

Ejercicio 1. Calificación máxima: 5 puntos.

Dadas la matrices dependientes del parámetro real m :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 2 & 1 & m+1 \\ 3 & -2 & m-4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & m \\ m & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

se pide:

- (2 puntos) Estudiar para qué valores de m la matriz A tiene inversa.
- (3 puntos) Para $m = 0$, resolver la ecuación matricial $AX = BB^t$.

Ejercicio 2. Calificación máxima: 5 puntos.

Dado el sistema:

$$\begin{cases} mx + my + 2z = m \\ x + (m-2)y = -1 \\ 2y + 2z = 2 \end{cases}$$

se pide:

- (3 puntos) Discutirlo según los valores del parámetro m .
- (2 puntos) Resolverlo, si es posible, para $m = 5$.

Ejercicio 1. Dadas la matrices dependientes del parámetro real m :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 2 & 1 & m+1 \\ 3 & -2 & m-4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & m \\ m & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

se pide:

- Estudiar para qué valores de m la matriz A tiene inversa.
- Para $m = 0$, resolver la ecuación matricial $AX = BB^t$.

Solución.-

- a) La matriz A tendrá inversa si $|A| \neq 0$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ 2 & 1 & m+1 \\ 3 & -2 & m-4 \end{vmatrix} = m - 4 - 4m + 3m + 3 - (3m - 2m - 2 + 2m - 8) = -1 - (3m - 10) =$$

$$= -1 - 3m + 10 = -3m + 9 = 0 \quad \rightarrow \quad 3m = 9 \quad \rightarrow \quad m = 3$$

La matriz A tiene inversa si $m \neq 3$.

- b) Para $m = 0$, las matrices A y B son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Multiplicando a ambos miembros de la ecuación por la izquierda por A^{-1} :

$$A^{-1}AX = A^{-1}BB^t \quad \rightarrow \quad X = A^{-1}BB^t \quad (\text{I})$$

Obtenemos la inversa de la matriz A :

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{Adj}A)^t$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -4 \end{vmatrix} = -4 + 3 - (-2 - 8) = -1 + 10 = 9$$

$$\text{Adj}A = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 11 & -7 \\ 4 & -4 & 5 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(\text{Adj}A)^t = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 11 & -4 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 11 & -4 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo en (I):

$$X = A^{-1}BB^t = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 11 & -4 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -2 & 4 & 1 \\ 11 & -4 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -2-1 & 4+2 & 2+8+5 \\ 11+1 & -4-2 & -11-8-5 \\ -7+1 & 5-2 & 7+10-5 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -3 & 6 & 15 \\ 12 & -6 & -24 \\ -6 & 3 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 5/3 \\ 4/3 & -2/3 & -8/3 \\ -2/3 & 1/3 & 4/3 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 2. Dado el sistema:

$$\begin{cases} mx + my + 2z = m \\ x + (m-2)y = -1 \\ 2y + 2z = 2 \end{cases}$$

se pide:

- Discutirlo según los valores del parámetro m .
- Resolverlo, si es posible, para $m = 5$.

Solución.-

- a) Estudiamos el rango de la matriz ampliada $M^* = \begin{pmatrix} m & m & 2 & m \\ 1 & m-2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} m & m & 2 \\ 1 & m-2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2m(m-2) + 4 - 2m = 2m^2 - 4m + 4 - 2m = 2m^2 - 6m + 4 = 0$$

$$m = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4}}{2 \cdot 2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{4} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{4} = \frac{6 \pm 2}{4} =$$

$$m_1 = \frac{6+2}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

$$m_2 = \frac{6-2}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

Para $m \neq \{1, 2\}$, $rg(M^*) = 3$

Para $m = 1$, $M^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 2 - (-2 + 2) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 - (-2 + 4) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 4 - (-2 + -4) = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$$

Para $m = 1$, $rg(M^*) = 2$

Para $m = 2$, $M^* = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 - (-4 + 4) = 4 \neq 0$$

Para $m = 2$, $rg(M^*) = 3$

Estudiamos el rango de la matriz de los coeficientes $M = \begin{pmatrix} m & m & 2 \\ 1 & m-2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} m & m & 2 \\ 1 & m-2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow m = \{1, 2\}$$

Para $m \neq \{1, 2\}$, $rg(M) = 3$

Para $m = 1$, $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0$$

Para $m = 1$, $rg(M) = 2$

Para $m = 2$, $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 = -2 \neq 0$$

Para $m = 2$, $rg(M) = 2$

Para $m \neq \{1, 2\}$, $rg(M) = rg(M^*) = 3$ (n° incógnitas) \rightarrow Sistema compatible determinado

Para $m = 1$, $rg(M) = rg(M^*) = 2 < 3$ (n° incógnitas) \rightarrow Sistema compatible indeterminado

Para $m = 2$, $rg(M) \neq rg(M^*) \rightarrow$ Sistema incompatible

b) Para $m = 5$, el sistema es compatible determinado, luego tendrá solución única. Resolviéndolo por Cramer:

$$M^* = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow |M| = 30 + 4 - 10 = 24$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 5 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{|M|} = \frac{30 - 4 - (12 - 10)}{24} = \frac{24}{24} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{|M|} = \frac{-10 + 4 - 10}{24} = \frac{-16}{24} = -\frac{2}{3}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{|M|} = \frac{30 + 10 - (-10 + 10)}{24} = \frac{40}{24} = \frac{5}{3}$$

Los tres planos se cortan en el punto $A(1, -2/3, -5/3)$