Ejercicios y problemas propuestos

Página 379

Para practicar

Integral definida

1 **Calcula las siguientes integrales:**

a) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ **b)** $\displaystyle\int_1^4 \frac{x-1}{\sqrt{x}}\,dx$ **c)** $\displaystyle\int_{1/e}^{e} 2\ ln\ x\ dx$ **d)** $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{x^2+1}\,dx$

a) $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 2x(x^2+1)^{-1/2}\,dx = \left[\frac{1}{2}\,\frac{(x^2+1)^{1/2}}{1/2}\right]_0^2 = \left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^2 = \sqrt{5}-\sqrt{1} = \sqrt{5}-1$

b) $\displaystyle\int_1^4 \frac{x-1}{\sqrt{x}}\,dx = \int_1^4 \left(\frac{x}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = \int_1^4 (x^{1/2} - x^{-1/2})\,dx = \left[\frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^{1/2}}{1/2}\right]_1^4 = \left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3} - 2\sqrt{x}\right]_1^4 =$

$\displaystyle = \left(\frac{2}{3}\sqrt{64} - 2\sqrt{4}\right) - \left(\frac{2}{3}\sqrt{1} - 2\sqrt{1}\right) = \left(\frac{2}{3}\cdot 8 - 4\right) - \left(\frac{2}{3} - 2\right) = \frac{4}{3} - \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{8}{3}$

c) $\displaystyle\int_{1/e}^{e} 2\ ln\ x\ dx$. Integramos por partes $\displaystyle\int ln\ x\ dx$:

$$\left.\begin{array}{l} u = ln\ x \ \rightarrow\ du = \dfrac{1}{x}\,dx \\ dv = dx \ \rightarrow\ v = x \end{array}\right\}$$

$\displaystyle\int ln\ x\ dx = x\ ln\ x - \int 1\ dx = x\ ln\ x - x$

$\displaystyle\int_{1/e}^{e} 2\ ln\ x = \left[2x\ ln\ x - 2x\right]_{1/e}^{e} = (2e\ ln\ e - 2e) - \left(2\cdot\frac{1}{e}\ ln\ \frac{1}{e} - 2\cdot\frac{1}{e}\right) =$

$\displaystyle = (2e - 2e) - \left(\frac{2}{e}(-1) - \frac{2}{e}\right) = -\left(-\frac{4}{e}\right) = \frac{4}{e}$

d) $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{x^2+1}\,dx$

Calculamos una primitiva:

$$\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\,dx = \int\left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right)dx = x - arc\ tg\ x$$

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{x^2}{x^2+1}\,dx = \left[x - arc\ tg\ x\right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = \left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right) - \left(-\sqrt{3} + \frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} + \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}$$

2 **Calcula:** $\displaystyle\int_0^{\pi/4} sen\ x\ cos\ x\ dx$

$$\int_0^{\pi/4} sen\ x \cdot cos\ x\ dx \overset{(*)}{=} \int_0^{\sqrt{2}/2} t\ dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\sqrt{2}/2} = \frac{1}{4}$$

(*) Aplicamos el siguiente cambio:

$sen\ x = t;\ \ cos\ x \cdot dx = dt$

para $x = 0;\ \ t = 0$

para $x = \dfrac{\pi}{4};\ \ t = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

3 **Halla el valor de la integral definida de la función $f(x) = \dfrac{1}{x+1} - 3\cos(2\pi x)$ en el intervalo $I = [0, 2]$.**

$$\int_0^2 \left(\frac{1}{x+1} - 3\cos(2\pi x)\right) dx = \left[\ln(x+1) - \frac{3 \cdot sen(2\pi x)}{2\pi}\right]_0^2 = \ln 3 - \ln 1 = \ln 3$$

4 **Halla:**

$$\int_0^3 (x^2 - x)\, dx \;\; \text{y} \;\; \int_0^3 |x^2 - x|\, dx$$

$$\int_0^3 (x^2 - x)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^3 = 9 - \frac{9}{2} = \frac{9}{2}$$

$$|x^2 - x| = \begin{cases} x^2 - x & \text{si } x < 0 \\ -(x^2 - x) & \text{si } 0 \le x < 1 \\ x^2 - x & \text{si } 1 \le x \end{cases}$$

$$\int_0^3 |x^2 - x|\, dx = \int_0^1 (-x^2 + x)\, dx + \int_1^3 (x^2 - x)\, dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{x} - \frac{x^2}{2}\right]_1^3 =$$

$$= -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 9 - \frac{9}{2} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) = \frac{29}{6}$$

5 **Calcula las siguientes integrales:**

a) $\displaystyle\int_0^2 f(x)\, dx$ **siendo** $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 \le x \le 2 \end{cases}$

b) $\displaystyle\int_{-1}^3 f(x)\, dx$ **siendo** $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } -1 \le x \le 1 \\ x^2 + 1 & \text{si } 1 < x \le 3 \end{cases}$

a) $\displaystyle\int_0^2 f(x)\, dx = \int_0^1 x^2\, dx + \int_1^2 (2 - x)\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{1}{3} + 4 - 2 - \left(2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{6}$

b) $\displaystyle\int_{-1}^3 f(x)\, dx = \int_{-1}^1 x\, dx + \int_1^3 (x^2 + 1)\, dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^1 + \left[\frac{x^3}{3} + x\right]_1^3 = 0 + 12 - \left(\frac{1}{3} + 1\right) = \frac{32}{3}$

Área entre $f(x)$, eje X, $x = a$, $x = b$

6 **a) Calcula:** $\displaystyle\int_{-1}^4 (x^2 + x - 2)\, dx$

b) Halla el área que determina la curva $y = x^2 + x - 2$ con el eje X entre las abscisas -1 y 4.

a) $\displaystyle\int_{-1}^4 (x^2 + x - 2)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_{-1}^4 = \frac{64}{3} + \frac{16}{2} - 8 - \left(\frac{-1}{3} + \frac{1}{2} + 2\right) = \frac{115}{6}$

b) Los puntos de corte de la curva con el eje X son: $x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x = 1,\ x = -2$

De estos dos valores, uno se encuentra en el intervalo $[-1, 4]$ y es $x = 1$.

$$G(x) = \int (x^2 + x - 2)\, dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x$$

$$G(-1) = \frac{13}{6};\ G(1) = -\frac{7}{6};\ G(4) = \frac{64}{3}$$

$$\int_{-1}^1 (x^2 + x - 2)\, dx = G(1) - G(-1) = -\frac{7}{6} - \frac{13}{6} = -\frac{10}{3}$$

$$\int_1^4 (x^2 + x - 2)\, dx = G(4) - G(1) = \frac{64}{3} + \frac{7}{6} = \frac{45}{2}$$

Área $= \dfrac{10}{3} + \dfrac{45}{2} = \dfrac{155}{6}$ u^2

7 **Calcula el área comprendida entre la curva $y = 3x^2 - x + 1$, el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = 4$.**

I. Calculamos las soluciones de la ecuación: $3x^2 - x + 1 = 0$

No tiene soluciones, por lo que no corta al eje X.

II. Buscamos una primitiva de $f(x)$:

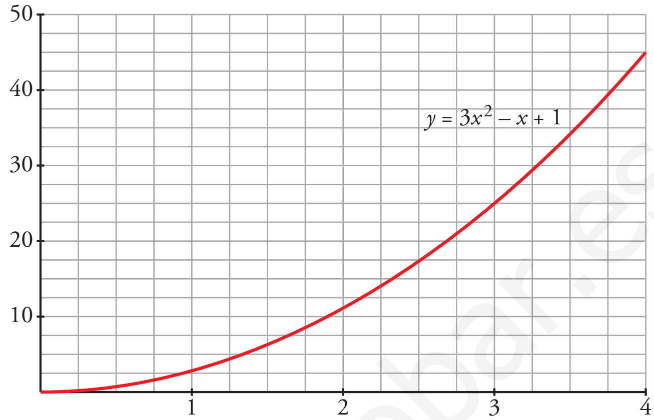
$$G(x) = \int (3x^2 - x + 1)\, dx = x^3 - \frac{x^2}{2} + x$$

III. $G(0) = 0$, $G(4) = 60$

IV. $G(4) - G(0) = 60$

El área buscada es 60 u^2.

(La gráfica se ha incluido para entender el proceso, pero es innecesaria para obtener el área).



8 **Calcula el área bajo la curva $y = 3x - 2$ entre las rectas $x = -1$ y $x = 1$.**

I. Hallamos la solución de la ecuación $3x - 2 = 0$. Es $x = \frac{2}{3}$.

II. Ordenamos los extremos del intervalo y la raíz que hay entre ellos: -1, $\frac{2}{3}$, 1.

III. Buscamos una primitiva de $f(x)$:

$$G(x) = \int (3x - 2)\, dx = \frac{3x^2}{2} - 2x$$

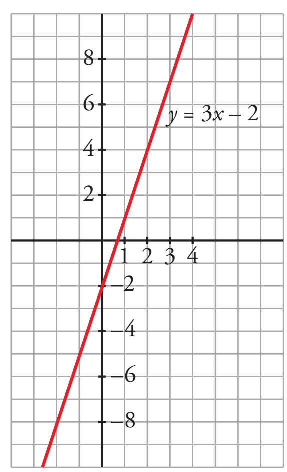
IV. $G(-1) = \frac{7}{2}$; $G\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{-2}{3}$; $G(1) = \frac{-1}{2}$

V. $G\left(\frac{2}{3}\right) - G(-1) = \frac{-2}{3} - \frac{7}{2} = \frac{-25}{6}$

$G(1) - G\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{-1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$

El área buscada es: $\left|\frac{-25}{6}\right| + \frac{1}{6} = \frac{26}{6} = \frac{13}{3}$ u^2.

(Se incluye la gráfica, aunque es innecesaria para obtener su área).



9 **Halla el área bajo la curva $y = \sqrt{x}$ entre $x = 0$ y $x = 4$.**

I. Buscamos la primitiva de la función $f(x) = \sqrt{x}$.

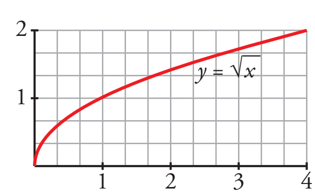
$$G(x) = \int \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{x^3}$$

II. $G(0) = 0$, $G(4) = \frac{2}{3} \cdot 8 = \frac{16}{3}$

III. $G(4) - G(0) = \frac{16}{3} - 0 = \frac{16}{3}$

El área buscada es: $\frac{16}{3}$ u^2.

(Se incluye la gráfica, aunque es innecesaria para obtener su área).



10 **Calcula el área de la región limitada por la curva $y = (x - 1)^2\,(x + 1)$ y las rectas $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$.**

I. Hallamos las soluciones de la ecuación: $(x - 1)^2\,(x + 1) = 0$. Son $x = -1$ y $x = 1$.

II. Ordenamos los extremos del intervalo y las raíces que hay entre ellos: -1, 1, 2.

III. Buscamos una primitiva de $f(x)$:

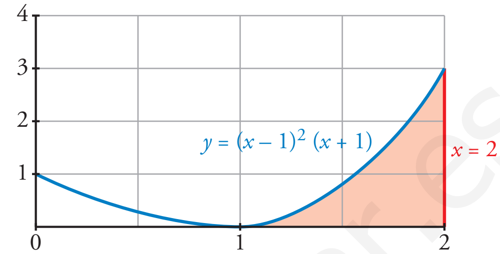
$$G(x) = \int (x-1)^2\,(x+1)\,dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x$$

IV. $G(1) = \dfrac{5}{12}$, $G(2) = \dfrac{4}{3}$

V. $G(2) - G(1) = \dfrac{4}{3} - \dfrac{5}{12} = \dfrac{11}{12}$

El área buscada es $\dfrac{11}{12}$ u^2.

(Se adjunta la gráfica, aunque es innecesaria para resolver el ejercicio).



11 **Calcula el área de la región limitada por la curva $y = \dfrac{x}{x^2 - 2}$ y las rectas $x = 2$, $x = 3$, $y = 0$.**

I. Hallamos la solución de $\dfrac{x}{x^2 - 2} = 0$. Es $x = 0$.

II. Como esta solución se encuentra fuera del intervalo de integración, los extremos son 2 y 3.

III. Buscamos la primitiva de la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 2}$, la cual es continua en dicho intervalo:

$$G(x) = \int \frac{x}{x^2 - 2}\,dx = \frac{1}{2} \cdot ln\,|x^2 - 2|$$

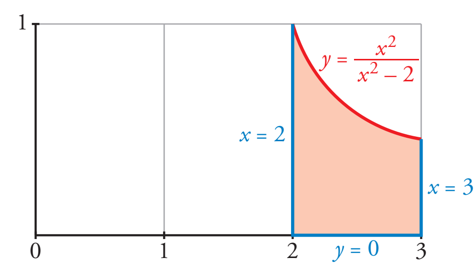
IV. $G(2) = \dfrac{1}{2} \cdot ln\,(2)$, $G(3) = \dfrac{1}{2} \cdot ln\,(7)$

V. $G(3) - G(2) = \dfrac{1}{2} \cdot [ln\,(7) - ln\,(2)]$

El área buscada es:

$$\frac{1}{2} \cdot [ln\,(7) - ln\,(2)] \text{ u}^2.$$

(Se adjunta la gráfica, aunque es innecesaria para la resolución del ejercicio).



Cálculo de un área reconociendo la figura

12 **Las siguientes integrales se pueden calcular reconociendo, en cada caso, la curva cuya ecuación está bajo el signo integral y calculando, utilizando métodos de geometría elemental, el área pedida:**

a) $\displaystyle\int_0^4 2x\,dx$ **b)** $\displaystyle\int_1^5 (x+1)\,dx$ **c)** $\displaystyle\int_0^6 \sqrt{36 - x^2}\,dx$ **d)** $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{36 - 4x^2}\,dx$

* ***Recuerda que el área de la elipse de semiejes a y b es $A = \pi ab$.***

a) La recta $y = 2x$, entre $x = 0$ y $x = 4$, limita con el eje X un triángulo. Por tanto:

$$\int_0^4 2x\,dx = \left[x^2\right]_0^4 = \frac{4 \cdot 8}{2}$$

b) La recta $y = x + 1$, entre $x = 1$ y $x = 5$, limita con el eje X un trapecio. Por tanto:

$$\int_1^5 (x+1)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_1^5 = \frac{25}{5} + 5 - \frac{1}{2} - 1 = \frac{2+6}{2} \cdot 4 = 16$$

c) La curva $y = \sqrt{36 - x^2}$ es una semicircunferencia centrada en el origen, de radio 6 y situada por encima del eje X. La integral pedida es un cuadrante de círculo, por tanto:

$$\int_0^6 \sqrt{36 - x^2}\, dx = \frac{\pi \cdot 6^2}{4} = 9\pi$$

d) $y = \sqrt{36 - 4x^2} \;\rightarrow\; 4x^2 + y^2 = 36 \;\rightarrow\; \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{36} = 1$

La función es la parte positiva de una elipse que corta a los ejes en (–3, 0); (3, 0) y (0, 6) y la integral pedida es un cuadrante del área encerrada por la elipse.

Por tanto,

$$\int_0^3 \sqrt{36 - 4x^2}\, dx = \frac{\pi \cdot 3 \cdot 6}{4} = \frac{9\pi}{2}$$

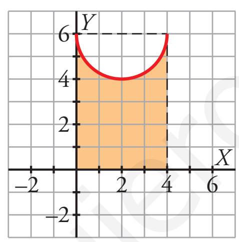
13 **Halla gráficamente las siguientes integrales:**

a) $\displaystyle\int_{-2}^{5} (x + 2)\, dx$ **b)** $\displaystyle\int_0^4 \left[6 - \sqrt{4 - (x - 2)^2}\right] dx$

a) La recta $y = x + 2$, entre $x = -2$ y $x = 5$, limita con el eje X un triángulo. Por tanto:

$$\int_{-2}^{5} (x + 2)\, dx = \frac{7 \cdot 7}{2} = \frac{49}{2}$$

b) Como vemos en la gráfica siguiente, la integral es el resultado de restar al área del rectángulo el área del semicírculo de radio 2.



$$\int_0^4 \left(6 - \sqrt{4 - (x - 2)^2}\right) dx = 4 \cdot 6 - \frac{\pi \cdot 2^2}{2} = 24 - 2\pi$$

Área entre dos curvas

14 **Halla, en cada caso, el área comprendida entre los siguientes pares de parábolas:**

a) $y = x^2 - 5$ **e** $y = -x^2 + 5$

b) $y = x^2$ **e** $y^2 = x$

a) I. Buscamos las soluciones de $x^2 - 5 = -x^2 + 5$. Son $x = -\sqrt{5}$ y $x = \sqrt{5}$

Por tanto, estos van a ser nuestros límites de integración.

II. Se obtiene la función diferencia:

$y = (-x^2 + 5) - (x^2 - 5) = -2x^2 + 10$

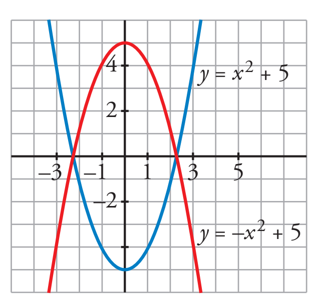
III. Buscamos su primitiva:

$$G(x) = \int (-2x^2 + 10)\, dx = \frac{-2x^3}{3} + 10x$$

IV. $G(\sqrt{5}) - G(-\sqrt{5}) = \dfrac{20}{3}\sqrt{5} + \dfrac{20}{3}\sqrt{5} = \dfrac{40}{3}\sqrt{5}$

El área buscada es: $\dfrac{40}{3}\sqrt{5}$ u^2.

(Se incluye la gráfica, aunque es innecesaria para obtener el área).



b) I. Buscamos las soluciones de la ecuación: $x = x^4$. Son $x = 0$ y $x = 1$.

II. Calculamos la función diferencia: $y = x^2 - \sqrt{x}$

III. Buscamos su primitiva:

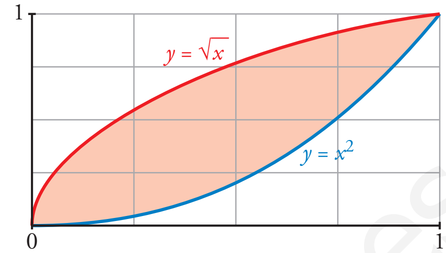
$$G(x) = \int (x^2 - \sqrt{x})\, dx = \frac{x^3}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$$

IV. $G(0) = 0$, $G(1) = \dfrac{-1}{3}$

V. $G(1) - G(0) = \dfrac{-1}{3} - 0 = \dfrac{-1}{3}$

El área buscada es $\left|\dfrac{-1}{3}\right| = \dfrac{1}{3}$ u^2.

(Se adjunta la gráfica, aunque no es necesaria para la resolución del ejercicio).



15 **Calcula el área comprendida entre las curvas dadas en cada uno de los ejercicios siguientes:**

a) $y = 4 - x^2$; $y = 8 - 2x^2$

b) $y = x^2$; $y = 4 - x^2$

c) $y = x^3 - 3x^2 + 3x$; $y = x$

d) $y = x(x - 1)(x - 2)$; $y = 0$

e) $y = x^2$; $y = 1$

f) $y = x^2 - 2x$; $y = -x^2 + 4x$

g) $y = -x^2 + 4x - 4$; $y = 2x - 7$

a) I. Buscamos las soluciones de $4 - x^2 = 8 - 2x^2$. Son $x = -2$ y $x = 2$.

Por tanto, estos van a ser nuestros límites de integración.

II. Calculamos la función diferencia:

$y = (8 - 2x^2) - (4 - x^2) = 4 - x^2$

III. Calculamos su primitiva:

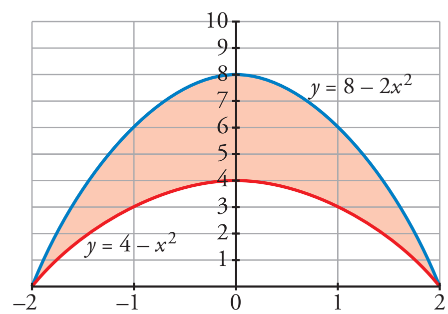
$$G(x) = \int (4 - x^2)\, dx = 4x - \frac{x^3}{3}$$

IV. $G(-2) = -8 + \dfrac{8}{3} = -\dfrac{16}{3}$

$G(2) = 8 - \dfrac{8}{3} = \dfrac{16}{3}$

V. $G(2) - G(-2) = \dfrac{16}{3} - \left(-\dfrac{16}{3}\right) = \dfrac{32}{3}$

El área buscada es: $\dfrac{32}{3}$ u^2.



b) I. Buscamos las soluciones de la ecuación: $x^2 = 4 - x^2$. Son $x = -\sqrt{2}$ y $x = \sqrt{2}$ (nuestros límites de integración).

II. Calculamos la función diferencia:

$y = (4 - x^2) - x^2 = 4 - 2x^2$

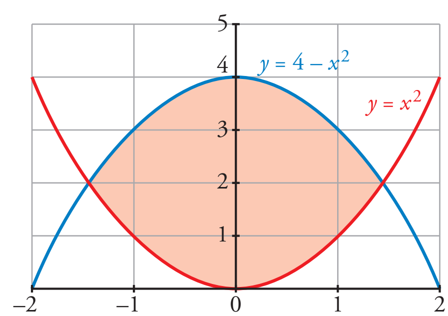
III. Calculamos su primitiva:

$$G(x) = \int (4 - 2x^2)\, dx = 4x - \frac{2x^3}{3}$$

IV. $G(-\sqrt{2}) = \dfrac{-8\sqrt{2}}{3}$, $G(\sqrt{2}) = \dfrac{8\sqrt{2}}{3}$

V. $G(\sqrt{2}) - G(-\sqrt{2}) = \dfrac{8\sqrt{2}}{3} + \dfrac{8\sqrt{2}}{3} = \dfrac{16\sqrt{2}}{3}$

El área buscada es: $\dfrac{16\sqrt{2}}{3}$ u^2.



(Se adjunta la gráfica, aunque es innecesaria para hallar el área).

c) I. Buscamos las soluciones de la ecuación: $x^3 - 3x^2 + 3x = x$. Son $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$.

II. Calculamos la función diferencia: $y = (x^3 - 3x^2 + 3x) - x = x^3 - 3x^2 + 2x$

III. Calculamos su primitiva:

$$G(x) = \int (x^3 - 3x^2 + 2x)\, dx = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2$$

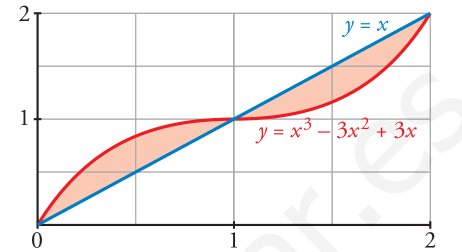
IV. $G(0) = 0$, $G(1) = \dfrac{1}{4}$, $G(2) = 0$

$$G(1) - G(0) = \frac{1}{4}$$

$$G(2) - G(1) = \frac{-1}{4}$$

El área buscada es: $\dfrac{1}{4} + \left|\dfrac{-1}{4}\right| = \dfrac{1}{2}$ u^2.

(La gráfica que se adjunta es para entender mejor el ejercicio, pero es innecesaria para obtener el área).



d) I. Buscamos las soluciones de: $x(x-1)(x-2) = 0$. Son $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$.

II. Calculamos la función diferencia: $y = x(x-1)(x-2)$

III. Calculamos su primitiva:

$$G(x) = \int x(x-1)(x-2)\, dx = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2$$

Resulta que se trata del mismo ejercicio que el apartado c).

El área buscada es: $\dfrac{1}{2}$ u^2.

e) I. Buscamos las soluciones de la ecuación: $x^2 = 1$. Son $x = -1$ y $x = 1$.

II. Calculamos la función diferencia: $y = x^2 - 1$

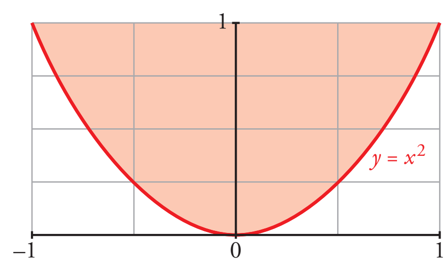
III. Calculamos su primitiva:

$$G(x) = \int (x^2 - 1)\, dx = \frac{x^3}{3} - x$$

IV. $G(-1) = \dfrac{2}{3}$, $G(1) = \dfrac{-2}{3}$

V. $G(1) - G(-1) = \dfrac{-2}{3} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{-4}{3}$

El área buscada es: $\left|\dfrac{-4}{3}\right| = \dfrac{4}{3}$ u^2.



(Se adjunta la gráfica, aunque es innecesaria para resolver el ejercicio).

f) I. Buscamos las soluciones de la ecuación: $x^2 - 2x = -x^2 + 4x$. Son $x = 0$ y $x = 3$.

II. Calculamos la función diferencia:

$y = (x^2 - 2x) - (-x^2 + 4x) = 2x^2 - 6x$

III. Calculamos su primitiva:

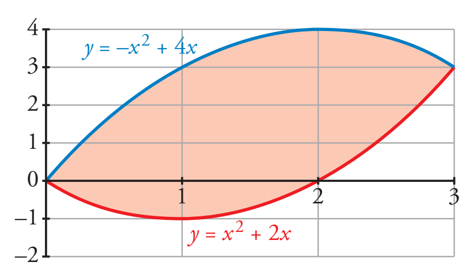
$$G(x) = \int (2x^2 - 6x)\, dx = \frac{2x^3}{3} - 3x^2$$

IV. $G(0) = 0$, $G(3) = -9$

V. $G(3) - G(0) = -9$

El área buscada es: $|-9| = 9$ u^2.

(Se adjunta la gráfica, aunque es innecesaria).



g) I. Buscamos las soluciones de: $-x^2 + 4x - 4 = 2x - 7$, Son $x = -1$ y $x = 3$.

II. Calculamos la función diferencia:

$$y = (-x^2 + 4x - 4) - (2x - 7) = -x^2 + 2x + 3$$

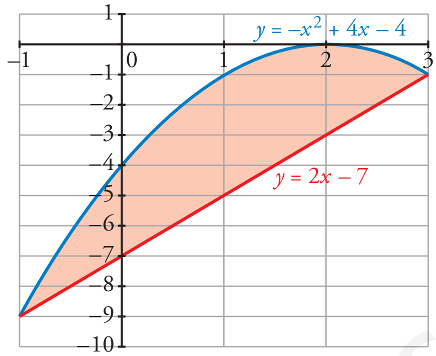
III. Calculamos su primitiva:

$$G(x) = \int (-x^2 + 2x + 3)\, dx = \frac{-x^3}{3} + x^2 + 3x$$

IV. $G(-1) = \dfrac{-5}{3}$, $G(3) = 9$

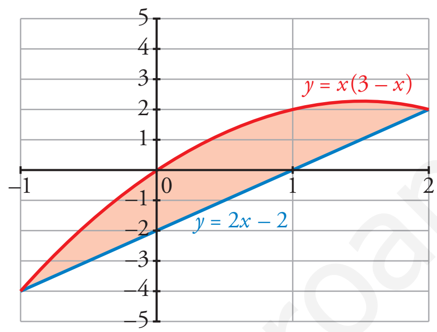
V. $G(3) - G(-1) = 9 + \dfrac{5}{3} = \dfrac{32}{3}$

El área buscada es: $\dfrac{32}{3}$ u^2.



(Se adjunta la gráfica, aunque es innecesaria para la resolución del ejercicio).

16 **Dibuja y halla el área de la región limitada por la curva $y = x(3 - x)$ y la recta $y = 2x - 2$.**



I. Buscamos las soluciones de la ecuación: $x(3 - x) = 2x - 2$. Son $x = -1$ y $x = 2$.

II. Calculamos la función diferencia: $f(x) = x(3 - x) - (2x - 2) = -x^2 + x + 2$

III. Calculamos su primitiva:

$$G(x) = \int (-x^2 + x + 2)\, dx = \frac{-x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x$$

IV. $G(-1) = \dfrac{-7}{6}$, $G(2) = \dfrac{10}{3}$

V. $G(2) - G(-1) = \dfrac{10}{3} + \dfrac{7}{6} = \dfrac{9}{2}$

El área buscada es $\dfrac{9}{2}$ u^2.

17 **Dibuja el recinto plano limitado por la parábola $y^2 - x = 1$ y por la recta paralela a $y = x$ que pasa por el punto (1, 0). Calcula el área de ese recinto.**

- Recta paralela a $y = x$ que pasas por (1, 0):

$$\left.\begin{array}{l} m = 1 \\ P(1, 0) \end{array}\right\} \; y = 1(x - 1) = x - 1$$

- Buscamos los puntos de corte de la curva $y^2 - x = 1$ y la recta $y = x - 1$:

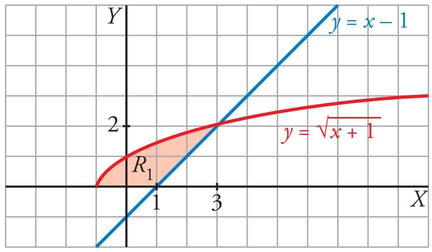
$$\left.\begin{array}{l} y^2 - x = 1 \;\rightarrow\; x = y^2 - 1 \\ y = x - 1 \;\rightarrow\; x = y + 1 \end{array}\right\} \; y^2 - 1 = y + 1 \;\rightarrow\; y^2 - y - 2 = 0 \; \begin{array}{l} y = -1 \;\rightarrow\; x = 0 \\ y = 2 \;\rightarrow\; x = 3 \end{array}$$

- Representamos el recinto y lo descomponemos en dos partes:

$R_1 \rightarrow$ limitado por $y = \sqrt{x + 1}$, eje OX y la recta $y = x - 1$

$R_2 \rightarrow$ limitado por $y = -\sqrt{x + 1}$, eje OX y la recta $y = x - 1$

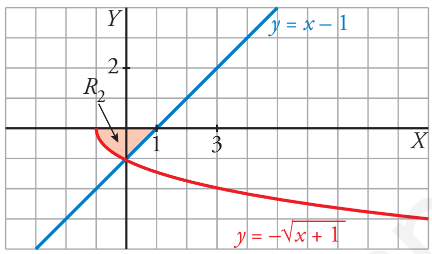
Calculamos en primer lugar el área de R_1:



$$A_{R_1} = \int_{-1}^{3} \sqrt{x+1}\,dx - \int_{1}^{3} (x-1)\,dx = \left[\frac{(x+1)^{3/2}}{3/2}\right]_{-1}^{3} - \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_{1}^{3} =$$

$$= \left[\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}\right]_{-1}^{3} - \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_{1}^{3} = \frac{2}{3}\cdot 8 - \left[\left(\frac{9}{2} - 3\right) - \left(\frac{1}{2} - 1\right)\right] = \frac{16}{3} - 2 = \frac{10}{3}$$

Calculamos ahora el área de R_2:



$$A_{R_2} = -\int_{-1}^{0} -\sqrt{x+1}\,dx + \int_{0}^{1} (1-x)\,dx = \left[\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3}\right]_{-1}^{0} + \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1} = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6}\ \text{u}^2$$

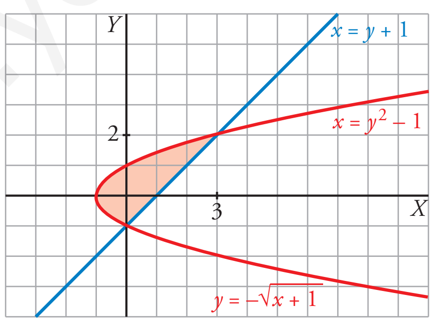
Área total: $R_1 + R_2 = \dfrac{10}{3} + \dfrac{7}{6} = \dfrac{9}{2}\ \text{u}^2$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

I. Calculamos las soluciones de la ecuación: $y^2 - 1 = y + 1$

(Esta ecuación resulta de despejar la x en: $y^2 - x = 1$; $y = x - 1$).

Sus soluciones son $y = -1$, $y = 2$.



II. Calculamos la función diferencia:

$$x = (y^2 - 1) - (y + 1) = y^2 - y - 2$$

III. Buscamos su primitiva:

$$G(x) = \int (y^2 - y - 2)\,dy = \frac{y^3}{3} - \frac{y^2}{2} - 2y$$

IV. $G(-1) = \dfrac{7}{6}$ $G(2) = \dfrac{-10}{3}$

V. $G(2) - G(-1) = \dfrac{-10}{3} - \dfrac{7}{6} = \dfrac{-9}{2}$

El área buscada es $\left|\dfrac{-9}{2}\right| = \dfrac{9}{2}\ \text{u}^2$.

18 **Halla el área limitada por la función $y = 2x - x^2$ y sus tangentes en los puntos en los que su gráfica corta al eje de abscisas.**

I. Buscamos las soluciones de la ecuación: $2x - x^2 = 0$. Son $x = 0$ y $x = 2$.

II. Calculamos la derivada de $f(x) = 2x - x^2$, que es $f'(x) = 2 - 2x$.

La tangente que pasa por (0, 0) tiene pendiente $f'(0) = 2$; por tanto, es $y = 2x$.

La tangente que pasa por (2, 0) tiene pendiente $f'(2) = -2$; por tanto, es $y = -2x + 4$.

III. Tenemos que distinguir dos intervalos de integración: entre 0 y 1 y entre 1 y 2.

La función diferencia en el primer intervalo es:

$$f_1(x) = 2x - (2x - x^2) = x^2$$

y en el segundo intervalo es:

$$f_2(x) = -2x + 4 - (2x - x^2) = x^2 - 4x + 4$$

IV. Sus primitivas son:

$$G_1(x) = \int x^2\, dx = \frac{x^3}{3}$$

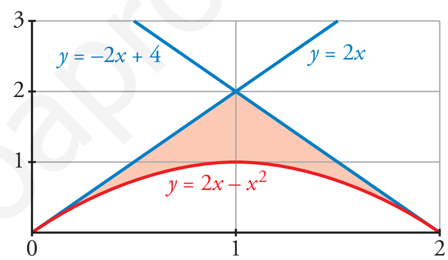
$$G_1(x) = \int (x^2 - 4x + 4)\, dx = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x$$

V. $G_1(0) = 0$, $G_1(1) = \frac{1}{3}$, $G_1(1) - G_1(0) = \frac{1}{3}$

$G_2(1) = \frac{7}{3}$, $G_2(2) = \frac{8}{3}$, $G_2(2) - G_2(1) = \frac{1}{3}$

El área buscada es: $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ u^2.

(Se adjunta la gráfica, aunque no es necesaria para resolver el ejercicio).



Página 380

19 **Dadas la hipérbola $xy = 6$ y la recta $x + y - 7 = 0$, calcula el área comprendida entre ellas.**

I. Buscamos las soluciones de la ecuación: $7 - x = \frac{6}{x}$. Son $x = 1$ y $x = 6$ (nuestros límites de integración).

II. Calculamos la función diferencia:

$$y = 7 - x - \frac{6}{x}$$

III. Buscamos su primitiva:

$$G(x) = \int \left(7 - x - \frac{6}{x}\right) = 7x - \frac{x^2}{2} - 6ln\,|x|$$

IV. $G(1) = 7 - \frac{1}{2} = \frac{13}{2}$

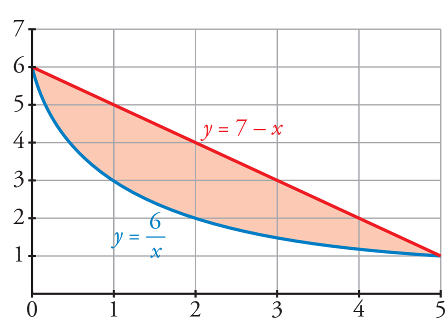
$G(6) = 24 - 6ln\,(6)$

V. $G(6) - G(1) = 24 - 6ln\,(6) - \frac{13}{2} = \frac{35}{2} - 6ln\,(6)$

El área buscada es:

$$\frac{35}{2} - 6ln\,(6) \text{ u}^2$$

(Se adjunta la gráfica, aunque no es necesaria para resolver el ejercicio).



20 **Calcula el área limitada por la curva $y = x^3 - 2x^2 + x$ y la recta tangente a ella en el origen de coordenadas.**

I. Calculemos la ecuación de la recta tangente en el punto (0, 0); para ello, calculamos la derivada de nuestra función:

$$y' = 3x^2 - 4x + 1$$

$$y(0) = 1 \text{ (pendiente)}$$

La recta tangente tiene por ecuación $y = x$.

II. Calculamos las soluciones de: $x^3 - 2x^2 + x = x$. Son $x = 0$ y $x = 2$ (límites de integración).

III. Obtenemos la función diferencia:

$$y = x^3 - 2x^2 + x - x = x^3 - 2x^2$$

IV. Buscamos su primitiva:

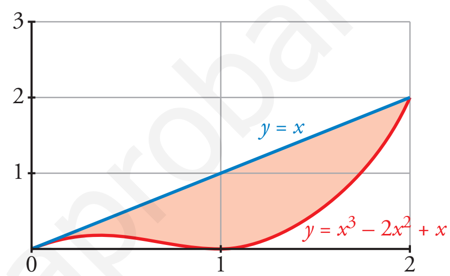
$$G(x) = \int (x^3 - 2x^2)\, dx = \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3}$$

V. $G(0) = 0$, $G(2) = \dfrac{-4}{3}$

$$G(2) - G(0) = \frac{-4}{3}$$

El área buscada es: $\left|\dfrac{-4}{3}\right| = \dfrac{4}{3}$ u^2.

(Se adjunta la gráfica aunque no es necesaria para la resolución del ejercicio).



21 **Halla el área encerrada por la curva $y = ln\,x$ entre el punto de corte con el eje X y el punto de abscisa $x = e$.**

La curva $y = ln\,x$ corta al eje X en el punto de abscisa $x = 1$.

$$\text{Área} = \int_1^e ln\,x\,dx$$

Integramos por partes:

$$\begin{cases} u = ln\,x \rightarrow du = \dfrac{1}{x}\,dx \\ dv = dx \rightarrow v = x \end{cases}$$

$$G(x) = \int ln\,x\,dx = x\,ln\,x - \int dx = x\,ln\,x - x$$

$$\text{Área} = \int_1^e ln\,x\,dx = G(e) - G(1) = 0 - (-1) = 1 \text{ u}^2$$

22 **Halla el área limitada por las gráficas de las funciones que se indican.**

a) $f(x) = x^3 + x^2$ $\quad g(x) = x^3 + 1$

b) $f(x) = x^2$ $\quad g(x) = 1 - x^2$ $\quad y = 2$

c) $f(x) = x(x - 1)(x - 4)$ $\quad g(x) = 0$

d) $f(x) = x^2 - 2x$ $\quad g(x) = x$

e) $f(x) = x^3 - x$ $\quad g(x) = -x^2$

f) $f(x) = 2 - x^4$ $\quad g(x) = x^2$

a) Calculamos las abscisas de los puntos de corte de las dos curvas:

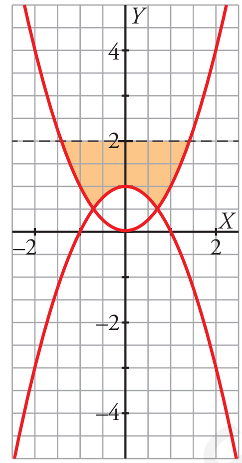
$$f(x) = g(x) \rightarrow x^3 + x^2 = x^3 + 1 \rightarrow x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = -1,\ x = 1$$

Llamamos la integral de $h(x) = f(x) - g(x) = x^2 - 1$

$$\int_{-1}^{1} (x^2 - 1)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{-1}^{1} = -\frac{2}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{4}{3}$$

Área $= \dfrac{4}{3}$ u^2

b) Calculamos las abscisas de los puntos de corte:



$$\left.\begin{array}{l} y = 2 \\ y = x^2 \end{array}\right\} \to x = -\sqrt{2},\ x = \sqrt{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = 1 - x^2 \end{array}\right\} \to x = -\frac{\sqrt{2}}{2},\ x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Utilizamos la simetría respecto del eje vertical:

$$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} [2 - (1 - x^2)]\, dx = \left[x + \frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3}{3} = \frac{7\sqrt{2}}{12}$$

$$\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}} (2 - x^2)\, dx = \left[2x - \frac{x^3}{3}\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\sqrt{2}} = \left(2\sqrt{2} - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) - \left[\sqrt{2} - \frac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3}{3}\right] = \frac{5\sqrt{2}}{12}$$

$$\text{Área} = 2\left(\frac{7\sqrt{2}}{12} + \frac{5\sqrt{2}}{12}\right) = 2\sqrt{2}\ \text{u}^2$$

c) $f(x)$ y $g(x)$ se cortan en los puntos de abscisas $x = 0,\ x = 1,\ x = 4$.

Llamamos $h(x) = f(x) - g(x) = x(x-1)(x-4) = x^3 - 5x^2 + 4x$

$$H(x) = \int (x^3 - 5x^2 + 4x)\, dx = \frac{x^4}{4} - \frac{5x^3}{3} + 2x^2$$

$$H(0) = 0;\ H(1) = \frac{7}{12};\ H(4) = -\frac{32}{3}$$

$$\int_0^1 (x^3 - 5x^2 + 4x)\, dx = H(1) - H(0) = \frac{7}{12}$$

$$\int_1^4 (x^3 - 5x^2 + 4x)\, dx = H(4) - H(1) = -\frac{32}{3} - \frac{7}{12} = -\frac{45}{4}$$

$$\text{Área} = \frac{7}{12} + \frac{45}{4} = \frac{71}{6}\ \text{u}^2$$

d) $\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 2x \\ y = x \end{array}\right\} \to x = 0,\ x = 3$

$$\int_0^3 (x^2 - 2x - x)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2}\right]_0^3 = 9 - \frac{27}{2} = -\frac{9}{2}$$

$$\text{Área} = \frac{9}{2}\ \text{u}^2$$

e) $\left.\begin{array}{l} y = x^3 - x \\ y = -x^2 \end{array}\right\} \to x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2},\ x = 0,\ x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$

$$G(x) = \int [x^3 - x - (-x^2)]\, dx = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$$

$$G\left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right) = \frac{\left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right)^4}{4} + \frac{\left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right)^3}{3} - \frac{\left(\frac{-1 - \sqrt{5}}{2}\right)^2}{2} = \frac{-5\sqrt{5} - 13}{24};\ G(0) = 0$$

$$G\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right) = \frac{\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)^4}{4} + \frac{\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)^3}{3} - \frac{\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2}{2} = \frac{5\sqrt{5} - 13}{24}$$

$$\int_{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}}^{0} (x^3 + x^2 - x)\, dx = G(0) - G\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{5\sqrt{5}+13}{24}$$

$$\int_{0}^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} (x^3 + x^2 - x)\, dx = G\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) - G(0) = \frac{5\sqrt{5}-13}{24}$$

$$\text{Área} = \frac{5\sqrt{5}+13}{24} + \frac{-5\sqrt{5}+13}{24} = \frac{13}{12}\ \text{u}^2$$

f) $\left.\begin{array}{l} y = 2 - x^4 \\ y = x^2 \end{array}\right\} \rightarrow\ x = -1,\ x = 1$

$$\int_{-1}^{1} (2 - x^4 - x^2)\, dx = \left[-\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + 2x\right]_{-1}^{1} = -\frac{1}{5} - \frac{1}{3} + 2 - \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3} - 2\right) = \frac{44}{15}$$

$$\text{Área} = \frac{44}{15}\ \text{u}^2$$

Volúmenes

23 Calcula el volumen engendrado al girar alrededor del eje X los recintos siguientes:

a) $f(x) = \sqrt{x-1}$ entre $x = 1$ y $x = 5$

b) $f(x) = x^2$ entre $x = -1$ y $x = 2$

c) $f(x) = x - x^2$ entre $x = 0$ y $x = 1$

a) $V = \pi \cdot \int_1^5 (\sqrt{x-1})^2\, dx = \pi \cdot \int_1^5 (x-1)\, dx = \pi\left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^5 = 8\pi\ \text{u}^3$

b) $V = \pi \cdot \int_{-1}^2 (x^2)^2\, dx = \pi \cdot \int_{-1}^2 x^4\, dx = \pi\left[\frac{x^5}{5}\right]_1^2 = \frac{31}{5}\pi\ \text{u}^3$

c) $V = \pi \cdot \int_0^1 (x - x^2)^2\, dx = \pi \cdot \int_0^1 (x^4 - 2x^3 + x^2)\, dx = \pi\left[\frac{x^5}{5} - \frac{2x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\pi}{30}\ \text{u}^3$

24 Calcula el volumen engendrado al girar alrededor del eje X los recintos limitados por las gráficas que se indican:

a) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^2$

b) $y^2 = 4x$, $x = 4$

a) I. Buscamos las soluciones de la ecuación: $\sqrt{x} = x^2$. Son $x = 0$ y $x = 1$.

Estos son nuestros límites de integración.

II. Calculamos la función diferencia:

$$y = \sqrt{x} - x^2$$

III. $V = \pi \cdot \int_0^1 (\sqrt{x})^2 - (x^2)^2\, dx = \pi \cdot \int_0^1 (x - x^4)\, dx = \pi\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = \frac{3}{10}\pi\ \text{u}^3$

b) $V = \pi \cdot \int_0^4 f(x)^2\, dx = \pi \cdot \int_0^4 (4x)^2\, dx = \pi \cdot \left[8x^2\right]_0^4 = 128\pi\ \text{u}^3$

Función integral

25 **Calcula las derivadas de las siguientes funciones:**

a) $F(x) = \int_0^x \cos t \, dt$

b) $G(x) = \int_3^x (t^2+1)^4 \, dt$

c) $H(x) = \int_0^x e^{-t^2} \, dt$

d) $J(x) = \int_3^5 (t^2+1)^4 \, dt$

¡Atención! La última es la más fácil.

a) $F'(x) = \cos x$

b) $F'(x) = (x^2+1)^4$

c) $H'(x) = e^{-x^2}$

d) $J'(x) = 0$, porque $J(x)$ es constante.

Para resolver

26 **Halla el área comprendida entre la curva:**

$$y = \frac{4}{9+2x^2}$$

el eje de abscisas y las rectas verticales que pasan por los puntos de inflexión de dicha curva.

I. Buscamos los puntos de inflexión; para ello, calculamos las dos primeras derivadas:

$$y' = \frac{-16x}{(9+2x^2)^2}$$

$$y'' = \frac{-16 \cdot (9+2x^2-8x^2)}{(9+2x^2)^3}$$

Igualamos a cero para encontrar en qué valores de x la segunda derivada es cero.

Esto ocurre en $x = -\frac{\sqrt{6}}{2}$ y $x = \frac{\sqrt{6}}{2}$ (puntos de inflexión).

II. Calculamos la primitiva de nuestra función:

$$G(x) = \int \frac{4}{9+2x^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \, arc \; tg \left(\frac{\sqrt{2}x}{3}\right)$$

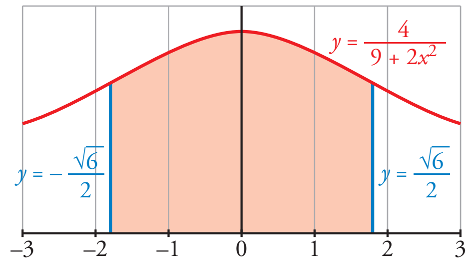
III. $G\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \, arc \; tg \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

$$G\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3} \, arc \; tg \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

$$G\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) - G\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{3}\left(arc \; tg \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - arc \; tg \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$$

El área buscada es: $\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(arc \; tg \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - arc \; tg \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$

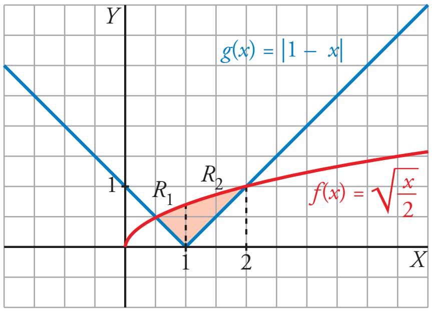
(Se adjunta la gráfica, aunque es innecesaria para la resolución del ejercicio).



27 **Si $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{2}}$ y $g(x) = |1 - x|$:**

a) Dibuja las dos gráficas sobre unos mismos ejes y halla sus puntos de intersección.

b) Determina el área del recinto encerrado entre ambas gráficas.



a) Definimos $g(x)$ por intervalos: $g(x) = |1-x| = \begin{cases} 1-x & \text{si } x \le 1 \\ x-1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Buscamos los puntos de intersección resolviendo la siguiente ecuación:

$$\sqrt{\frac{x}{2}} = (1-x) \quad \text{o bien} \quad \sqrt{\frac{x}{2}} = (x-1)$$

Al elevar al cuadrado cualquiera de las dos ecuaciones, llegamos a:

$$2x^2 - 5x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{4} \begin{cases} x = 2 \\ x = 1/2 \end{cases}$$

Sus soluciones son $\frac{1}{2}$ y 2 (límites de integración).

b) Tenemos que distinguir dos intervalos de integración: de $\frac{1}{2}$ a 1 y de 1 a 2, porque en $x = 1$ cambia la definición de $g(x)$.

Tenemos, por tanto, dos recintos de integración, R_1 y R_2.

I. La función diferencia en el primer intervalo es:

$$h_1(x) = \sqrt{\frac{x}{2}} - (1-x)$$

La función diferencia en el segundo intervalo es:

$$h_2 = \sqrt{\frac{x}{2}} - (x-1)$$

II. Sus primitivas son:

$$H_1(x) = \int\left(\sqrt{\frac{x}{2}} + x - 1\right) = \frac{4}{3}\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)^3 + \frac{x^2}{2} - x$$

$$H_2(x) = \int\left(\sqrt{\frac{x}{2}} - x + 1\right) = \frac{4}{3}\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)^3 - \frac{x^2}{2} + x$$

III. $H_1\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{24}$; $H_1(1) = \frac{2\sqrt{2}-3}{6} = \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2}$

$H_2(1) = \frac{\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{2}$; $H_2(2) = \frac{4}{3}$

IV. Área del recinto R_1: $H_1(1) - H_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2} + \frac{5}{24}$

Área del recinto R_2: $H_2(2) - H_2(1) = \frac{4}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2}$

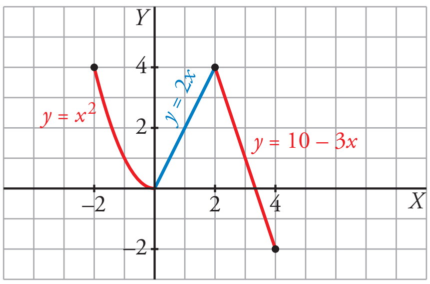
El área buscada es $\frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2} + \frac{5}{24} + \frac{4}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{2} = \frac{13}{24}$ u^2.

28 **Se considera la función:**

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } -2 \le x < 0 \\ 2x & \text{si } 0 \le x < 2 \\ 10 - 3x & \text{si } 2 < x \le 4 \end{cases}$$

Representa la función g y calcula el valor de las siguientes integrales definidas:

$$I = \int_{-2}^{1} g(x)\,dx \qquad J = \int_{1}^{4} g(x)\,dx \qquad K = \int_{-2}^{4} g(x)\,dx$$

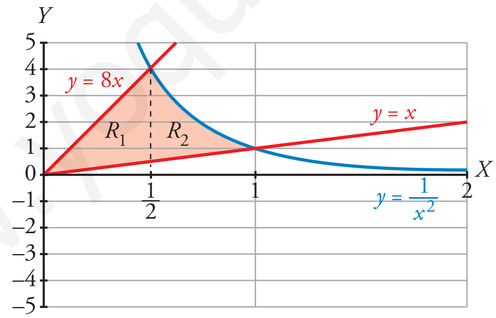


$$I = \int_{-2}^{1} g(x)\,dx = \int_{-2}^{0} x^2\,dx + \int_{0}^{1} 2x\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-2}^{0} + \left[x^2\right]_{0}^{1} = \frac{8}{3} + 1 = \frac{11}{3}$$

$$J = \int_{1}^{4} g(x)\,dx = \int_{1}^{2} 2x\,dx + \int_{2}^{4} (10 - 3x)\,dx = \left[x^2\right]_{1}^{2} + \left[10x - \frac{3x^2}{2}\right]_{2}^{4} = 5$$

$$K = \int_{-2}^{4} g(x)\,dx = I + J = \frac{11}{3} + 5 = \frac{26}{3}$$

29 **Dibuja el recinto comprendido entre las gráficas de las funciones $y = \frac{1}{x^2}$, $y = x$, $y = 8x$, y halla su área.**



I. Buscamos los puntos de intersección de las funciones:

$\frac{1}{x^2} = x \;\rightarrow\; x^3 = 1$. Su solución es $x = 1$.

$\frac{1}{x^2} = 8x \;\rightarrow\; 8x^3 = 1 \;\rightarrow\; x = \sqrt[3]{\frac{1}{8}}$. Su solución es $x = \frac{1}{2}$.

$x = 8x \;\rightarrow\; 7x = 0$. Su solución es $x = 0$.

Tenemos dos intervalos de integración: de 0 a $\frac{1}{2}$ y de $\frac{1}{2}$ a 1. Corresponden a los recintos R_1 y R_2 señalados en el gráfico.

II. Hallamos la función diferencia en el primer intervalo:

$f_1(x) = 8x - x = 7x$

Y en el segundo intervalo:

$f_2(x) = \frac{1}{x^2} - x$

III. Buscamos sus primitivas:

$$G_1(x) = \int 7x\, dx = \frac{7x^2}{2}$$

$$G_2(x) = \int \left(\frac{1}{x^2} - x\right) dx = \frac{-1}{x} - \frac{x^2}{2}$$

IV. $G_1(0) = 0, \quad G_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{8}$

$G_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-17}{8}, \quad G_2(1) = \frac{-3}{2}$

V. Área de R_1: $G\left(\frac{1}{2}\right) - G_1(0) = \frac{7}{8}$

Área de R_2: $G_2(1) - G_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{8}$

El área buscada es $\frac{5}{8} + \frac{7}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$ u^2.

30 Calcula el área del recinto plano limitado por la curva $y = x^2 e^x$ y las rectas $x = 0$ y $x = 5$.

Buscamos una primitiva a nuestra función:

$$G(x) = \int x^2 \; e^x \; dx = (x^2 - 2x + 2)\, e^x$$

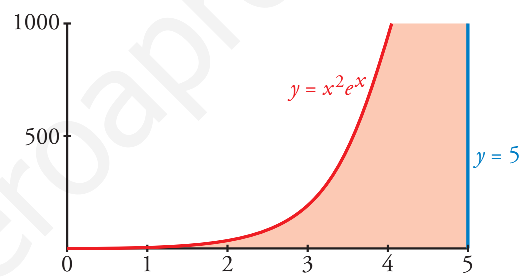
(aplicando el método de integración por partes).

$G(0) = 2$

$G(5) = 17e^5$

$G(5) - G(0) = 17e^5 - 2$

El área buscada es $(17e^5 - 2)$ u^2.



(Se adjunta la gráfica, aunque no es necesaria para resolver el ejercicio).

31 Dada la curva $y = x^2 + 2x + 2$, halla el área limitada por la curva, la recta tangente en el punto donde la función tiene un extremo y la tangente a la curva con pendiente 6.

Buscamos el punto donde la curva tiene un extremo, hallando su derivada e igualando a cero:

$y' = 2x + 2 = 0$, el punto es $(-1, 1)$.

La ecuación de la recta tangente en dicho punto es $y = 1$.

Por otro lado, la ecuación de la recta tangente con pendiente 6 es $y = 6x - 2$.

Buscamos los puntos de corte de la curva con ambas rectas, de $y = x^2 + 2x + 2$ con $y = 1$ es $(-1, 1)$; de $y = x^2 + 2x + 2$ con $y = 6x - 2$ es $(2, 10)$; y de $y = 1$ con $y = 6x - 2$ es $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Distinguimos dos intervalos de integración: de -1 a $\frac{1}{2}$ y de $\frac{1}{2}$ a 2.

En el primer intervalo la función diferencia es:

$$f_1(x) = x^2 + 2x + 2 - 1 = x^2 + 2x + 1$$

En el segundo:

$$f_2(x) = x^2 + 2x + 2 - (6x - 2) = x^2 - 4x + 4$$

Buscamos sus primitivas:

$$G_1(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 + x$$

$$G_2(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x$$

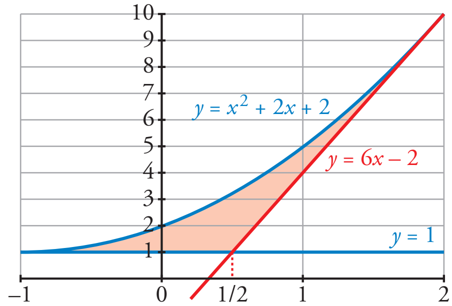
$$G_1(-1) = \frac{-1}{3},\ G_1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{19}{24}$$

$$G_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{37}{24},\ G_2(2) = \frac{8}{3}$$

$$G_1\left(\frac{1}{2}\right) - G_1(-1) = \frac{19}{24} + \frac{1}{3} = \frac{9}{8}$$

$$G_2(2) - G_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{8}{3} - \frac{37}{24} = \frac{9}{8}$$

El área buscada es: $\frac{9}{8} + \frac{9}{8} = \frac{9}{4}$ u^2.



32 **Halla el volumen del cuerpo limitado por la elipse $\frac{x^2}{25} + y^2 = 1$ al dar una vuelta completa alrededor de OX.**

$$V = \pi \int_{-5}^{5} \left(\sqrt{1 - \frac{x^2}{25}}\right)^2 dx = \pi \int_{-5}^{5} \left(1 - \frac{x^2}{25}\right) dx = \pi \cdot \left[x - \frac{x^3}{75}\right]_{-5}^{5} = \frac{20\pi}{3} \text{ u}^3$$

33 **Calcula el área limitada por $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 4}$, el eje X y las rectas $x = a$ y $x = b$, siendo a y b las abscisas del máximo y el mínimo de f.**

La función corta al eje X en $x = 0$.

Por otro lado, tiene un mínimo en $x = -2$ y un máximo en $x = 2$.

Tenemos que distinguir entre dos intervalos: de –2 a 0 y de 0 a 2.

Hallamos la función primitiva:

$$G(x) = \int \frac{4x}{x^2 + 4}\, dx = 2\ln (x^2 + 4)$$

El área en el primer intervalo es:

$$G(-2) = = 2\ln 8$$

$$G(0) = 2\ln 4$$

$$G(0) - G(-2) = 2(\ln 4 - \ln 8)$$

$$|2(\ln 4 - \ln 8)| = 2(\ln 8 - \ln 4) \text{ u}^2$$

El área en el segundo intervalo es:

$$G(2) = 2\ln 8$$

$$G(2) - G(0) = 2(\ln 8 - \ln 4)$$

$$2(\ln 8 - \ln 4) \text{ u}^2$$

El área total es:

$$2(\ln 8 - \ln 4) + 2(\ln 8 - \ln 4) = 4(\ln 8 - \ln 4) \text{ u}^2$$

34 **Halla el área comprendida entre las curvas $y = e^x$, $y = 2x - x^2$ y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.**

I. Hallamos la función diferencia: $y = e^x - (2x - x^2) = e^x + x^2 - 2x$

II. Buscamos su primitiva:

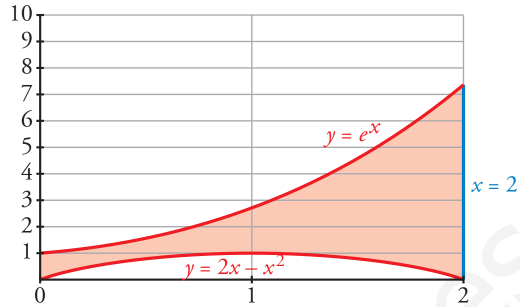
$$G(x) = e^x + \frac{x^3}{3} - x^2$$

III. $G(0) = 1$

$$G(2) = e^2 - \frac{4}{3}$$

$$G(2) - G(0) = e^2 - \frac{4}{3} - 1$$

El área buscada es: $\left(e^2 - \frac{4}{3} - 1\right)$ u^2.



Página 381

35 **La curva $y = \dfrac{4}{x+4}$, los ejes de coordenadas y la recta $x = 4$ limitan una superficie S.**

Calcula el área de S y el volumen de la figura engendrada por S al girar alrededor del eje X.

Buscamos una primitiva:

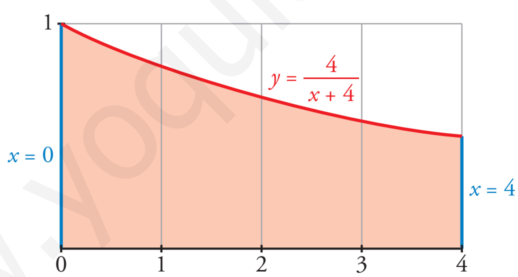
$$G(x) = 4ln\,|x + 4|$$

$$G(0) = 4ln\, 4$$

$$G(4) = 4ln\, 8$$

$$G(4) - G(0) = 4(ln\, 8 - ln\, 4)$$

El área buscada es $4(ln\, 8 - ln\, 4)$ u^2.



$$V = \pi \int_0^4 \left(\frac{4}{x+4}\right)^2 dx = \pi \cdot \left[\frac{-16}{x+4}\right]_0^4 = \frac{16}{8}\pi = 2\pi \text{ u}^3$$

36 **Halla el polinomio de segundo grado que pasa por los puntos (0, 1) y (3, 0), sabiendo que el área limitada por esa curva, el eje Y y el eje X positivo es 4/3.**

Como el polinomio pasa por el punto (3, 0), una raíz es $x = 3$, por tanto:

$$y = (x - 3)(ax - b)$$

Por otro lado, cuando $x = 0$, $y = 1$:

$$1 = -3(-b) = 3b, \quad b = \frac{1}{3}$$

Luego queda:

$$y = (x - 3)\left(ax - \frac{1}{3}\right)$$

Puesto que pasa por los puntos indicados y está limitado por los ejes X e Y (positivos), los límites de integración son 0 y 3.

Así, buscamos la primitiva del polinomio:

$$G(x) = \int (x-3)\left(ax - \frac{1}{3}\right) dx = \int \left(ax^2 - 3ax + \frac{x}{3} + 1\right) dx = \frac{ax^3}{3} - 3a\frac{x^2}{2} - \frac{1}{6}x^2 + x$$

$$G(0) = 0$$

$$G(3) = 9a - \frac{27}{2}a - \frac{9}{6} + 3$$

$$G(3) - G(0) = 9a - \frac{27}{2}a - \frac{9}{6} + 3 = \frac{4}{3}$$

De donde sacamos que $a = \frac{1}{27}$.

Por tanto, el polinomio es:

$$y = (x-3)\left(\frac{1}{27}x - \frac{1}{3}\right)$$

37 **Halla la ecuación de una parábola de eje vertical, tangente en el origen de coordenadas a una recta de pendiente 4 y que delimita con el eje X un recinto de base [0, 3] y área 9.**

Del enunciado del problema se deduce que la parábola pasa por el origen de coordenadas. Supongamos que es de la forma $f(x) = ax^2 + bx$.

Como la pendiente de la recta tangente en el origen es $4 \to f'(0) = 4$.

$$f'(x) = 2ax + b,\ f'(0) = 4 \to b = 4 \to f(x) = ax^2 + 4x$$

Si la gráfica de la parábola queda por encima del eje X en el intervalo [0, 3], el área es:

$$\int_0^3 (ax^2 + 4x)\, dx = \left[\frac{ax^3}{3} + 2x^2\right]_0^3 = 9a + 18,\quad 9a + 18 = 9 \to a = -1$$

La parábola buscada es $f(x) = -x^2 + 4x$, cuya gráfica es positiva en el intervalo [0, 3].

38 **De la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ se sabe que tiene un máximo relativo en $x = 1$, un punto de inflexión en (0, 0) y que $\int_0^1 f(x)\, dx = \frac{5}{4}$. Calcula a, b, c y d.**

Hallamos $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ y $f''(x) = 6ax + 2b$

Sabemos que $f(x)$ pasa por el punto (0, 0), es decir, $f(0) = 0$, de donde averiguamos que $d = 0$.

Por otro lado, sabemos que tiene un máximo relativo en $x = 1$, esto es que $f'(1) = 0$, es decir:

$$3a + 2b + c = 0$$

También tiene un punto de inflexión en (0, 0), por lo que $f''(0) = 0$, de donde $b = 0$.

Como $3a + 2b + c = 0$ y $b = 0$, se tiene que:

$$3a + c = 0 \to c = -3a$$

Así, nuestra función queda reducida a la función:

$$f(x) = ax^3 - 3ax$$

Buscamos su primitiva:

$$G(x) = \frac{ax^4}{4} - \frac{3ax^2}{2}$$

$$G(0) = 0,\ G(1) = \frac{a}{4} - \frac{3a}{2} = -\frac{5a}{4}$$

$$G(1) - G(0) = -\frac{5a}{4}$$

El resultado es $-\frac{5a}{4}$ que es igual a $\frac{5}{4}$, de donde deducimos que $a = -1$ y, por tanto, $c = 3$.

La función buscada es $f(x) = -x^3 + 3x$.

39 **Teniendo en cuenta que la función $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + k$ toma valores positivos y negativos, halla el valor de k de forma que el área de la región limitada por el eje X, las rectas $x = -1$, $x = 2$ y la curva $f(x)$ quede dividida por el eje X en dos partes con igual área.**

Supongamos que $x = a$ comprendido entre –1 y 2 es el punto donde nuestra función corta al eje X; por tanto, tenemos que distinguir dos intervalos de integración: de –1 a a y de a a 2.

Buscamos una primitiva de nuestra función:

$$G(x) = \frac{2x^4}{4} - x^3 + kx = \frac{x^4}{2} - x^3 + kx$$

$$G(-1) = \frac{3}{2} - k$$

$$G(2) = 2k$$

Si suponemos que en el primer intervalo la función es negativa, el área es:

$$G(-1) - G(a)$$

y si en el segundo intervalo la función es positiva, el área es:

$$G(2) - G(a)$$

Y como el área en los dos intervalos tiene que ser la misma, se tiene la siguiente igualdad:

$$G(-1) - G(a) = G(2) - G(a)$$

es decir:

$$G(-1) = G(2)$$

$$\frac{3}{2} - k = 2k \rightarrow k = \frac{1}{2}$$

Observa que se obtiene el mismo resultado independientemente de qué intervalo consideremos en el que la función es positiva o negativa.

40 **Se consideran las curvas $y = x^2$ e $y = a$, donde $0 < a < 1$. Ambas curvas se cortan en el punto (x_0, y_0) con abscisa positiva. Halla a sabiendo que el área encerrada entre ambas curvas desde $x = 0$ hasta $x = x_0$ es igual a la encerrada entre ellas desde $x = x_0$ hasta $x = 1$.**

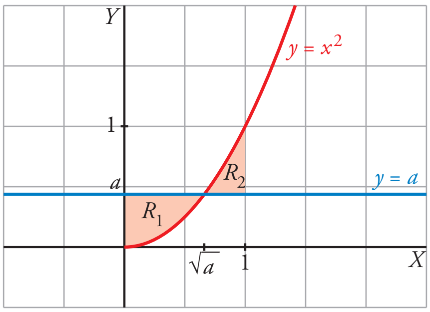
Hallamos los puntos de corte:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = a \end{array}\right\} \rightarrow x^2 = a \begin{cases} x = \sqrt{a} \\ x = -\sqrt{a} \text{ (no vale porque la abscisa debe ser positiva).} \end{cases}$$

El punto de corte es $(\sqrt{a}, a)$.

Dibujamos las áreas para tener una idea más clara de nuestro ejercicio:

Tenemos dos intervalos de integración: de 0 a $\sqrt{a}$ y de $\sqrt{a}$ a 1, que determinan los recintos R_1 y R_2 señalados en el gráfico.



- La función diferencia para el primer intervalo es:

$$f_1(x) = a - x^2$$

Su primitiva es:

$$G_1(x) = ax - \frac{x^3}{3}$$

$$G_1(0) = 0,\ \ G_1(\sqrt{a}) = a\sqrt{a} - \frac{a\sqrt{a}}{3} = \frac{2a\sqrt{a}}{3}$$

El área del primer intervalo es $\frac{2a\sqrt{a}}{3}$ u^2.

- La función diferencia en el segundo intervalo es:

$$f_2(x) = x^2 - a$$

Su primitiva es:

$$G_2(x) = \frac{x^3}{3} - ax$$

$$G_2(\sqrt{a}) = \frac{a\sqrt{a}}{3} - a\sqrt{a},\ \ G_2(1) = \frac{1}{3} - a$$

$$G_2(1) - G_2(\sqrt{a}) = \frac{1}{3} - a + \frac{2a\sqrt{a}}{3}$$

El área del segundo intervalo es $\frac{1}{3} - a + \frac{2a\sqrt{a}}{3}$ u^2.

Como el área en los dos intervalos es igual, se tiene que:

$$\frac{2a\sqrt{a}}{3} = \frac{1}{3} - a + \frac{2a\sqrt{a}}{3}$$

De donde obtenemos que $a = \frac{1}{3}$.

41 Sean $y = ax^2$ e $y = ax + a$ las ecuaciones de una parábola p y de una recta r, respectivamente. Demuestra las siguientes afirmaciones:

a) Los puntos de corte de p y r no dependen del valor de a.

b) Si se duplica el valor de a, también se duplica el área encerrada entre p y r.

a) Los puntos de corte se obtienen al igualar ambas ecuaciones:

$$ax^2 = ax + a$$

$$ax^2 - ax - a = 0$$

$$a(x^2 - x - 1) = 0$$

Como suponemos $a \neq 0$, para que sean ciertamente una parábola y una recta, dividiendo toda la ecuación entre a, llegamos a:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

y sus soluciones son: $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (que no dependen de a).

b) La función diferencia es:

$$f(x) = ax + a - ax^2 = a(-x^2 + x + 1)$$

Si llamamos $h(x) = -x^2 + x + 1$, se tiene que: $f_1(x) = a\,h(x)$

y la primitiva de $f(x)$ es a por la primitiva de $h(x)$, es decir:

$$G_1(x) = a\,H(x)$$

El área comprendida es, por tanto:

$$G_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - G_1\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = a\left(H\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - H\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right) \text{ u}^2$$

Si duplicamos a, se tiene que la función diferencia es ahora:

$$f_2(x) = 2a\, h(x)$$

y su primitiva:

$$G_2(x) = 2a\, H(x)$$

Por lo que el área comprendida es:

$$G_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - G_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 2a\left(H\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - H\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\right)\ \text{u}^2$$

42 Sabiendo que el área de la región comprendida entre la curva $y = x^2$ y la recta $y = bx$ es igual a $\frac{9}{2}$, calcula el valor de b.

La curva $y = x^2$ y la recta $y = bx$ se cortan en el punto de abscisa $x = b$ y en $x = 0$.

Así, nuestros límites de integración son 0 y b.

La función diferencia es: $y = bx - x^2$

Su primitiva es:

$$G(x) = \frac{bx^2}{2} - \frac{x^3}{3}$$

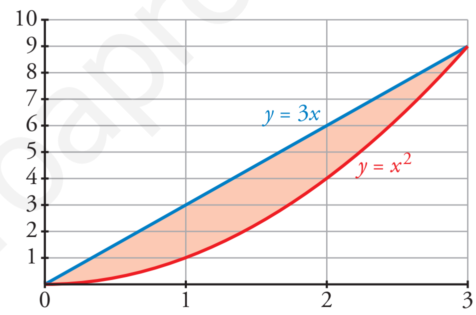
$$G(0) = 0$$

$$G(b) = \frac{b^3}{6}$$

$$G(b) - G(0) = \frac{b^3}{6}$$

Como el área es $\frac{9}{2}$, se tiene que: $\frac{b^3}{6} = \frac{9}{2}$,

de donde obtenemos que $b = 3$.



43 Calcula el valor de a para que el área de la región limitada por la curva $y = -x^2 + ax$ y el eje X sea igual a 36.

La curva corta al eje X en los puntos de abscisa 0 y a (estos son los límites de integración).

Su primitiva es:

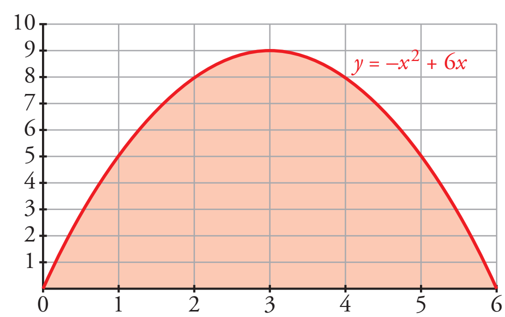
$$G(x) = \frac{-x^3}{3} + \frac{ax^2}{2}$$

$$G(0) = 0$$

$$G(a) = \frac{a^3}{6}$$

$$G(a) - G(0) = \frac{a^3}{6}$$

Como el área es 36, se tiene que: $\frac{a^3}{6} = 36$, de donde averiguamos que $a = 6$.



44 **Dada la función $y = \dfrac{2}{x+1}$ calcula el valor de a para que el área limitada por esa curva y las rectas $x = 0$ y $x = a$ sea igual a 2.**

Buscamos su primitiva:

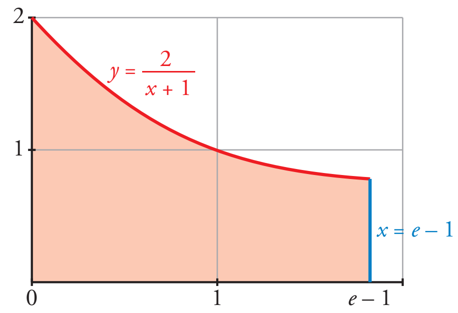
$G(x) = 2ln\,(x + 1)$

$G(0) = 0$

$G(a) = 2ln\,(a + 1)$

$G(a) - G(0) = 2ln\,(a + 1)$

Como el área es igual a 2, se tiene que: $2ln\,(a + 1) = 2$ de donde averiguamos que $a = e - 1$.



45 **Expresa la función de posición de un móvil sabiendo que su aceleración es constante de 8 cm/s², que su velocidad es 0 cuando $t = 3$ y que está en el origen a los 11 segundos.**

Llamamos $S(t)$ a la posición del móvil al cabo de t segundos. Así:

$V(\text{t}) = S'(t)$ y $a(t) = S''(t) = 8$ cm/s^2

Calculamos la velocidad $V(t)$:

$$\left.\begin{array}{l} V(t) = \int a(t)\,dt = \int 8\,dt = 8t + k \\ V(3) = 24 + k = 0 \;\rightarrow\; k = -24 \end{array}\right\} \; V(t) = 8t - 24$$

Calculamos $S(t)$:

$$S(t) = \int V(t)\,dt = \int (8t - 24)\,dt = 4t^2 - 24t + c$$

$$S(11) = 220 + c = 0 \;\rightarrow\; c = -220$$

Por tanto: $S(t) = 4t^2 - 24t - 220$

46 **Un móvil se desplaza en línea recta, con movimiento uniformemente acelerado, con aceleración de 2 m/s² y con velocidad inicial $v_0 = 1$ m/s. Calcula y compara las distancias recorridas entre $t = 0$ y $t = 2$ y entre $t = 2$ y $t = 3$.**

- Calculamos la velocidad del móvil:

$$\left.\begin{array}{l} V(t) = \int a(t)\,dt = \int 2\,dt = 2t + k \\ V(0) = k = 1 \end{array}\right\} \; V(t) = 2t + 1$$

- Distancia recorrida entre $t = 0$ y $t = 2$:

$$d_1 = \int_0^2 V(t)\,dt = \int_0^2 (2t + 1)\,dt = \left[t^2 + t\right]_0^2 = 6 \text{ m}$$

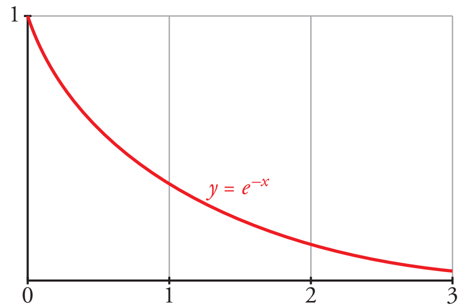
- Distancia recorrida entre $t = 2$ y $t = 3$:

$$d_2 = \int_2^3 V(t)\,dt = \left[t^2 + t\right]_2^3 = 12 - 6 = 6 \text{ m}$$

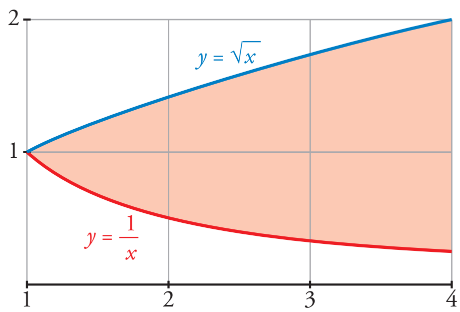
- Por tanto, recorre la misma distancia entre $t = 0$ y $t = 2$ que entre $t = 2$ y $t = 3$.

47 **Halla el volumen del cuerpo engendrado por la región del plano limitada por los ejes de coordenadas, la curva de ecuación $y = e^{-x}$ y la recta $x = 3$, al girar alrededor del eje X.**

$$V = \pi \cdot \int_0^3 (e^{-x})^2 \, dx = \pi \cdot \int_0^3 e^{-2x} \, dx = \frac{\pi}{-2} \cdot \left[e^{-2x} \right]_0^3 = \frac{\pi}{-2} \cdot (e^{-6} - 1) \ \text{u}^3$$



48 **Calcula el volumen que se obtiene al hacer girar alrededor del eje X el recinto limitado por las gráficas de las funciones $y = \frac{1}{x}$, $x = y^2$, $x = 4$.**



Las curvas $y = \frac{1}{x}$ y $x = y^2$ se cortan en el punto de abscisa 1.

Por tanto, nuestros límites de integración son 1 y 4.

El volumen buscado es el resultado de restar el volumen engendrado por la curva $y = \sqrt{x}$ alrededor de OX entre 1 y 4, y el volumen engendrado por la curva $y = \frac{1}{x}$ alrededor de OX entre los mismos límites.

$$V_1 = \pi \int_1^4 (\sqrt{x})^2 \, dx = \pi \cdot \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^4 = \frac{15\pi}{2} \ \text{u}^3$$

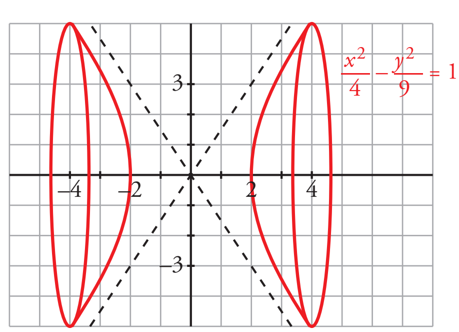
$$V_2 = \pi \int_1^4 \left(\frac{1}{x} \right)^2 dx = \pi \cdot \left[\frac{-1}{x} \right]_1^4 = \frac{3\pi}{4} \ \text{u}^3$$

El volumen buscado es:

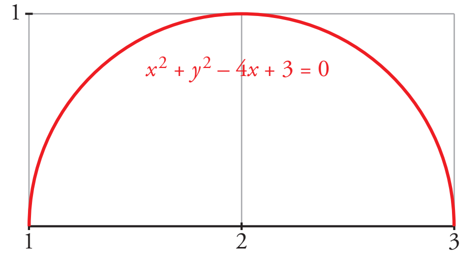
$$V_1 - V_2 = \frac{15\pi}{2} - \frac{3\pi}{4} = \frac{27\pi}{4} \ \text{u}^3$$

49 **Calcula el volumen engendrado por la hipérbola $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ cuando $x \in [-4, 4]$.**

$$V = 2\pi \cdot \int_2^4 f(x)^2 \, dx = 2\pi \cdot \int_2^4 \left(\frac{9x^2}{4} - 9 \right) dx = 2\pi \cdot \left[\frac{3x^3}{4} - 9x \right]_2^4 = 2\pi \cdot 24 = 48\pi \ \text{u}^3$$



50 **Halla el volumen engendrado por la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ al girar alrededor del eje X.**



El círculo del ejercicio tiene su centro en (2, 0) y radio 1; por tanto, corta al eje OX en (1, 0) y (3, 0). Así, nuestros límites de integración son 1 y 3.

$$(x - 2)^2 + y^2 = 1$$

$$V = \pi \cdot \int_1^3 y^2\, dx = \pi \cdot \int_1^3 (1 - (x - 2)^2)\, dx = \pi \cdot \left[x - \frac{(x-2)^3}{3} \right]_1^3 = \frac{4\pi}{3} \text{ u}^3$$

51 **Halla la derivada de las funciones que se dan en los siguientes apartados:**

a) $F(x) = \int_0^x \cos t^2\, dt$ **b)** $F(x) = \int_0^{x^2} (t^2 + t)\, dt$

c) $F(x) = \int_4^x \frac{1}{1 + sen^2\, t}\, dt$ **d)** $F(x) = \int_0^{sen\, x} (1 + t)\, dt$

a) Como f es continua, podemos aplicar el teorema fundamental del cálculo:

$$F'(x) = \cos x^2$$

b) Como f es continua, también podemos aplicar el teorema fundamental del cálculo:

$$F'(x) = [(x^2)^2 + x]\, 2x = 2x^5 + 2x^3$$

c) Del mismo modo:

$$F'(x) = \frac{1}{1 + sen\, x}$$

d) Análogamente:

$$F'(x) = (1 + sen\, x) \cdot (sen\, x)' = (1 + sen\, x) \cdot \cos x$$

52 **Sin resolver la integral, indica dónde hay máximo o mínimo relativo en la función:**

$$F(x) = \int_0^x (t^2 - 1)\, dt$$

Los máximos o mínimos relativos se obtienen para los valores de x donde la primera derivada es cero, en nuestro caso, $F'(x) = 0$.

Como f es continua, podemos aplicar el teorema fundamental del cálculo:

$$F'(x) = x^2 - 1$$

$F'(x) = 0$ en $x = -1$ y $x = 1$, así en los puntos de abscisa –1 y 1 hay máximos o mínimos relativos.

53 **Sabemos que $\int_0^x f(t)\, dt = x^2 (1 + x)$, siendo continua en $\mathbb{R}$. Calcula $f(2)$.**

Aplicando el teorema fundamental del cálculo, se tiene que:

$$f(x) = 2x(1 + x) + x^2$$

$$f(2) = 16$$

54 **Sea $F(x) = \int_1^x \cos^2 t\, dt$. Halla los posibles extremos de dicha función en el intervalo $[0, 2\pi]$.**

Como $f(x) = \cos^2 x$ es continua en $[0, 2\pi]$, podemos aplicar el teorema fundamental del cálculo, y así obtenemos la primera derivada de la función $F(x)$:

$$F'(x) = \cos^2 x$$

Esta tiene sus extremos en los valores de x en que $F'(x) = 0$, esto es en $x = \frac{\pi}{2}$ y $x = \frac{3\pi}{2}$.

Página 382

55 Halla máximos y mínimos relativos de las funciones:

a) $F(x) = \int_0^x (t-1)^2 (t+2)^2 \, dt$ **b)** $G(x) = \int_1^x \frac{\log t}{t} \, dt$

a) $F'(x) = (x-1)^2 (x+2)^2$

$F'(x) = 0 \rightarrow (x-1)^2 (x+2)^2 = 0 \rightarrow x = 1, \ x = -2$

Pero $F'(x) > 0$ cuando $x \neq 1$ y $x \neq -2$ por ser un cuadrado perfecto. Luego $F(x)$ es creciente y no tiene máximos ni mínimos relativos.

b) $G'(x) = \frac{\log x}{x}$ con $x > 0$

$G'(x) = 0 \rightarrow \log x = 0 \rightarrow x = 1$

$G' < 0$	1	$G' > 0$
$\searrow$		$\nearrow$

El mínimo relativo se alcanza en $x = 1$.

$x = 1, \ G(1) = \int_1^1 \frac{\log t}{t} \, dt = 0 \rightarrow$ El mínimo relativo es el punto $(1, 0)$.

56 Considera la región del plano que determinan las curvas $y = e^x$ e $y = e^{2x}$ y la recta $x = k$.

a) Halla su área para $k = 1$.

b) Determina el valor de $k > 0$ para que el área sea 2.

a) Las funciones dadas se cortan en el punto $x = 0, \ y = 1$.

Si $k > 0$, el área es:

$$\int_0^k (e^{2x} - e^x) \, dx = \left[\frac{e^{2x}}{2} - e^x \right]_0^k = \frac{e^{2k}}{2} - e^k - \left(-\frac{1}{2} \right) = \frac{e^{2k}}{2} - e^k + \frac{1}{2}$$

Si $k < 0$, el área es:

$$\int_k^0 (e^x - e^{2x}) \, dx = \left[e^x - \frac{e^{2x}}{2} \right]_k^0 = \frac{1}{2} - e^k + \frac{e^{2k}}{2}$$

b) $\frac{e^{2k}}{2} - e^k + \frac{1}{2} = 2 \rightarrow e^{2k} - 2e^k - 3 = 0$

Haciendo el cambio de variable $z = e^k$, obtenemos:

$z^2 - 2z - 3 = 0 \rightarrow z = 3, \ z = -1$ (no vale)

$e^k = 3 \rightarrow k = \ln 3$

57 Calcula el área encerrada entre la curva $y = x^2 - 2x - 3$ y la cuerda de la misma que tiene por extremos los puntos de abscisas 0 y 1.

Calculamos las coordenadas de los puntos:

$x = 0, \ y = -3 \rightarrow (0, -3)$

$x = 1, \ y = -4 \rightarrow (1, -4)$

La pendiente de la cuerda que pasa por ellos es: $m = \frac{-4+3}{1} = -1$

La ecuación de la recta que contiene a la cuerda es: $y = -3 - x$

$$G(x) = \int [(x^2 - 2x - 3) - (-3 - x)] \, dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}$$

$$\int_0^1 [(x^2 - 2x - 3) - (-3 - x)] \, dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$$

El área buscada es $\frac{1}{6}$ u^2.

Cuestiones teóricas

58 **Calcula la derivada de la función dada por $F(x) = \int_0^{x^2} \cos t \, dt$ de dos formas:**

a) Obteniendo de forma explícita $F(x)$ y, después, derivando.

b) Aplicando el teorema fundamental del cálculo.

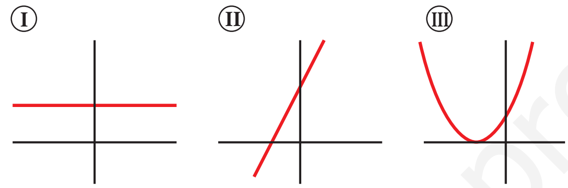
a) $F(x) = \left[sen\, t \right]_0^{x^2} = sen\, x^2$

$F'(x) = 2x \cos x^2$

b) Como f es una función continua en todos los puntos, se puede aplicar el teorema fundamental del cálculo:

$$F'(x) = f(x^2) \cdot (x^2)' = 2x \cos x^2$$

59 **La gráficas I, II y III corresponden, no necesariamente por ese orden, a las de una función derivable f, a su función derivada f' y a una primitiva F de f. Identifica cada gráfica con su función, justificando la respuesta.**

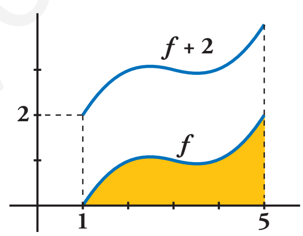


La gráfica II es la de la función; la gráfica I, la de su derivada y la gráfica III, la de su primitiva.

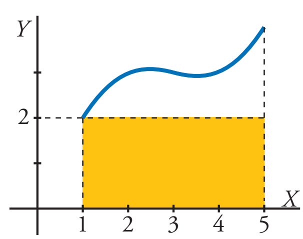
La razón es: partiendo de la gráfica II, observamos que se trata de una función lineal (afín) con pendiente positiva, por lo que la función derivada tiene que ser una función constante (la pendiente de la función afín).

Por otro lado, la primitiva de la función afín tiene que ser una función cuadrática, cuya gráfica corresponde a la parábola.

60 **Sabemos que el área limitada por una función f, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 5$ es igual a 6. ¿Cuánto aumentará el área si trasladamos 2 unidades hacia arriba la función f?**



Si trasladamos también el eje OX 2 unidades hacia arriba, es fácil ver que el área añadida es la de un rectángulo 4 u de base y 2 u de altura (su área es 8 u^2).



Es decir, su área aumentará 8 u^2. (No depende de lo que mida el área señalada).

61 **Si una función f es positiva para todos los valores de su variable, cualquier función primitiva de ella es creciente en cada uno de sus puntos. ¿Por qué?**

Cierto, puesto que si la primera derivada de una función es positiva, dicha función es creciente.

62 **Halla las derivadas de:**

a) $F(x) = \int_2^3 \cos^3 t\, dt$ **b)** $F(x) = \int_x^0 (1+3t^2)\, dt$

c) $F(x) = \int_1^a \frac{x}{1+t}\, dt$ **d)** $F(x) = \int_1^x \frac{x}{1+t}\, dt$

(Observa que la x puede salir fuera de la integral)

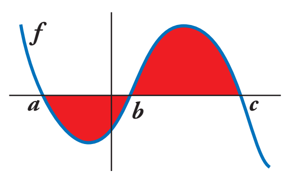
a) $F'(x) = 0$ por ser una función constante.

b) $F(x) = -\int_0^x (1+3t^2)\, dt \qquad F'(x) = -1-3x^2$

c) $F(x) = x\int_1^a \frac{1}{1+t}\, dt \qquad F'(x) = \int_1^a \frac{1}{1+t}\, dt$

d) $F(x) = x\int_1^x \frac{1}{1+t}\, dt \qquad F'(x) = \int_1^x \frac{1}{1+t} dt + x \cdot \frac{1}{1+x} = \int_1^x \frac{1}{1+t}\, dt + \frac{x}{1+x}$

63 **¿Cuál de las siguientes expresiones nos da el área limitada por la gráfica de f y el eje de abscisas?**



a) $\int_a^c f$ **b)** $\left|\int_a^c f\right|$ **c)** $\int_a^b f + \int_b^c f$ **d)** $-\int_a^b f + \int_b^c f$

d)

64 **Dada la función $y = x^2$, halla el punto $c \in [0, 2]$ tal que el área $\int_0^2 x^2\, dx$ sea igual a la de un rectángulo de base 2 y altura $f(c)$.**

Es decir, que cumpla lo siguiente:

$$2f(c) = \int_0^2 x^2\, dx$$

¿Qué teorema asegura la existencia de c?

$$\int_0^2 x^2\, dx = \frac{8}{3}$$

Así pues, se tiene: $2f(c) = \frac{8}{3}$, de donde averiguamos que $c = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

El teorema que asegura la existencia de c es el teorema del valor medio del cálculo integral.

65 **Sea F una función definida en $[0, +\infty)$ tal que: $F(x) = \int_0^x \ln(2+t)\, dt$**

Analiza si es verdadera o falsa cada una de las siguientes afirmaciones:

a) $F(0) = \ln 2$ **b)** $F'(x) = \frac{1}{2+x},\ x \geq 0$ **c)** F **es creciente en su dominio.**

a) Calculamos $G(t) = \int \ln(2+t)\, dt$ integrando por partes:

$$\left.\begin{array}{l} u = \ln(2+t) \to du = \frac{1}{2+t}\, dt \\ dv = dt \to v = t \end{array}\right\}$$

$$G(t) = \int \ln(2+t)\, dt = t\ln(2+t) - \int \frac{t}{2+t}\, dt = t\ln(2+t) - \int\left(1 - \frac{2}{2+t}\right) dt =$$

$$= t\ln(2+t) - t + 2\ln(2+t) = (t+2)\ln(2+t) - t$$

Por tanto:

$F(x) = G(x) - G(0) = [(x + 2)\ ln\ (2 + x) - x] - [2ln\ 2 - 0] = (x + 2)\ ln\ (x + 2) - x - 2ln\ 2$

$F(0) = 2ln\ 2 - 2ln\ 2 = 0$

La afirmación $F(0) = ln\ 2$ es falsa (basta ver, además, que en $F(0)$ no hay área).

b) Como f es continua para $x \geq 0$, aplicamos el teorema del cálculo integral:

$F'(x) = ln\,(2 + x)$

También es falsa.

c) Cierta, porque su derivada F' es positiva en todo el dominio.

66 **Demuestra la desigualdad siguiente:**

$$\mathbf{0 \leq \int_0^{\pi/2} \frac{sen\ x}{1 + x^2}\, dx \leq 1}$$

En el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ se cumple que:

$$0 \leq \frac{sen\ x}{1 + x^2} \leq \frac{x}{1 + x^2}$$

ya que $0 \leq sen\ x \leq x$ en dicho intervalo.

Por tanto:

$$0 \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sen\ x}{1 + x^2}\, dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1 + x^2}\, dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1 + x^2}\, dx = \left[\frac{1}{2}\, ln\,(1 + x^2)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\, ln\left(1 + \frac{\pi^2}{4}\right) \approx 0{,}62 < 1$$

De esta forma queda probada la desigualdad.

Página 383

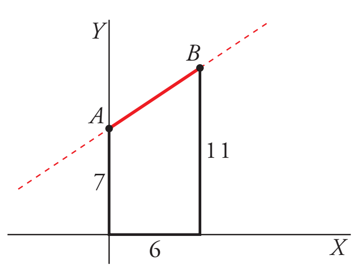
Para profundizar

67 **a) Halla el volumen del tronco de cono de radios 7 cm y 11 cm y altura 6 cm.**

b) Obtén la fórmula:

$$\mathbf{V = \frac{1}{3}\pi\, h\,(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)}$$

que nos da el volumen de un tronco de cono de radios r_1, r_2 y altura h.



a) La recta pasa por los puntos (0, 7) y (6, 11).

Obtenemos su ecuación:

$$m = \frac{11 - 7}{6 - 0} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, \text{ la recta es } y = 7 + \frac{2}{3}x$$

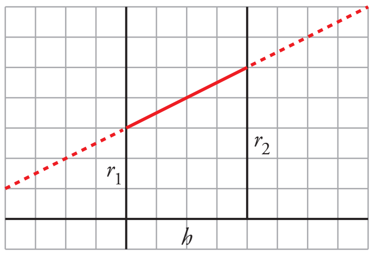
Los límites de integración son $x = 0$ y $x = 6$.

El volumen será:

$$V = \pi \cdot \int_0^6 \left(f(x)\right)^2 dx = \pi \cdot \int_0^6 \left(7 + \frac{2}{3}x\right)^2 dx = \pi \cdot \int_0^6 \left(49 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{9}x^2\right) dx =$$

$$= \pi \cdot \left[49x + \frac{2x^2}{3} + \frac{4x^3}{27}\right]_0^6 = 350\pi \text{ u}^3$$

b)



La recta pasa por los puntos $(0, r)$ y (h, r_2).

Obtenemos la ecuación:

$$m = \frac{r_2 - r_1}{\text{h} - 0} = \frac{r_2 - r_1}{\text{h}} \rightarrow y = r_1 + \left(\frac{r_2 - r_1}{\text{h}}\right) \cdot x$$

El volumen será:

$$V = \pi \cdot \int_0^{\text{h}} \left[r_1 + \left(\frac{r_2 - r_1}{\text{h}}\right) x\right]^2 dx =$$

$$= \pi \cdot \int_0^{\text{h}} \left[r_1^2 + \left(\frac{r_2 - r_1}{\text{h}}\right)^2 \cdot x^2 + 2r_1 \left(\frac{r_2 - r_1}{\text{h}}\right) \cdot x\right] dx =$$

$$= \pi \cdot \left[r_1^2 + \left(\frac{r_2 - r_1}{\text{h}}\right)^2 \cdot \frac{x^3}{3} + r_1 \left(\frac{r_2 - r_1}{\text{h}}\right) \cdot x^2\right]_0^{\text{h}} =$$

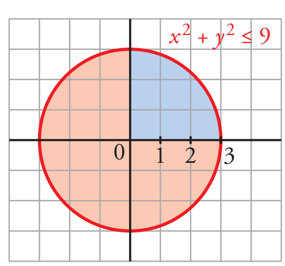
$$= \pi \cdot \left[r_1^2\text{h} + \left(\frac{r_2 - r_1}{\text{h}}\right)^2 \cdot \frac{\text{h}^3}{3} + r_1 \cdot \left(\frac{r_2 - r_1}{\text{h}}\right) \cdot \text{h}^2\right] =$$

$$= \pi \cdot \text{h} \cdot \left[r_1^2 + \frac{1}{3} \cdot (r_2^2 + r_1^2 - 2 \cdot r_1 \cdot r_2 + r_1 r_2 - r_1^2\right] =$$

$$= \pi \cdot \text{h} \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot r_2^2 + \frac{1}{3} \cdot r_1^2 - \frac{2}{3} \cdot r_1 r_2 + r_1 r_2\right] = \frac{1}{3}\pi\text{h}\,(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$$

68 **a) Demuestra, utilizando el cálculo integral, que el área del círculo $x^2 + y^2 \leq 9$ es 9π.**

b) Demuestra, utilizando el cálculo integral, que el volumen de la esfera de radio r es $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.



a) Área $= 4 \cdot \int_0^3 \sqrt{9 - x^2}\, dx$

Calculamos $G(x) = \int \sqrt{9 - x^2}\, dx$, mediante un cambio de variable:

$$G(x) = \int \sqrt{9 - x^2}\, dx = 3 \cdot \int \sqrt{1 - \left(\frac{x}{3}\right)^2}\, dx$$

Cambio: $\dfrac{x}{3} = sen\ t \ \rightarrow\ x = 3sen\ t \ \rightarrow\ dx = 3cos\ t\ dt$

$$G(x) = 3 \cdot \int \sqrt{1 - sen^2\ t} \cdot 3cos\ t\ dt = 9 \int cos^2\ t\ dt =$$

$$= 9 \int \left(\frac{1}{2} + \frac{cos^2\ t}{2} \right) dt = 9 \left[\frac{1}{2}\ t + \frac{1}{4}\ sen^2\ t \right] = \frac{9}{2}\ t + \frac{9}{4}\ sen^2\ t =$$

$$= \frac{9}{2} \cdot arc\ sen \left(\frac{x}{3} \right) + \frac{9}{4} \cdot 2 \cdot \frac{x}{3} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{3} \right)^2} =$$

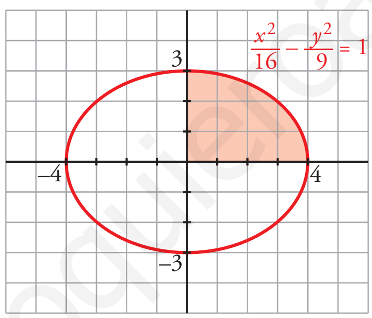
$$= \frac{9}{2} \cdot arc\ sen \left(\frac{x}{3} \right) + \frac{3}{2} \cdot x \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{3} \right)^2} =$$

$$= \frac{9}{2} \cdot arc\ sen \left(\frac{x}{3} \right) + \frac{x \cdot \sqrt{9 - x^2}}{2}$$

Por tanto, el área será: $A = 4 \cdot (G(3) - G(0)) = 4 \cdot \dfrac{9\pi}{4} = 9\pi\ \text{u}^2$

b) $V = \pi \cdot \displaystyle\int_{-R}^{R} y^2\ dx = \pi \cdot \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)\ dx = \pi \cdot \left[R^2\ x - \frac{x^3}{3} \right]_{-R}^{R} = \pi \cdot \left(R^3 - \frac{R^3}{3} + R^3 - \frac{R^3}{3} \right) = \frac{4}{3} \pi\ R^3$

69 **Calcula el área encerrada por la elipse $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.**



- $\dfrac{y^2}{9} = 1 - \dfrac{x^2}{16} \ \rightarrow\ y^2 = 9 \cdot \left(1 - \dfrac{x^2}{16} \right) \ \rightarrow\ y = \pm\ 3 \cdot \sqrt{1 - \left(\dfrac{x}{4} \right)^2}$

- El área es:

$$A = 4 \cdot \int_0^4 3 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{4} \right)^2}\ dx = 12 \cdot \int_0^4 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{4} \right)^2}\ dx$$

- Calculamos $G(x) = \displaystyle\int \sqrt{1 - \left(\frac{x}{4} \right)^2}\ dx$:

Cambio: $\dfrac{x}{4} = sen\ t \ \rightarrow\ x = 4sen\ t \ \rightarrow\ dx = 4cos\ t\ dt$

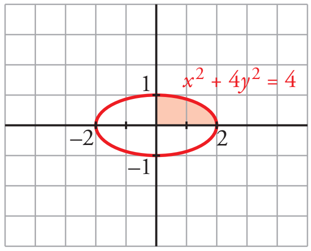
$$G(x) = \int \sqrt{1 - sen^2\ t} \cdot 4cos\ t\ dt = 4 \int cos^2\ t\ dt = 4 \cdot \int \left(\frac{1}{2} + \frac{cos^2\ t}{2} \right) dt =$$

$$= \int (2 + 2cos\ 2t)\ dt = 2t + sen\ 2t = 2arc\ sen \left(\frac{x}{4} \right) + 2 \cdot \frac{x}{4} \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{16}} =$$

$$= 2arc\ sen \left(\frac{x}{4} \right) + \frac{x\sqrt{16 - x^2}}{8}$$

- El área será: $A = 12 \cdot [G(4) - G(0)] = 12\pi$

70 **Demuestra, utilizando el cálculo integral, que el área de la elipse $x^2 + 4y^2 = 4$ es 2π.**



- Despejamos y: $4y^2 = 4 - x^2 \rightarrow y^2 = 1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 \rightarrow y = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}$

- El área será: $A = 4 \cdot \int_0^2 \sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}\, dx$

- Calculamos $G(x) = \int \sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}\, dx$

  Cambio: $\frac{x}{2} = sen\ t \rightarrow x = 2sen\ t \rightarrow dx = 2cos\ t\ dt$

  $$G(x) = \int \sqrt{1 - sen^2\ t} \cdot 2cos\ t\ dt = 2\int cos^2\ t\ dt = 2 \cdot \int \left(\frac{1}{2} + \frac{cos^2\ t}{2}\right) dt = \int (1 + cos\ 2t)\, dt =$$

  $$= t + \frac{sen^2\ t}{2} = arc\ sen\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{2} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = arc\ sen\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x \cdot \sqrt{4 - x^2}}{4}$$

- El área será:

  $$A = 4 \cdot [G(2) - G(0)] = 4 \cdot \frac{\pi}{2} = 2\pi$$

71 **Demuestra que el volumen del elipsoide obtenido al girar la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ es:**

a) $\frac{4}{3}\pi a b^2$ **si gira alrededor del eje** X.

b) $\frac{4}{3}\pi a^2 b$ **si gira alrededor del eje** Y.

a) $V = \pi \cdot \int_{-a}^{a} \left(b^2 - x^2 \frac{b^2}{a^2}\right) dx = \pi \cdot \left[b^2 x - \frac{x^3}{3} \cdot \frac{b^2}{a^2}\right]_{-a}^{a} = \pi \cdot \left(b^2 a - \frac{ab^2}{3} + b^2 a - \frac{ab^2}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi\, ab^2$

b) $V = \pi \cdot \int_{-b}^{b} \left(a^2 - y^2 \frac{a^2}{b^2}\right) dy = \pi \cdot \left[a^2 y - \frac{y^3}{3} \cdot \frac{a^2}{b^2}\right]_{-b}^{b} = \pi \cdot \left(a^2 b - \frac{ba^2}{3} + a^2 b - \frac{ba^2}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi\, ba^2$

72 **Halla la derivada de la función siguiente:**

$$F(x) = \int_{x^2}^{x^3} x\ sen\ t\ dt$$

Si $G(x)$ es una primitiva de la función $g(x) = sen\ x$, entonces $\int_{x^2}^{x^3} sen\ t\ dt = G(x^3) - G(x^2)$.

La derivada, aplicando la regla de la cadena, es:

$$D\left[\int_{x^2}^{x^3} sen\ t\ dt\right] = D[G(x^3) - G(x^2)] = G'(x^3) \cdot 3x^2 - G'(x^2) \cdot 2x = 3x^2\ sen\ (x^3) - 2x\ sen\ (x^2)$$

Por tanto:

$$F'(x) = \int_{x^2}^{x^3} sen\ t\ dt + x[3x^2\ sen\ (x^3) - 2x\ sen\ (x^2)] = \int_{x^2}^{x^3} sen\ t\ dt + x^2\,[3x\ sen\ (x^3) - 2sen\ (x^2)]$$

73 **Comprueba si existen y, en su caso, calcula las siguientes integrales impropias:**

a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt$ b) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^r}\,dx, \quad r>1$ c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+t^2}\,dt$ d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^x\,dx$

e) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$ f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ g) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ h) $\displaystyle\int_2^3 \frac{du}{(u-2)^2}$

a) $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \left[arc\ tg\ t\right]_0^x = arc\ tg\ x$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \lim_{x\to+\infty} arc\ tg\ x = \frac{\pi}{2}$$

b) $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^r}\,dt = \left[\frac{1}{(1-r)\,t^{r-1}}\right]_1^x = \frac{1}{(1-r)\,x^{r-1}} - \frac{1}{1-r}$

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^r}\,dx = \lim_{x\to+\infty} \int_1^x \frac{1}{t^r}\,dt = \frac{1}{r-1}$, ya que $r-1>0$ y, por tanto, la primera fracción tiende a 0.

c) $\displaystyle\int_{-x}^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \left[arc\ tg\ t\right]_{-x}^x = arc\ tg\ x - arc\ tg\ (-x)$, con $x>0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx = \lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^x \frac{1}{1+t^2}\,dt = \lim_{x\to+\infty} \left[arc\ tg\ x - arc\ tg\ (-x)\right] = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

d) $\displaystyle\int_{-x}^0 e^t\,dt = \left[e^t\right]_{-x}^0 = 1 - e^{-x}$, con $x>0$

$$\int_{-\infty}^0 e^x\,dx = \lim_{x\to+\infty} \int_{-x}^0 e^t\,dt = \lim_{x\to+\infty} (1-e^{-x}) = 1$$

e) $\displaystyle\int_x^1 \frac{1}{\sqrt[3]{t}}\,dt = \left[\frac{3}{2}\,t^{2/3}\right]_x^1 = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}x^{2/3}$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \lim_{x\to 0^+} \int_x^1 \frac{1}{\sqrt[3]{t}}\,dt = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}x^{2/3}\right) = \frac{3}{2}$$

f) $\displaystyle\int_x^1 \frac{1}{t}\,dt = \left[ln\ t\right]_x^1 = -ln\ x$

$\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \int_x^1 \frac{1}{t}\,dt = \lim_{x\to 0^+} (-ln\ x) = +\infty$ $\to$ No existe la integral.

g) $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \left[arc\ sen\ t\right]_0^x = arc\ sen\ x$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{x\to 1^-} \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt = \lim_{x\to 1^-} arc\ sen\ x = \frac{\pi}{2}$$

h) $\displaystyle\int_x^3 \frac{du}{(u-2)^2} = \left[-\frac{1}{u-2}\right]_x^3 = -1 + \frac{1}{x-2}$

$\displaystyle\lim_{x\to 2^+} \int_x^3 \frac{du}{(u-2)^2} = \lim_{x\to 2^+} \left(-1 + \frac{1}{x-2}\right) = +\infty$ $\to$ No existe la integral.

74 **Si $f(x) = \dfrac{1}{1+e^x}$ y $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$, halla el siguiente límite:**

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)}{x} = \frac{(0)}{(0)} \overset{H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{g'(x)}{1} = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+e^x} = 1$$

Por tanto, el límite dado vale 1.

75 **Determina el valor del parámetro $a > 0$ de tal manera que valga 108 el área de la región del plano limitada por el eje X y la gráfica de la función siguiente:**

$$f(x) = a(x+2)^2 - (x+2)^3$$

La función corta al eje X en los puntos de abscisa –2 y $a - 2$. Nuestros límites de integración; buscamos una primitiva:

$$G(x) = \int [a(x+2)^2 - (x+2)^3]\, dx = a \cdot \frac{(x+2)^3}{3} - \frac{(x+2)^4}{4}$$

$$G(a-2) = \frac{a^4}{12}$$

$$G(-2) = 0$$

$$G(a-2) - G(2) = \frac{a^4}{12}$$

Como el área tiene que ser 108, igualamos:

$\dfrac{a^4}{12} = 108$. De donde obtenemos que $a = 6$.

Autoevaluación

Página 383

1 **Dada la función $f(x) = x^3 + 3x^2$, calcula:**

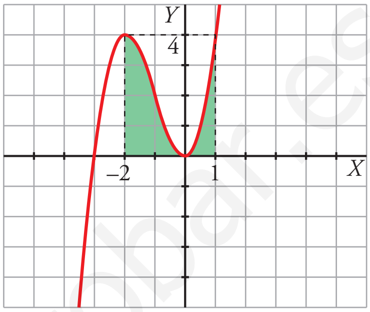
a) El área encerrada por la gráfica de $f(x)$, el eje X y las rectas $x = -2$ y $x = 1$.

b) El área de cada uno de los dos recintos comprendidos entre las gráficas de $f(x)$ y de $g(x) = x + 3$.

a) Representamos el recinto:

- Cortes con el eje OX:

$$x^3 + 3x^2 = 0 \rightarrow x^2(x+3) = 0 \begin{cases} x = -3 \\ x = 0 \end{cases}$$



- Puntos singulares:

$$f'(x) = 0 \rightarrow 3x^2 + 6x = 0 \rightarrow x(3x+6) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

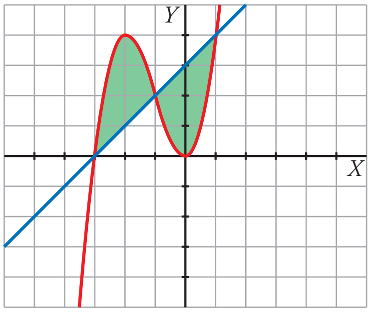
$$f''(x) = 6x + 6 \begin{cases} f''(0) = 6 > 0 \rightarrow \text{Mínimo: } (0, 0) \\ f''(-2) = -6 < 0 \rightarrow \text{Máximo: } (-2, 4) \end{cases}$$

$$\text{Área} = \int_{-2}^{1} (x^3 + 3x^2)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} + x^3\right]_{-2}^{1} = \left(\frac{1}{4} + 1\right) - (4 - 8) = \frac{21}{4} \text{ u}^2$$

b) • Representamos $f(x) = x^3 + 3x^2$ y $g(x) = x + 3$:

Hallamos los puntos de corte de f y g:

$$x^3 + 3x^2 = x + 3 \rightarrow x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$$



	1	3	–1	–3
–3		–3	0	3
	1	0	–1	0

$$x^2 - 1 = 0 \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Las gráficas se cortan en $x = -3$, $x = -1$ y $x = 1$.

- Calculamos el área entre –3 y –1 y el área entre –1 y 1:

$$\int_{-3}^{-1} [(x^3 + 3x^2) - (x+3)]\,dx = \int_{-3}^{-1} (x^3 + 3x^2 - x - 3)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} + x^3 - \frac{x^2}{2} - 3x\right]_{-3}^{-1} =$$

$$= \left(\frac{1}{4} - 1 - \frac{1}{2} + 3\right) - \left(\frac{81}{4} - 27 - \frac{9}{2} + 9\right) = \frac{7}{4} - \left(-\frac{9}{4}\right) = \frac{7}{4} + \frac{9}{4} = 4 \text{ u}^2$$

$$\int_{-1}^{1} [(x+3) - (x^3 + 3x^2)]\,dx = \int_{-1}^{1} (x + 3 - x^3 - 3x^2)\,dx = \left[\frac{x^2}{2} + 3x - \frac{x^4}{4} - x^3\right]_{-1}^{1} =$$

$$= \left(\frac{1}{2} + 3 - \frac{1}{4} - 1\right) - \left(\frac{1}{2} - 3 - \frac{1}{4} + 1\right) = \frac{9}{4} - \left(-\frac{7}{4}\right) = \frac{9}{4} + \frac{7}{4} = \frac{16}{4} = 4 \text{ u}^2$$

2 **Calcula el área del recinto limitado por $f(x) = x^2 - 2x + 2$, el eje Y y la recta tangente a f en $x = 3$.**

- Calculamos la tangente a $f(x) = x^2 - 2x + 2$ en $x = 3$:

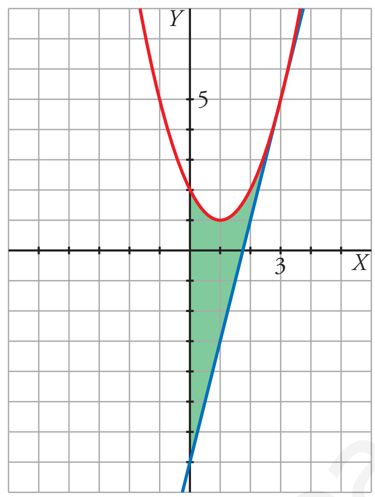
  Punto de tangencia: $x = 3$, $f(3) = 9 - 6 + 2 = 5 \rightarrow (3, 5)$

  Pendiente de la recta tangente: $f'(x) = 2x - 2 \rightarrow m = f'(3) = 4$

  Ecuación de la recta tangente: $y = 5 + 4(x - 3) \rightarrow y = 4x - 7$

- Representamos el recinto:

  $f(x) = x^2 - 2x + 2$



Vértice de la parábola:

$f'(x) = 0 \rightarrow 2x - 2 = 0 \rightarrow x = 1, \ f(1) = 1 \rightarrow (1, 1)$

Corte con los ejes:

$x = 0, \ f(0) = 2 \rightarrow (0, 2)$

$x^2 - 2x + 2 = 0 \rightarrow x = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 8}}{2}$

No corta al eje OX.

- Calculamos el área:

$$A = \int_0^3 [(x^2 - 2x + 2) - (4x - 7)]\,dx = \int_0^3 (x^2 - 6x + 9)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x\right]_0^3 = 9\text{ u}^2$$

3 **Calcula:** $\displaystyle\int_0^2 |2x - 1|\,dx$

La función se descompone de la siguiente manera:

$$f(x) = |2x - 1| = \begin{cases} -2x + 1 & x \le \dfrac{1}{2} \\ 2x - 1 & x > \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Por tanto:

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (-2x + 1)\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 (2x - 1)\,dx = \left[-x^2 + x\right]_0^{1/2} + \left[x^2 - x\right]_{1/2}^2 =$$

$$= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 4 - 2 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

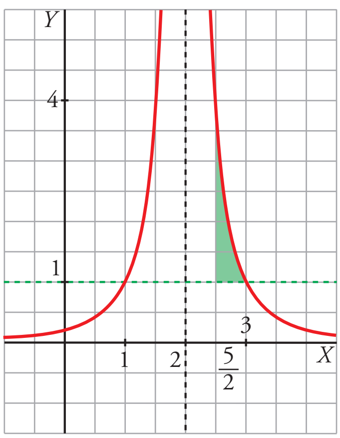
4 Halla el área de la región comprendida entre la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$ y las rectas $y = 1$, $x = \dfrac{5}{2}$.

Representamos la función $f(x) = \dfrac{1}{(x-2)^2}$:

- Asíntota vertical: $x = 2$, $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = +\infty$
- Asíntota horizontal: $y = 0$
- Puntos singulares: $f'(x) = \dfrac{-2}{(x-2)^3} \neq 0$ para cualquier $x \to$ No tiene puntos singulares.
- Punto de corte con la recta $y = 1$:

$$\frac{1}{(x-2)^2} = 1 \to (x-2)^2 = 1 \begin{cases} x = 1 \to (1,1) \\ x = 3 \to (3,1) \end{cases}$$

Recinto:



$$\text{Área} = \int_{\frac{5}{2}}^{3} \left[\frac{1}{(x-2)^2} - 1 \right] dx =$$

$$= \left[\frac{-1}{x-2} - x \right]_{\frac{5}{2}}^{3} = -4 + \frac{9}{2} = \frac{1}{2} \text{ u}^2$$

5 Calcula el área encerrada entre la gráfica de la función exponencial $f(x) = e^x$ y la cuerda a la misma que une los puntos de abscisas $x = 0$ y $x = 2$.

Ecuación de la cuerda:

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 \to f(0) = e^0 = 1 \\ x = 2 \to f(2) = e^2 \end{array} \right\} \text{ Recta que pasa por } (0,\ 1) \text{ y por } (2,\ e^2):$$

$$m = \frac{e^2 - 1}{2} \to y = 1 + \frac{e^2 - 1}{2} x$$

Área:

$$\int_0^2 \left(1 + \frac{e^2-1}{2} x - e^x \right) dx = \left[x + \frac{e^2-1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} - e^x \right]_0^2 = (2 + e^2 - 1 - e^2) - (0 + 0 - e^0) = 1 + 1 = 2 \text{ u}^2$$

6 Dada la función $F(x) = \int_1^{x^2} \ln t \, dt$ con $x \geq 1$:

a) Calcula $F'(e)$.

b) ¿Tiene F puntos de inflexión? Justifica tu respuesta.

a) $F(x) = \int_1^{x^2} \ln t \, dx \to F'(x) = (\ln x^2) \cdot 2x = (2\ln x)\, 2x = 4x \ln x$

$F'(e) = 4e \ln e = 4e$

b) $F''(x) = 4\ln x + 4x \cdot \dfrac{1}{x} = 4\ln x + 4;\ \ 4\ln x + 4 = 0 \to \ln x = -1 \to x = e^{-1}$

F no tiene puntos de inflexión porque $e^{-1} < 1$; es decir, e^{-1} no pertenece al dominio de F.

7 a) Halla, integrando la función adecuada en el intervalo que convenga, el volumen de un cono de radio 5 cm y altura 6 cm.

b) Procediendo de forma similar, deduce la fórmula del volumen de un cono de radio r y altura a.

a) La recta $y = \frac{5}{6}x$ pasa por los puntos (0, 0) y (6, 5).

El cono dado se puede obtener girando el segmento que une los puntos anteriores alrededor del eje X. El volumen es:

$$V = \pi \cdot \int_0^6 \left(\frac{5}{6}x\right)^2 dx = \frac{25\pi}{36}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^6 = \frac{25\pi}{36} \cdot \frac{6^3}{3} = 50\pi \ \text{u}^3$$

b) La recta $y = \frac{r}{a}x$ pasa por los puntos (0, 0) y (a, r).

El cono de altura a y radio r se puede obtener girando el segmento que une los puntos anteriores alrededor del eje X. El volumen es:

$$V = \pi \cdot \int_0^a \left(\frac{r}{a}x\right)^2 dx = \frac{\pi r^2}{a^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{\pi r^2}{a^2} \cdot \frac{a^3}{3} = \frac{1}{3}\pi r^2 a \ \text{u}^3$$