cdot (3x+1)' \cdot \operatorname{sen}(\cos 3x) - 2^{3x+1} \cdot \cos(\cos 3x) \cdot (\cos 3x)'}{\operatorname{sen}^2(\cos 3x)} = \\ &= \frac{2^{3x+1} \cdot \ln 2 \cdot 3 \cdot \operatorname{sen}(\cos 3x) - 2^{3x+1} \cdot \cos(\cos 3x) \cdot (-\operatorname{sen} 3x) \cdot (3x)'}{\operatorname{sen}^2(\cos 3x)} = \\ &= \frac{2^{3x+1} \cdot \ln 2 \cdot 3 \cdot \operatorname{sen}(\cos 3x) + 2^{3x+1} \cdot \cos(\cos 3x) \cdot \operatorname{sen} 3x \cdot 3}{\operatorname{sen}^2(\cos 3x)} \end{aligned}$$