1. Hallar a y b para que al dividir el polinomio $P(x) = 2x^5 - 3x^4 - 31x^3 + ax^2 + bx + 30$, sea divisible entre $(x+1)$ y por $(x-1)$. (1 punto)
   Una vez obtenidos los valores de a y b, calcula las raíces del polinomio y escribe su factorización. (0.5 puntos)

2. Simplifica las siguientes fracciones algebraicas: (2 puntos)
   a) $\frac{3x^3-2x^2-7x-2}{x^3-4x} =$

   b) $\frac{4x^2-x^4}{x^2-4x+4} =$

3. Realiza las siguientes operaciones simplificando el resultado: (3 puntos)
   a) $\frac{x^2-3x}{x^2-9} : \frac{x-2}{x^2-5x+6} =$

   b) $\frac{x^2-4}{x^2-1} : \frac{x^3+3x^2-4}{x^2-x-2} =$

4. Opera y simplifica las siguientes fracciones algebraicas: (3.5 puntos)
   a) $\frac{3}{x^3-x^2-4x+4} - \frac{x-1}{x^2-4} + \frac{x-2}{x^2-3x+2} =$

   b) $\frac{1-x}{x^2-1} - \frac{x}{x+1} + \frac{2}{x-1} =$

   c) $\frac{3-3x}{1-x^2} + \frac{x+2}{x-1} =$

<u>EJERCICIO EXTRA</u> (Hasta 1 punto):
Se sabe que $A(x) = x^2 + bx + c$ es divisible entre $(x+1)$ y que, al dividirlo entre $(x-1)$ y entre $(x-3)$ da el mismo resto. Hállense b y c.

1. Hallar a y b para que, al dividir el polinomio $P(x) = 2x^5 - 3x^4 - 31x^3 + ax^2 + bx + 30$, sea divisible entre $(x+1)$ y por $(x-1)$ (1 punto)
Una vez obtenidos los valores de a y b, calcula las raíces del polinomio y escribe su factorización. (0.5 puntos)

$(x+1)$ $P(-1) = 0 \Rightarrow 2\cdot(-1)^5 - 3(-1)^4 - 31(-1)^3 + a(-1)^2 + b(-1) + 30 = 0 \Rightarrow$

$P(-1) = -2 - 3 + a - b + 30 = 0 \Rightarrow \boxed{a - b = -56}$

$(x-1)$ $P(1) = 0 \Rightarrow P(1) = 2 - 3 - 31 + a + b + 30 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{a + b = 2}$

$$\begin{array}{r} a - \cancel{b} = -56 \\ + \quad a + \cancel{b} = 2 \\ \hline 2a \quad = -54 \end{array} \Rightarrow a = \frac{-54}{2} = \underline{\underline{-27}}$$

$a + b = 2 \Rightarrow a = -27 \Rightarrow -27 + b = 0 \Rightarrow \underline{\underline{b = 29}}$

$P(x) = 2x^5 - 3x^4 - 31x^3 - 27x^2 + 29x + 30$

$\begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$

	2	-3	-31	-27	29	30
1		2	-1	-32	-59	-30
	2	-1	-32	-59	-30	0
-1		-2	3	29	30	
	2	-3	-29	-30	0	
-2		-4	14	30		
	2	-7	-15	0		

$P(x) = (x-1)(x+1)(2x^3 - 3x^2 - 29x - 30)$

$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 29x - 30 = 0$

Posibles divisores:

$\pm1, \pm2, \pm3, \pm5, \pm6, \pm10, \pm15, \pm30$

$f(x) = 0$

$P(x) = (x-1)(x+1)(x+2)\underbrace{(2x^2 - 7x - 15)}_{g(x) = 0}$.

$2x^2 - 7x - 15 = 0$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{7^2 + 4\cdot2\cdot15}}{2\cdot2} = \frac{7 \pm 13}{4} = \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = \frac{-3}{2} \end{cases}$$

$P(x) = 2(x-1)(x+1)(x+2)(x-5)\underline{\underline{\left(x + \frac{3}{2}\right)}}$.

$2\left(x + \frac{3}{2}\right) = 2x + \cancel{2}\frac{3}{\cancel{2}} = 2x + 3$

$P(x) = \underline{\underline{(x-1)(x+1)(x+2)(x-5)(2x+3)}}$.

SIMPLIFICAR

a) $\frac{3x^3-2x^2-7x-2}{x^3-4x} = P(x)$

DENOMINADOR: $x^3-4x=0. \Rightarrow x(x^2-4)=0$

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

$x(x^2-4)=x(x-2)(x+2)$

NUMERADOR: $3x^3-2x^2-7x-2=0$

Posibles divisores

$\pm 1, \pm 2.$

	3	-2	-7	-2
2		6	8	2
	3	4	1	0

$f(x)=3x^3-2x^2-7x-2$

$f(x)=0 \Rightarrow f(2)=0.$

$f(x)=(x-2)\underbrace{(3x^2-4x+1)}_{=0}.$

$3x^2-4x+1=0.$

$x=\frac{-4\pm\sqrt{16-12}}{6} = \begin{cases} x_1 = -1/3 \\ x_2=-1 \end{cases}$

$f(x)=3(x-2)(x+1)(x+\frac{1}{3})$

$3(x+\frac{1}{3})=3x+\cancel{3}\cdot\frac{1}{\cancel{3}}=3x+1.$

$f(x)=(x-2)(x+1)(3x+1)$

$P(x)=\frac{\cancel{(x-2)}(x+1)(3x+1)}{x\cancel{(x-2)}(x+2)}=\frac{(x+1)(3x+1)}{x(x+2)}$

SIMPLIFICAR:

b) $\dfrac{4x^2-x^4}{x^2-4x+4} = P(x).$

DENOMINADOR: $x^2-4x+4=0.$

$\Rightarrow (x-2)^2 = x^2-4x+4.$

$x = \dfrac{4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = \dfrac{4}{2} = 2 \Rightarrow$ Solución doble.

NUMERADOR: $4x^2 - x^4 = 0.$

$x^2(4-x^2)=0 \begin{cases} x^2=0 \\ 4-x^2=0 \Rightarrow (2-x)(2+x)=0 \end{cases}$

$a^2-b^2=(a-b)(a+b).$

$\boxed{4-x^2 \neq x^2-4}$

$4-x^2=0 \Rightarrow 4 = x^2 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2.$

$4-x^2=-(x-2)(x+2).$

$P(x) = \dfrac{-x^2\cancel{(x-2)}(x+2)}{(x-2)^{\cancel{2}}} = \dfrac{-x^2(x+2)}{x-2}$

a) $\dfrac{x^2-3x}{x^2-9} : \dfrac{x-2}{x^2-5x+6} = P(x).$

* $x^2-3x=0 \Rightarrow x(x-3)=0. \begin{cases} x=0 \\ x=3 \end{cases}$
* $x^2-9=0 \Rightarrow x=\pm 3. \Rightarrow x^2-9=(x-3)(x+3).$
* $x^2-5x+6=0 \Rightarrow x = \dfrac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \dfrac{5\pm 1}{2} \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

$x^2-5x+6 = (x-3)(x-2).$

$P(x) = \dfrac{x(x-3)}{(x-3)(x+3)} : \dfrac{x-2}{(x-3)(x-2)} = \dfrac{x(x-3)^{\cancel{2}}\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-3)}(x+3)\cancel{(x-2)}} =$

$= \dfrac{x(x-3)}{x+3}$

OPERA Y SIMPLIFICA LAS SIGUIENTES FRACCIONES ALGEBRAICAS

b) $\frac{x^2-4}{x^2-1} \cdot \frac{x^3+3x^2-4}{x^2-x-2} = P(x).$

$* \; x^2-4=0 \Rightarrow x=\pm 2 \Rightarrow x^2-4=(x-2)(x+2).$

$* \; x^2-1=(x-1)(x+1).$

$* \; x^3+3x^2-4=0$ Posibles divisores: $\pm 1, \pm 2, \pm 4.$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 3 & 0 & -4 \\ 1 & & 1 & 4 & 4 \\ \hline & 1 & 4 & 4 & \underline{|0} \end{array}$$

$f(x) = x^3+3x^2-4$

$f(x)=0 \Rightarrow f(1)=0.$

$f(x)=(x-1)\underbrace{(x^2+4x+4)}_{=0}$

$x^2+4x+4=0.$

$x = \frac{-4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = \frac{-4}{2} = -2$ Solución doble

$x^2+4x+4=(x+2)^2$

$f(x)=(x-1)(x+2)^2.$

$* \; x^2-x-2=0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1. \end{cases}$

$x^2-x-2=(x-2)(x+1).$

$$P(x) = \frac{(x-2)\cancel{(x+2)}(x-2)\cancel{(x+1)}}{(x-1)\cancel{(x+1)}(x-1)(x+2)^{\cancel{2}}} = \frac{(x-2)^2}{(x-1)^2(x+2)}$$

OPERA Y SIMPLIFICA:

a) $\dfrac{3}{x^3-x^2-4x+4} - \dfrac{x-1}{x^2-4} + \dfrac{x-2}{x^2-3x+2} = P(x).$

$\quad f(x) \qquad g(x) \qquad s(x).$

$* f(x) = x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$ Posibles divisores: $\pm 1, \pm 2, \pm 4.$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & -4 & 4 \\ 1 & & 1 & 0 & -4 \\ \hline & 1 & 0 & -4 & \underline{|0} \end{array}$$

$f(x) = 0 \to x = 1.$

$f(x) = (x-1)(x^2-4) =$

$= (x-1)(x-2)(x+2).$

$* g(x) = x^2 - 4 = 0. \Rightarrow x^2 - 4 = (x-2)(x+2).$

$* s(x) = x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1. \end{cases}$

$s(x) = (x-2)(x-1).$

$$P(x) = \frac{3}{(x-1)(x-2)(x+2)} - \frac{x-1}{(x-2)(x+2)} + \frac{x-2}{(x-2)(x-1)}.$$

$\text{mcm}(f(x), g(x), s(x)) = (x-1)(x+2)(x-2)$

$$P(x) = \frac{3 - (x-1)^2 + (x-2)(x+2)}{(x-1)(x+2)(x-2)} =$$

$$= \frac{3 - (x^2 - 2x + 1) + x^2 - 4}{(x-1)(x+2)(x-2)} = \frac{3 - \cancel{x^2} + 2x - 1 + \cancel{x^2} - 4}{(x-1)(x+2)(x-2)} =$$

$$= \frac{2x-2}{(x-1)(x+2)(x-2)} = \frac{2\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+2)(x-2)} = \frac{2}{(x+2)(x-2)}$$

$$\frac{1-x}{x^2-1}-\frac{x}{x+1}+\frac{2}{x-1}=P(x).$$

$$P(x)=\frac{1-x}{(x-1)(x+1)}-\frac{x}{x+1}+\frac{2}{x-1}$$

$$mcm\left((x-1)(x+1);\ (x+1);\ (x-1)\right)=(x-1)(x+1)$$

$$P(x)=\frac{(1-x)-x(x-1)+2(x+1)}{(x-1)(x+1)}=$$

$$=\frac{1-\cancel{x}-x^2+\cancel{x}+2x+2}{(x-1)(x+1)}=\frac{-x^2+2x+3}{\underbrace{(x-1)(x+1)}}=P(x).$$

$$-x^2+2x+3=0$$

$$x^2-2x-3=0 \Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{\cancel{4+12}}^{\,4}}{2}\ \Bigg\{\begin{array}{l}x_1=3\\ x_2=-1.\end{array}$$

$$-x^2+2x+3=-\underbrace{(x+1)(x-3)}$$

$$P(x)=\frac{-\cancel{(x+1)}(x-3)}{(x-1)\cancel{(x+1)}}=\frac{-(x-3)}{x-1}$$

$$\frac{3-3x}{1-x^2} + \frac{x+2}{x-1} = \frac{3\cancel{(1-x)}}{\cancel{(1-x)}(1+x)} + \frac{x+2}{x-1} =$$

$1-x^2 \neq x^2-1.$

$1-x^2 = (1-x)(1+x).$

$x^2-1 = (x-1)(x+1).$

$x-1 = -(1-x)$

$$= \frac{3}{x+1} + \frac{x+2}{x-1} =$$

$$= \frac{3(x-1)+(x+2)(x+1)}{(x+1)(x-1)} =$$

$$= \frac{3x-3+x^2+x+2x+2}{(x+1)(x-1)} = \frac{x^2+6x-1}{(x+1)(x-1)}$$

$$x^2+6x-1=0 \Rightarrow x = \frac{-6\pm\sqrt{36+4}}{2} = \ldots$$

No comparte soluciones con el polinomio del denominador, por lo tanto no se puede simplificar.