

11

INTEGRALES DEFINIDAS

SOLUCIONES DE LAS ACTIVIDADES

1 ■■■ Calcula las siguientes integrales definidas.

a) $\int_{-1}^2 (x^2 - x - 2) dx$

b) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos x dx$

c) $\int_1^e \frac{1}{x} dx$

d) $\int_{-2}^3 |x| dx$

e) $\int_2^8 \frac{dx}{x (\ln x)^2}$

a) $\frac{-9}{2}$

b) 0

c) 1

d) $\frac{13}{2}$

e) $\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 8}$

f) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 x \cos x dx$

g) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$

h) $\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$

i) $\int_0^5 x^2 e^x dx$

j) $\int_2^3 \frac{x dx}{(1-x)^2}$

f) $\frac{2}{3}$

g) $\frac{\pi}{6}$

h) $\frac{\pi}{2}$

i) $17e^5 - 2$

j) $\ln 2 + \frac{1}{2}$

2 ■■■ Halla la derivada de las siguientes funciones.

a) $F(x) = \int_a^x \ln t dt$ b) $F(x) = \int_2^{x^2} \frac{dt}{t}$ c) $F(x) = \int_2^{x^2} e^t dt$

a) $F'(x) = \ln x$

b) $F'(x) = \frac{2}{x}$

c) $F'(x) = e^{x^2} \cdot 2x$

3 ■■■ Averigua el área que determinan la gráfica de la función $f(x) = |2x + 3|$, el eje de ordenadas, el eje de abscisas y la recta de ecuación $x = -2$.

Sol: $2,5 u^2$

4 ■■■ Determina el área de la región delimitada por la curva $y = 2x^3 + 7x^2 + 2x - 3$ y el eje de abscisas.

Sol: $9,7604... u^2$

5 ■■■ Calcula el área del trapecio mixtilíneo que determina la gráfica de la función $f(x) = \sin(2x)$ en el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

Sol: $0,5 u^2$

6 ■■■ Calcula el área de la región del plano encerrada por la gráfica de la función $f(x) = \ln x$, el eje de abscisas y la recta de ecuación $x = 2$.

La curva corta al eje de abscisas en $x = 1$.

Sol: $0,39 u^2$

7 ■■■ Calcula el área que determinan la curva $y = \frac{1}{(x+1)^2}$, los ejes de coordenadas y la recta de ecuación $x = 2$.

La curva corta al eje vertical en $(0, 1)$.

Sol: $\frac{2}{3} u^2$

8 ■■■ Calcula el área delimitada por la gráfica de la función $f(x) = \frac{x}{1 + \sqrt{x}}$, el eje de abscisas y las rectas de ecuación $x = 0$ y $x = 4$.

Sol: $3,1361 u^2$

9 ■■■ Calcula el área delimitada por las gráficas de las funciones $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2$.

Sol: $\frac{1}{3} u^2$

10 ■■■ Determina el área de la región del plano limitada por las curvas $y = x^4 + 2x^2$ e $y = x^2 + 2$.

Sol: $\frac{44}{15} u^2$

11 ■■■ Calcula el valor del coeficiente b sabiendo que el área delimitada por la parábola $y = x^2 + bx - 2$ y la recta $2x + y + 2 = 0$, es $\frac{4}{3} u^2$.

Sol: $b = 0$ y $b = -4$.

12 ■■■ Averigua el área que delimitan las gráficas de las funciones $f(x) = \sin x$ y $g(x) = \cos x$, en el intervalo $[0, 2\pi]$.

Sol: $4\sqrt{2} u^2$

13 ■■■ Calcula el volumen del elipsoide de revolución engendrado por la elipse de ecuación $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$ al girar en torno al eje X .

Sol: $\frac{16\pi}{3} u^3$

14 ■■■ Calcula el volumen del sólido engendrado al girar en torno al eje X el recinto limitado por las parábolas $y = x^2$ e $y^2 = x$.

Sol: $\frac{3\pi}{10} u^3$

- 15** Calcula el volumen del sólido engendrado por el giro respecto del eje X formado por la curva $y = xe^x$ y las rectas $x = 0$ y $x = 1$.

Sol: $\frac{e^2 - 1}{4} \pi u^3$

Ejercicios y problemas

Integral definida

- 16** Calcula el valor de las siguientes integrales definidas.

a) $\int_{-1}^3 \sqrt{x+1} dx$

f) $\int_1^e \frac{(\ln x)^3}{x} dx$

b) $\int_{-1}^1 \frac{2x}{x^2+1} dx$

g) $\int_{-1}^1 x\sqrt{2+2x^2} dx$

c) $\int_{-1}^0 x^2(x^3+2)^2 dx$

h) $\int_0^\pi \sin x \cos^2 x dx$

d) $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} dx$

i) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \cotg x dx$

e) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{3+x^2}$

j) $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \sec^2(x+\pi) dx$

a) $\frac{16}{3}$

f) $\frac{1}{4}$

b) 0

g) 0

c) $\frac{7}{9}$

h) $\frac{2}{3}$

d) $\frac{\pi}{4}$

i) $\frac{\ln 2}{2}$

e) $\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\pi}{12}$

j) 2

- 17** Calcula el valor de las siguientes integrales definidas.

a) $\int_{1/4}^{3/4} \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}$

f) $\int_1^e \frac{\sin(\ln x)}{x} dx$

b) $\int_{-2}^1 \frac{dx}{x^2+x+1}$

g) $\int_0^2 \frac{dx}{x^3+1}$

c) $\int_{4/3}^2 \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$

h) $\int_0^\pi (\sin^3 x + \sin^2 x) \cos x dx$

d) $\int_0^\pi x^2 \sin x dx$

i) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{dx}{1+\cos x}$

e) $\int_0^1 \arcsen x dx$

j) $\int_0^2 \frac{2x+3}{2x+1} dx$

a) $\frac{\pi}{3}$

f) $1 - \cos 1$

b) $\frac{4\pi\sqrt{3}}{9}$

g) $\frac{\ln 3}{6} + \frac{\pi\sqrt{3}}{6}$

c) $\frac{\pi}{6}$

h) 0

d) $\pi^2 - 4$

i) 2

e) $\frac{\pi}{2} - 1$

j) $2 + \ln 5$

- 18** Calcula el valor de las siguientes integrales definidas.

a) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$

e) $\int_0^1 \frac{2x+5}{x^2-x-2} dx$

b) $\int_{-3}^1 |1-x^2| dx$

f) $\int_{1/e}^e |\ln x| dx$

c) $\int_1^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$

g) $\int_1^3 \frac{\sqrt{x+1}}{x} dx$

d) $\int_0^\pi \sen^3 x \cos^2 x dx$

h) $\int_0^2 \frac{x^2}{x+1} dx$

a) $\frac{\pi}{4}$

e) $-4 \ln 2$

b) 8

f) $2\left(1 - \frac{1}{e}\right)$

c) $4 - 2\sqrt{e}$

g) $4 - 2\sqrt{2} + \ln\left(\frac{3+2\sqrt{2}}{3}\right)$

d) $\frac{4}{15}$

h) $\ln 3$

- 19** Razona las afirmaciones siguientes:

a) El área de un trapecio mixtilíneo determinado por una función f continua en $[a, b]$ es el valor de la integral definida en dicho intervalo.

b) Si una función continua toma valores positivos y negativos en un intervalo $[a, b]$, el área que determina en dicho intervalo puede ser nula.

c) Para calcular el área que determina una función f definida negativa en $[a, b]$ hacemos $A = \int_b^a f$.

a) No es cierta.

b) No es cierta.

c) Es una afirmación cierta.

- 20** Sean las funciones $f(x) = \frac{x-|x|}{2}$ y $g(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

Calcula $\int_{-1}^0 x^2 (g \circ f)(x) dx$.

Sol: $-0,75$

- 21** El polinomio $p(x) = x^2 + ax + b$ se anula en $x = 2$

y cumple $\int_0^2 p(x) dx = 4$. Calcula razonadamente a y b .

Sol: $a = -\frac{14}{3}$ y $b = \frac{16}{3}$.

- 22** Se considera la función $f(x) = \frac{(2x-1)^2}{4x^2+1}$

a) Calcula su máximo y mínimo absolutos.

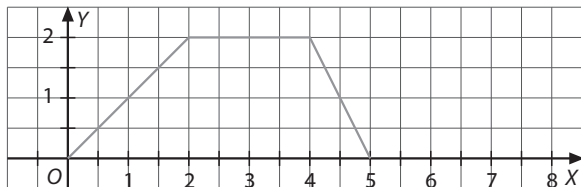
b) Calcula $\int_0^1 f(x) dx$.

a) En $x = -\frac{1}{2}$ la función alcanza su valor máximo

y en $x = \frac{1}{2}$ su valor mínimo.

b) $1 - \ln\sqrt{5}$

- 23 ■■■ Se considera la función $y = f(x)$ definida para $x \in [0, 5]$ que aparece representada en la figura siguiente:



- a) ¿Cuál es la expresión de su función derivada cuando existe?

b) Calcula $\int_0^3 f(x) dx$.

a)
$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in (0, 2) \\ 0 & \text{si } x \in (2, 4) \\ -2 & \text{si } x \in (4, 5) \end{cases}$$

b) $4 u^2$

Teorema fundamental del cálculo integral

- 24 ■■■ Halla el valor medio en el intervalo que se indica y señala para qué valor de dicho intervalo se alcanza.

a) $f(x) = \text{sen } x + 1$ en $[0, \pi]$

b) $f(x) = \ln x$ en $[e, e^2]$

a) El valor medio es: $f(c) = \frac{2 + \pi}{\pi}$ $c = 0,69$ rad

b) El valor medio es: $f(c) = \frac{e}{e-1}$ $c = 4,86$

- 25 ■■■ Halla el valor medio de la función $f(x) = xe^x$ en el intervalo $[0, 2]$ y calcula en qué punto del intervalo se alcanza.

Sol: $f(c) = \frac{e^2 + 1}{2} = 4,19$ $c = 1,22$

- 26 ■■■ Halla la derivada de las siguientes funciones.

a) $G(x) = \int_3^x \frac{dt}{t+5}$

c) $G(x) = \int_x^{x^2} e^{2t+1} dt$

b) $G(x) = \int_3^{x^2} \frac{dt}{t+5}$

d) $G(x) = \int_0^{2x} e^{t^2} dt$

a) $G'(x) = \frac{1}{x+5}$

c) $G'(x) = 2xe^{2x^2+1} - e^{2x+1}$

b) $G'(x) = \frac{2x}{x^2+5}$

d) $G'(x) = 2e^{4x^2}$

Áreas

- 27 ■■■ Dada la función $f(x) = x - 4 + \frac{16}{x+4}$, calcula el área limitada por la gráfica de la función, el eje X y las rectas verticales $x = 0$ y $x = 2$.

Sol: $0,487 u^2$

- 28 ■■■ Sabiendo que la gráfica de la función $f(x)$ pasa por el punto $(1, -4)$ y que su función derivada es $f'(x) = 2x - 2$:

a) Determina la expresión de $f(x)$.

b) Calcula el área de la región limitada por la gráfica de $f(x)$ y el eje de abscisas X .

a) $f(x) = x^2 - 2x - 3$

b) $\frac{32}{3} u^2$

- 29 ■■■ Se sabe que cierta función derivable $F(x)$ verifica las condiciones $F'(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$ y $F(1) = 3$.

a) Calcula $F(x)$.

b) Calcula el área delimitada por $F(x)$ y el eje X desde $x = 0$ hasta $x = 1$.

a) $F(x) = \frac{4}{3} \sqrt[4]{x^3} + \frac{5}{3}$

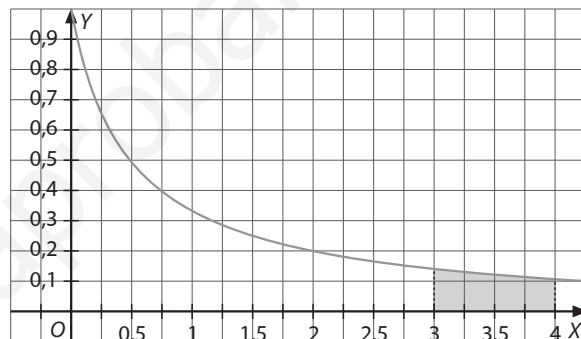
b) $\frac{17}{7}$

- 30 ■■■ Calcula el área de la región limitada por la gráfica de la función $f(x) = xe^x$ en $x > 0$, el eje de abscisas y la recta vertical $x = 1$.

La función es positiva en $x > 0$ de modo que el área de la región dada en el enunciado es:

Sol: $1 u^2$

- 31 ■■■ La gráfica de $f(x) = \frac{1}{2x+1}$ para $x > 0$, es:



a) Halla una primitiva de f .

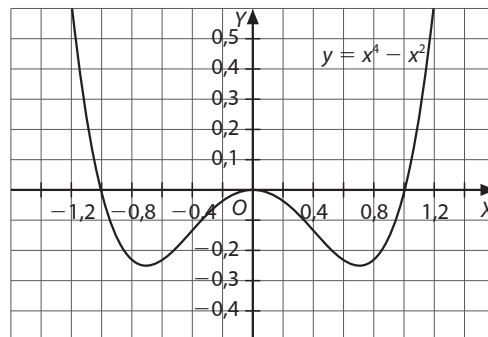
b) Calcula el área de la región sombreada.

a) $F(x) = \frac{\ln(2x+1)}{2}$

b) $\ln \frac{3\sqrt{7}}{7} u^2$

- 32 ■■■ Buscando sus extremos relativos y sus puntos de corte con los ejes, realiza una representación aproximada de la curva de ecuación $y = x^4 - x^2$. A continuación, calcula el área encerrada por esta curva y el eje de abscisas.

Sol:



$A = \frac{4}{15} u^2$

33 Dada la función $f(x) = xe^{2x}$, se pide:

a) Dibuja su gráfica indicando su dominio, asíntotas, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos, intervalos de concavidad y convexidad y puntos de inflexión.

b) Calcula el área comprendida entre el eje X y la gráfica de $f(x)$ entre $-1 \leq x \leq 1$.

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$, no tiene asíntotas verticales.

$y = 0$ asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$.

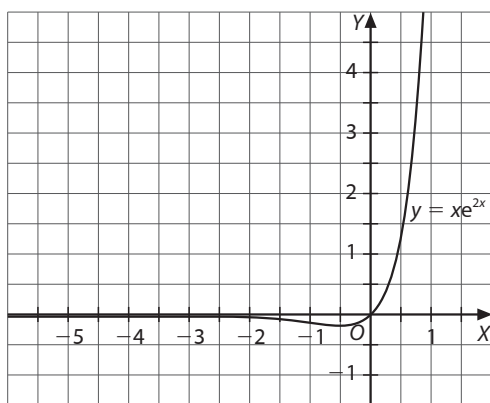
no hay asíntota horizontal cuando $x \rightarrow +\infty$.

En $x = -1/2$ hay un mínimo

f es creciente en $(-\frac{1}{2}, +\infty)$ y f es decreciente en $(-\infty, -\frac{1}{2})$.

En $x = -1$ hay un punto de inflexión.

f es cóncava en $(-1, +\infty)$ y f es convexa en $(-\infty, -1)$.



b) $2,25 u^2$

34 Dada la función $f(x) = \frac{x^2 - 12}{x^2 + 4}$ calcula el área de la región acotada encerrada por su gráfica y el eje X .

Sol: $9,827 u^2$

35 Sea la función $y = 2e^{-2|x|}$:

a) Estudia su monotonía, extremos relativos y asíntotas.

b) Calcula el área de la región plana comprendida entre la gráfica de la función y las rectas $x = 1$ y $x = -1$.

a) si $x < 0$, y es creciente.

si $x > 0$, y es decreciente.

$y = 0$ es una asíntota horizontal.

El máximo se encuentra en $x = 0$: $M(0, 2)$

b) $2\left(1 - \frac{1}{e^2}\right)u^2$

36 Calcula el área del recinto que está limitado por las curvas $y = x^2 + 2x - 1$ e $y = -x^2 + 3$.

Sol: $9 u^2$

37 Calcula el área comprendida entre las gráficas de $f(x) = |x^2 - 1|$ y $g(x) = x + 5$ en el primer cuadrante.

Sol: $12,17 u^2$

38 Determina el área encerrada por las curvas $y = x^3$ e $y = \sqrt[3]{x}$ en el primer cuadrante.

Sol: $\frac{1}{2} u^2$

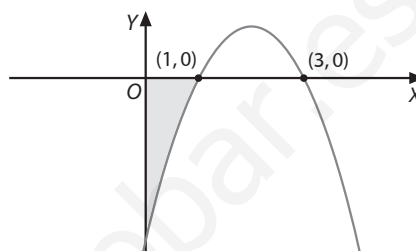
39 Calcula el área del recinto de \mathbb{R}^2 limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = x^3 - 2x$ y $g(x) = x^2$ cuando se consideran valores de $x \leq 0$.

Sol: $\frac{5}{12} u^2$

40 Calcula el área del recinto que está limitado por las curvas $y = \frac{1}{\sqrt{x+4}}$, $y = 1$ y $x = 0$.

Sol: $1 u^2$

41 En la figura aparece una curva que representa una función polinómica de grado dos. Los puntos de intersección de la curva con el eje X son el $(1, 0)$ y el $(3, 0)$. Además, el área limitada por la curva y los dos ejes de coordenadas vale $4/3 u^2$. Halla la expresión de la función polinómica.



Sol: $f(x) = -x^2 + 4x - 3$

42 Calcula el área de la región limitada por las curvas $y = \frac{x^2}{2}$ e $y = \frac{1}{x^2 + 1}$.

Sol: $1,24 u^2$

43 Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = x$, $g(x) = \sqrt{x+2}$ y el eje de abscisas.

Sol: $\frac{10}{3} u^2$

44 Calcula el área del recinto de \mathbb{R}^2 limitado por las gráficas de $f(x) = xe^{-3x}$ y $g(x) = (x^2 - x)e^{-3x}$.

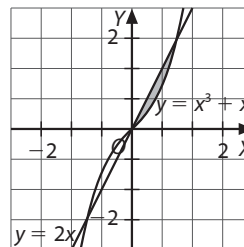
Sol: $0,15 u^2$

45 Calcula el área del recinto de \mathbb{R}^2 limitado por el trozo de elipse $x^2 + 9y^2 = 9$, con $x \geq \frac{3}{2}$.

Sol: $1,84 u^2$

46 Representa gráficamente el recinto plano limitado, en la región donde la abscisa x es positiva, por la curva $y = x^3 + x$ y por la recta $y = 2x$. Calcula su área.

Sol:



$A = 0,25 u^2$

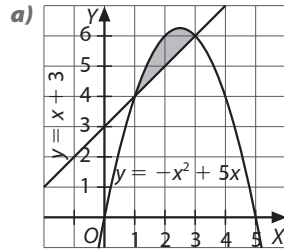
47 Dadas las funciones:

■ $f(x) = -x^2 + 5x$

■ $g(x) = x + 3$

a) Dibuja el recinto plano limitado por las funciones.

b) Halla su área.



b) $\frac{4}{3} u^2$

48 Halla la ecuación de la recta tangente a la curva de ecuación $y = x^3 - 3x$ en el punto de abscisa $x = -1$. Calcula el área del recinto limitado por la tangente y la curva dada.

Sol: La recta tangente es $y = 2$.

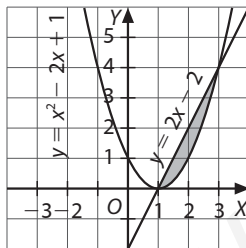
$A = 6,75 u^2$

49 Calcula el área encerrada entre la gráfica de la función exponencial $f(x) = e^x$ y el segmento que une los puntos de abscisas $x = 1$ y $x = -1$.

Sol: $\frac{2}{e} u^2$

50 La curva $y = x^2 - 2x + 1$ y la recta que pasa por los puntos $A(1, 0)$ y $B(3, 4)$ limitan un recinto finito del plano. Traz un esquema gráfico de dicho recinto y calcula su área.

Sol: $\frac{4}{3} u^2$



51 Demuestra que la función $f(x) = \frac{4}{x^2 + x - 2}$ es estrictamente positiva en $(2, +\infty)$ y halla el área de la región determinada por la gráfica de f , el eje de abscisas y las rectas $x = 2$ y $x = 3$.

Sol: $0,627 u^2$

52 a) Estudia y representa gráficamente la función

$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$.

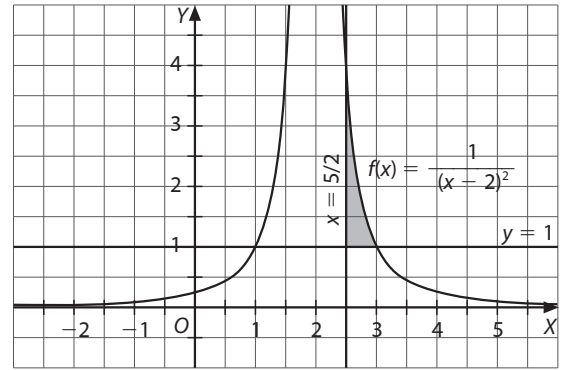
b) Halla el área de la región acotada comprendida entre la gráfica de la función anterior y las rectas $y = 1$, $x = \frac{5}{2}$.

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{2\}$

Asíntota vertical: $x = 2$

Asíntota horizontal: $y = 0$

En $(-\infty, 2)$ la función es creciente, en $(2, +\infty)$ la función es decreciente. No hay extremos.



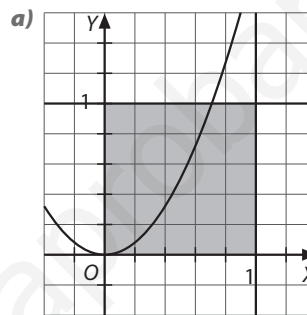
b) Cuando $y = 1$, la curva y la recta se cortan en $x = 3$

$A = 0,5 u^2$

53 La curva $y = 2x^2$ divide al cuadrado de vértices $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(1, 1)$ y $D(0, 1)$ en dos recintos.

a) Dibuja dichos recintos.

b) Halla el área de cada uno.

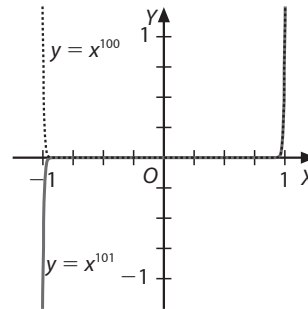


b) $A_1 = \frac{\sqrt{2}}{3} u^2$

$A_2 = \frac{3 - \sqrt{2}}{3} u^2$

54 Haz un dibujo del recinto limitado por las curvas $y = x^{100}$ y $y = x^{101}$. Calcula el área de este recinto.

Sol:



$A = \frac{1}{10302} u^2$

55 Calcula el área que, en el primer cuadrante, delimitan las curvas $y = x^2$, $y = 4x^2$ e $y = 16$.

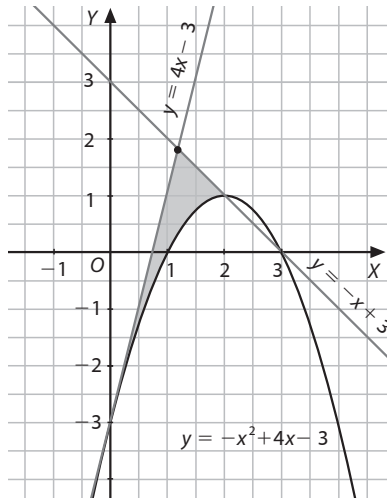
Sol: $\frac{64}{3} u^2$

56 Calcula el área de la región limitada por la curva $y = \ln x$ y las rectas $y = 0$, $y = \ln 3$ y $x = 0$.

Sol: $2 u^2$

- 57 Dibuja el recinto limitado por $y = -x^2 + 4x - 3$, su recta tangente en el punto $P(0, -3)$ y la recta $y = -x + 3$. Calcula su área.

Sol:

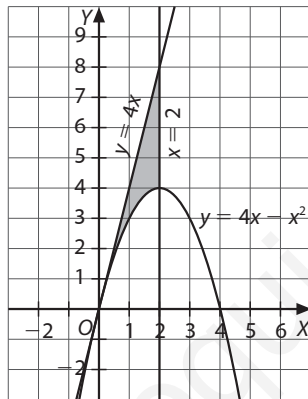


$$A = \frac{16}{15} u^2$$

- 58 Calcula el área de la región plana limitada por la parábola $y = 4x - x^2$, su recta tangente en el origen de coordenadas y la recta $x = 2$. Dibuja también esta región.

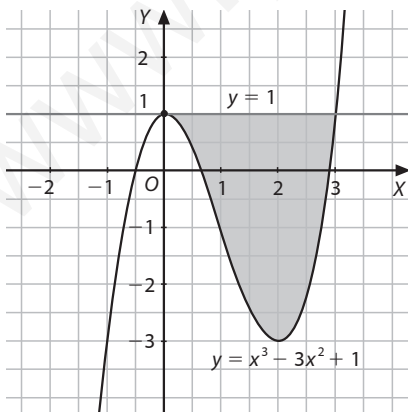
Sol:

$$A = \frac{8}{3} u^2$$



- 59 Halla el área limitada por $y = x^3 - 3x^2 + 1$ y la recta tangente a la misma en el punto en que alcanza su máximo relativo. Dibuja el recinto.

Sol:



$$A = \frac{27}{4} u^2$$

- 60 Calcula el área del recinto plano limitado por la curva $xy = 1$ y la recta perpendicular a la recta $y = 2x + 1$ que pase por el punto de coordenadas $(1, 1)$.

Sol: $\left(\frac{3}{4} - \ln 2\right) u^2$

- 61 Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = \frac{|x|}{|x| + 1}$ y las rectas $y = 0$, $x = 1$ y $x = -1$.

Sol: $2(1 - \ln 2) u^2$

- 62 Calcula el área del recinto delimitado por las gráficas de las funciones $f(x) = \sin x$ y $g(x) = \cos x$, el eje de abscisas y las rectas de ecuaciones $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{3}$.

Sol: $0,45 u^2$

- 63 Calcula el área del recinto finito limitado por una gráfica de la función $f(x) = x^4$, su recta tangente en el punto $(1, 1)$ y el eje Y.

Sol: $\frac{6}{5} u^2$

- 64 Calcula el valor de a para que el área delimitada por la curva $y = a \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ y las rectas $y = 0$ y $x = \pi$, sea igual a 4.

Sol: $a = 2$ o $a = -2$

- 65 Encuentra la recta vertical $x = k$ que divide en dos partes iguales el área del recinto que está limitado por las curvas $y = x^2$, $x = 2$ e $y = 0$.

Sol: $x = \sqrt[3]{4}$

- 66 Calcula el valor de a para que el área delimitada por la recta $y = a$ y la parábola $y = -x^2 + 1$ sea

$$A = \frac{8\sqrt{2}}{3} u^2.$$

Sol: $a = -1$

- 67 Dada la curva $y = x^2 + a$:

a) Calcula el valor de a para que las rectas tangentes a la curva en los puntos de abscisa de valor absoluto 1, pasen por el origen de coordenadas.

b) Para $a = 1$, halla el área de la región del plano delimitada por la curva y las tangentes a la curva en los puntos $(1, 2)$ y $(-1, 2)$.

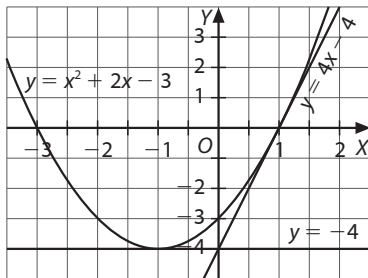
a) $a = 1$

b) $\frac{2}{3} u^2$

- 68 Calcula el valor positivo de a tal que el área comprendida entre $y = ax + 2a$ y $y = ax^2$ sea 18.

Sol: $a = 4$

- 69 ■■■ Considera la parábola $y = x^2 + 2x - 3$.
- Calcula las ecuaciones de las rectas tangentes a la parábola en los puntos $x = -1$ y $x = 1$.
 - Calculando el mínimo de la función $y = x^2 + 2x - 3$, halla el vértice de la parábola.
 - Halla los puntos de intersección de la parábola con los ejes y realiza una representación gráfica de la parábola y de las tangentes obtenidas en el apartado a).
 - Calcula el área comprendida entre la parábola y las rectas tangentes.
- a) En $x = -1$, $y = -4$.
En $x = 1$, $y = 4x - 4$.
- b) $(-1, -4)$.
- c) $(-3, 0)$, $(1, 0)$, $(0, -3)$.



d) $\frac{2}{5}u^2$

Volúmenes

- 70 ■■■ Calcula el volumen del cuerpo de revolución que genera el recinto limitado por la curva $y = x(x - 1)$ y el eje de abscisas, al girar alrededor de dicho eje.
- Sol: $\frac{\pi}{30} u^3$
- 71 ■■■ Calcula el volumen del casquete parabólico generado por la parábola $y = 3x^2$, entre $x = 0$ y $x = 2$, al girar alrededor del eje X .
- Sol: $\frac{288\pi}{5} u^3$
- 72 ■■■ El eje X y la gráfica de una cierta función f limitan un recinto plano. Este recinto gira alrededor del eje X y genera un volumen. Hállalo sabiendo que f se define como $x + 2$ en el intervalo $[2, 4]$, vale 2 en $[4, 6]$ y es nula en el resto de la recta real.
- Sol: $184,31 u^3$
- 73 ■■■ Calcula el volumen del cuerpo de revolución obtenido al girar la elipse $x^2 + 2y^2 = 1$ alrededor del eje X .
- Sol: $\frac{2\pi}{3} u^3$
- 74 ■■■ Calcula el volumen de la figura de revolución que obtenemos si hacemos girar alrededor del eje de abscisas la gráfica de la función $f(x) = \ln x$ entre $x = 1$ y $x = e$.
- Sol: $\pi(e - 2) u^3$
- 75 ■■■ Calcula el volumen que engendra la figura del plano delimitada por la hipérbola $xy = 1$ y la circunferencia centrada en el origen de radio $\frac{\sqrt{17}}{2}$ en el primer cuadrante.
- Sol: $9/4\pi u^3$

- 76 ■■■ En un depósito esférico de 1 m de radio tenemos una cierta cantidad de agua. Calcula cuántos litros hay si sabemos la distancia entre el punto más bajo del depósito y el nivel de agua es de medio metro. (Ten en cuenta que un casquete esférico es una figura de revolución).

Sol: 654,5 litros

- 77 ■■■ Considera la figura plana encerrada entre las curvas $y = \sqrt[3]{x^2}$ e $y = x^2$, cuando $0 \leq x \leq 1$. Halla el volumen que genera cuando da una vuelta completa alrededor del eje X .

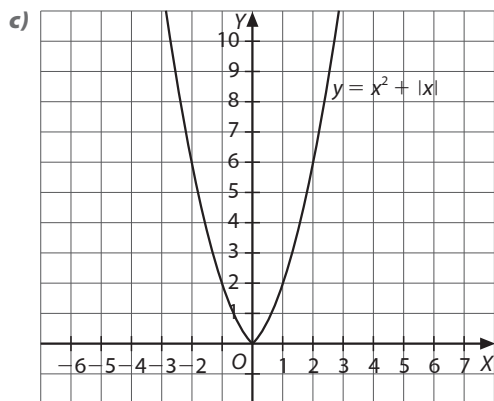
Sol: $\frac{8}{35}\pi u^3$

- 78 ■■■ Encuentra el valor de $k > 0$, tal que el volumen del cuerpo de revolución generado por la curva $y = kx^2$, $0 \leq x \leq 1$, al girar en torno al eje X sea igual a 1.

Sol: $k = \frac{\sqrt{5\pi}}{\pi}$

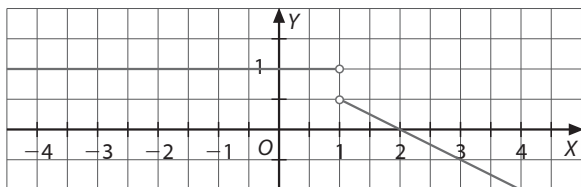
Ejercicios de aplicación

- 79 ■■■ Considera la función $f(x) = x^2 + |x|$.
- Calcula los puntos en que la gráfica corta a los ejes.
 - Calcula los extremos relativos (máximos y mínimos), así como los intervalos de crecimiento y decrecimiento f .
 - Dibuja la gráfica de f .
 - Calcula $\int_{-1}^2 f(x) dx$.
- a) $(0, 0)$.
- b) $f(x)$ decrecen en $x < 0$
 $f(x)$ crecen en $x > 0$
Mínimo absoluto: $m(0, 0)$



- d) $\frac{11}{2}$
- 80 ■■■ Dadas $f(x) = x^2 - ax - 4$ y $g(x) = \frac{x^2}{2} + b$.
- Calcula a y b de manera que las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ sean tangentes en el punto de abscisa $x = 3$, es decir, que tengan la misma tangente en este punto.
 - Halla la ecuación de la recta tangente del apartado a).
 - Para el valor de a obtenido en el primer apartado, calcula el valor del área de la región limitada por el eje de abscisas y la función $f(x)$.
- a) $a = 3$, $b = -\frac{17}{2}$
- b) $y = 3x - 13$
- c) $\frac{125}{6}u^2$

- 31 ■■■ La función derivada $f'(x)$ de una cierta función continua $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función a trozos formada por las semi-rectas del dibujo.



- a) Determina si es derivable en todos los puntos de \mathbb{R} y por qué.
 b) Estudia el crecimiento y decrecimiento de $f(x)$.
 c) Averigua si $f(x)$ tiene algún extremo relativo y, si es así, para qué valor de x y de qué tipo.
 d) Sabiendo que $f(0) = 1$, calcula $f(1)$.
- a) La función es derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$.
 b) La función crece $x \in (-\infty, 2)$ y decrece $x \in (2, +\infty)$.
 c) Para $x = 2$ tenemos un máximo relativo.
 d) $f(1) = 2$

- 32 ■■■ Sea la función $f(x) = \sin x$.

- a) Calcula $a > 0$, tal que el área encerrada por la gráfica de $f(x)$, el eje X y la recta $x = a$, sea $1/2$.
 b) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = \pi/4$.
 c) Calcula el área de la superficie encerrada por la tangente anterior, la gráfica de la función $f(x)$ y las rectas $x = \pi/4$ y $x = 3\pi/4$.

a) $a = \frac{\pi}{3}$

b) $y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$

c) $0,57 \text{ u}^2$

- 33 ■■■ Halla el área de la elipse $\frac{x^2 + y^2}{4} = 1$ y el volumen del sólido engendrado al girar dicha elipse sobre el eje X .

Sol: $A = 4\pi \text{ u}^2$ $V = \frac{32\pi}{3} \text{ u}^3$

- 34 ■■■ Los beneficios de una empresa, en miles de euros por año, se ajustan a la siguiente función:

$$B(x) = \frac{5x}{x^2 + 4}$$

¿A cuánto ascienden los beneficios acumulados en los cinco primeros años de vida de la empresa?

Sol: 4 952,50 €.

- 35 ■■■ Un proyectil se lanza desde un avión con velocidad, en m/s, de ecuación $v(t) = 10 + 32t$. Si a los 10 s todavía no ha llegado al suelo, ¿qué se puede afirmar sobre la altura a la que va el avión?

Sol: La altura a la que va el avión es superior a los 1 700 m.

Actividades tipo test

Escoge y razona la respuesta correcta en cada caso.

- 36 ■■■ Halla todos los valores reales z tales que

$$\int_0^z \frac{-16}{x^2 - 2x - 15} dx = \ln 25$$

- a) $z = 9, z = 3$
 b) No tiene solución.
 c) $z = \pm 3, z = 9$

Sol: La respuesta correcta es la **a)**

- 37 ■■■ Calcula el área comprendida entre las gráficas de las curvas $y = e^{2x}$ e $y = e^{-2x}$, y la recta $y = 5$.

- a) $\ln 5 \text{ u}^2$
 b) $(5 \ln 5 - 4) \text{ u}^2$
 c) 0 u^2

Sol: La respuesta correcta es la **b)**.

- 38 ■■■ En un plano el trazado de una carretera discurre según la ecuación $y = \frac{x^2}{4} - x$, siendo un río el eje X . En el terreno entre el río y la carretera hay un pinar. Si expresamos las distancias en kilómetros, ¿cuánto vale el pinar si la hectárea se paga a 60 euros?

- a) 15 600 €
 b) 16 000 €
 c) 23 300 €

Sol: La respuesta correcta es la **b)**.

1. Dada la función $f(x) = x^2 - 1$, en el intervalo $[-3, 2]$ y la partición P del mismo formada por los puntos $P = \{-3, -2, -1, 1, 2\}$, halla la suma superior y la suma inferior correspondientes a dicha partición y dicho intervalo.

Sol: Suma superior: 14

Suma inferior: 1

2. Halla el valor medio de la función $f(x) = (x + 1)\sqrt{x}$ en el intervalo $[0, 2]$.

Sol: 2,07

3. Encuentra el punto en el que se alcanza el valor medio de la función $f(x) = x^2 + x + 1$ en el intervalo $[-2, 1]$.

$$\text{Sol: } x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

4. Determina la derivada de la función $G(x) = \int_4^{x+3} \frac{1}{t-3}$ en $x = 2$.

$$\text{Sol: } G'(2) = \frac{1}{2}$$

5. Calcula el área limitada por la curva $y = \sqrt[3]{x}$ en el intervalo $[-1, 1]$.

$$\text{Sol: } \frac{3}{2} u^2$$

6. Calcula el área de la región del plano delimitada por la gráfica de la función $f(x) = |x^2 - 2x - 3|$ y el eje de abscisas.

$$\text{Sol: } \frac{32}{3} u^2$$

7. Halla el área de la región del plano delimitada por la curva $y = x^3 - x^2 - 2x$ y las rectas $y = x + 1$ y $x = 3$.

$$\text{Sol: } 9,751611... u^2$$

8. ¿Cuál es el área del recinto plano limitado por la curva $y = x^2 \sin x$ en el intervalo $[0, \pi]$?

$$\text{Sol: } 5,869... u^2$$

9. Halla el área delimitada por los ejes de coordenadas, la curva $y = \sqrt{x-2}$ y la tangente a dicha curva en el punto de abscisa 6.

$$\text{Sol: } \frac{13}{6} u^2$$

10. Determina una constante positiva, a , sabiendo que la figura plana delimitada por la parábola $y = 3ax^2 + 2x$, la recta $y = 0$ y la recta $x = a$, tiene área $A = (a^2 - 1)^2$.

$$\text{Sol: } a = \sqrt{3}/3$$

11. Calcula el volumen del cuerpo que se obtiene al hacer girar la curva de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2+x^2}}$, en torno al eje X , entre $x = 0$ y $x = \sqrt{2}$.

$$\text{Sol: } \frac{\pi^2 \sqrt{2}}{8} u^2$$

12. La evolución de la demanda de un producto, en miles de artículos, en los cinco años transcurridos desde su aparición en el mercado, viene dada por la expresión $d(t) = 16e^{-0,1t}$, donde t expresa el tiempo, contado por semestres. Encuentra:

a) El número de artículos demandados durante los tres primeros años.

b) La demanda media de artículos durante los dos últimos años.

a) Unos 72 190 artículos.

b) Una media anual de 28 949 artículos.