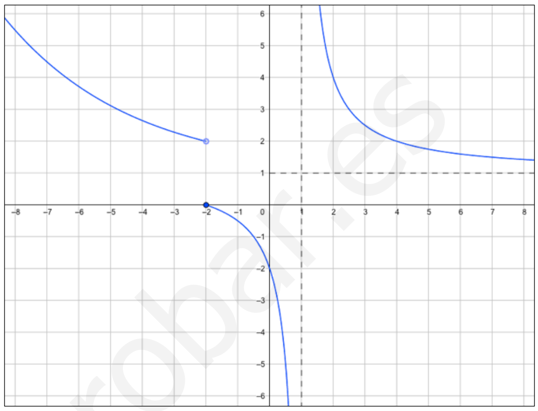
Ejercicio 1. **Calificación máxima:** 6 puntos.
Resolver los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to\infty}(e^{-x}-2)$ b) $\lim_{x\to 0}\frac{1+x-e^{2x}}{sen3x}$ c) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}$

d) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x-1}-\frac{x^2+1}{x}\right)$ e) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-4x}\right)$ f) $\lim_{x\to -1}\frac{2x}{(1+x)^2}$

Ejercicio 2. **Calificación máxima:** 2 puntos.
Dada la gráfica de la función $f(x)$, donde las líneas discontinuas representan las asíntotas de la función, determinar:



$\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $f(-2)$, $\lim_{x\to-2^-} f(x)$, $\lim_{x\to-2^+} f(x)$,
$\lim_{x\to-2} f(x)$, $f(1)$, $\lim_{x\to1^-} f(x)$, $\lim_{x\to1^+} f(x)$, $\lim_{x\to1} f(x)$, $f(0)$.

Ejercicio 3. **Calificación máxima:** 2 puntos.
Calcular la derivada de las función $f(x)$ sin simplificar la expresión resultante:

$$f(x)=\frac{ln(sen3x)}{sen(ln3x)}$$

<u>Ejercicio</u> 1. Resuelve los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}(e^{-x}-2)$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x-e^{2x}}{sen3x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}$

d) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x-1}-\dfrac{x^2+1}{x}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-4x}\right)$

f) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x}{(1+x)^2}$

<u>SOLUCIÓN</u>

a) Distinguiremos entre los casos $x\to+\infty$ y $x\to-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}(e^{-x}-2)=e^{-\infty}-2=\frac{1}{e^{+\infty}}-2=\frac{1}{+\infty}-2=0-2=-2$$

$$\lim_{x\to-\infty}(e^{-x}-2)=e^{+\infty}-2=+\infty-2=+\infty$$

b) $$\lim_{x\to 0}\frac{1+x-e^{2x}}{sen3x}=\frac{1+0-1}{sen0}=\frac{0}{0}=(\text{L´Hopital})=\lim_{x\to 0}\frac{0+1-e^{2x}\cdot 2}{cos3x\cdot 3}=\frac{0+1-1\cdot 2}{1\cdot 3}=-\frac{1}{3}$$

c) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}=(\text{L´Hopital})=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}}{3}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{3}=\frac{1}{3}$$

d) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x-1}-\frac{x^2+1}{x}\right)=\frac{\infty}{\infty}-\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x}-\frac{x^2}{x}\right)=\infty-\infty=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-(x^2+1)(x-1)}{(x-1)x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-(x^3-x^2+x-1)}{x^2-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x^3+x^2-x+1}{x^2-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x+1}{x^2-3x+2}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

e) $$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2-4x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-4x}\right)\left(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-4x}\right)}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-4x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x}\right)^2-\left(\sqrt{x^2-4x}\right)^2}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-4x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-(x^2-4x)}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-4x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-x^2+4x}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-4x}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{6x}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2-4x}}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x}{\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x}{\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x}{x+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x}{2x}=3$$

f) Como es un límite del tipo $k/0$, obtendremos los límites laterales en $x=-1$:

$$\lim_{x\to-1^+}\frac{2x}{(1+x)^2}=\frac{-2}{0^+}=-\infty$$

$$\lim_{x\to-1^-}\frac{2x}{(1+x)^2}=\frac{-2}{0^+}=-\infty$$

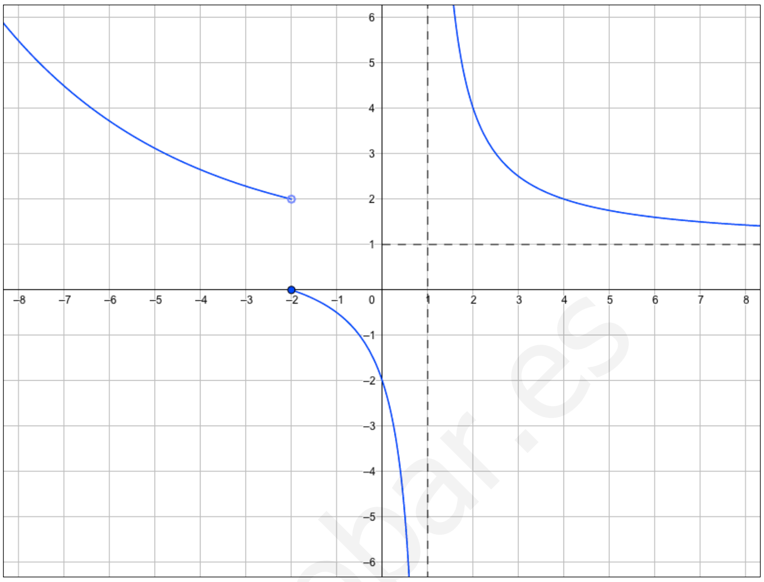
$$\lim_{x\to-1}\frac{2x}{(1+x)^2}=\nexists$$

<u>Ejercicio</u> 2. Dada la gráfica de la función $f(x)$, donde las líneas discontinuas representan las asíntotas de la función, determinar:

$\operatorname{Lim}_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $f(-2)$, $\lim_{x\to-2^-} f(x)$,

$\lim_{x\to-2^+} f(x)$, $\lim_{x\to-2} f(x)$, $f(1)$, $\lim_{x\to1^-} f(x)$,

$\lim_{x\to1^+} f(x)$, $\lim_{x\to1} f(x)$, $f(0)$.



<u>SOLUCIÓN</u>

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$, $f(-2) = 0$, $\lim_{x\to-2^-} f(x) = 2$, $\lim_{x\to-2^+} f(x) = 0$, $\lim_{x\to-2} f(x) = \nexists$, $f(1) = \nexists$,

$\lim_{x\to1^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to1^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-1} f(x) = \nexists$, $f(0) = -2$.

<u>Ejercicio</u> 3. Calcular la derivada de las función $f(x)$ sin simplificar la expresión resultante:

$$f(x) = \frac{ln(sen3x)}{sen(ln3x)}$$

<u>SOLUCIÓN</u>

$$f'(x) = \frac{(ln(sen3x))' \cdot sen(ln3x) - ln(sen3x) \cdot \big(sen(ln3x)\big)'}{sen^2(ln3x)} =$$

$$= \frac{\frac{(sen3x)'}{sen3x} \cdot sen(ln3x) - ln(sen3x) \cdot cos(ln3x) \cdot (ln3x)'}{sen^2(ln3x)} =$$

$$= \frac{\frac{3 \cdot cos3x}{sen3x} \cdot sen(ln3x) - ln(sen3x) \cdot cos(ln3x) \cdot \frac{3}{3x}}{sen^2(ln3x)}$$