

10



INTEGRALES INDEFINIDAS

ACTIVIDADES

- 1** Comprueba que las integrales de las funciones que se ofrecen en la tabla son correctas derivando los resultados para obtener la función que se integra.

INTEGRALES INMEDIATAS

$\int k \, dx = kx + C$
$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \text{ si } n \neq -1$
$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln x + C$
$\int e^x \, dx = e^x + C$
$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \text{ si } a > 0 \text{ y } a \neq 1$
$\int \text{sen } x \, dx = -\text{cos } x + C$
$\int \text{cos } x \, dx = \text{sen } x + C$
$\int \frac{dx}{\text{cos}^2 x} = (1 + \text{tg}^2 x) dx = \text{tg } x + C$
$\int \frac{dx}{\text{sen}^2 x} = (1 + \text{cotg}^2 x) dx = -\text{cotg } x + C$
$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \text{arc tg } x + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \text{arc sen } x + C$
$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \text{arc cos } x + C$

- 2** Calcula las siguientes integrales, descomponiéndolas si es necesario.

a) $\int x^{10} \, dx$ **e)** $\int \sqrt{2x^3} \, dx$
b) $\int \frac{1}{x^2} \, dx$ **f)** $\int 4\sqrt{3x} \, dx$
c) $\int \frac{1}{\sqrt{x^3}} \, dx$ **g)** $\int \frac{5}{\sqrt{5x^3}} \, dx$
d) $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}+3}} \, dx$ **h)** $\int \left(2x - \frac{3}{x^4}\right) \, dx$

i) $\int (3x^3 - 2x^2 + 4x - 7) \, dx$ **m)** $\int \frac{4^x + 6^x}{2^{x-1}} \, dx$
j) $\int \left(3x + 4x\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \, dx$ **n)** $\int \frac{x^2 + 2}{(x+1)^2 - 2x} \, dx$
k) $\int (e^x + 3^x - \text{sen } x + 4) \, dx$ **ñ)** $\int \text{cotg}^2 x \, dx$
l) $\int \frac{x^3 - 2\sqrt[3]{x} + 2x\sqrt{x} - 1}{5x} \, dx$ **o)** $\int \sqrt{x\sqrt{x^2\sqrt{x^3}}} \, dx$
a) $\frac{x^{11}}{11} + C$
b) $-\frac{1}{x} + C$
c) $\frac{-2}{\sqrt{x}} + C$
d) $\frac{-2}{x\sqrt{x}} + C$
e) $\frac{2x^2\sqrt{2x}}{5} + C$
f) $\frac{8x\sqrt{3x}}{3} + C$
g) $\frac{-10}{\sqrt{5x}} + C$
h) $x^2 + \frac{1}{x^3} + C$
i) $\frac{3x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + 2x^2 - 7x + C$
j) $\frac{3x^2}{2} + \frac{8}{5}x^2\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + C$
k) $e^x + \frac{3^x}{\ln 3} + \text{cos } x + 4x + C$
l) $\frac{x^3}{15} - \frac{6\sqrt[3]{x}}{5} + \frac{4x\sqrt{x}}{15} - \frac{\ln|x|}{5} + C$
m) $2 \left(\frac{2^x}{\ln 2} + \frac{3^x}{\ln 3} \right) + C$
n) $x + \text{arc tg } x + C$
ñ) $-\text{cotg } x - x + C$
o) $\frac{8}{19} \cdot x^2 \sqrt{x^3} + C$

3 ■■■ Calcula las siguientes integrales.

a) $\int x(3x^2 - 5)^5 dx$ g) $\int \frac{\cos x}{1 + \sin x} dx$
 b) $\int e^{2x+1} dx$ h) $\int \sin(3x) \cos(3x) dx$
 c) $\int \frac{3x+1}{x^2+4} dx$ i) $\int \frac{2x}{\cos^2 5x^2} dx$
 d) $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}+3}} dx$ j) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$
 e) $\int \frac{3x^2-4x+1}{2x^3-4x^2+2x+5} dx$ k) $\int \frac{x}{\sqrt{5-x^2}} dx$
 f) $\int \frac{\ln x}{x} dx$ l) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})}$

a) $\frac{(3x^2-5)^6}{36} + C$
 b) $\frac{e^{2x+1}}{2} + C$
 c) $\frac{3}{2} \ln(x^2+4) + \frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{2}\right) + C$
 d) $\sqrt{e^{2x}+3} + C$
 e) $\frac{1}{2} \ln|2x^3-4x^2+2x+5| + C$
 f) $\frac{(\ln|x|)^2}{2} + C$
 g) $\ln|1+\sin x| + C$
 h) $\frac{\operatorname{sen}^2 3x}{6} + C$
 i) $\frac{1}{5} \operatorname{tg} 5x^2 + C$
 j) $\operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x}{3}\right) + C$
 k) $-\sqrt{5-x^2} + C$
 l) $-2 \ln|1-\sqrt{x}| + C$

4 ■■■ Resuelve estas integrales ensayando, si es preciso, un cambio de variable.

a) $\int \frac{5x}{\sqrt{1-2x^2}} dx$ d) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} \cos^2(1+\sqrt{x})}$
 b) $\int \frac{dx}{1+3x^2}$ e) $\int \frac{dx}{\cos^2 x \operatorname{tg} x}$
 c) $\int \frac{3x}{\sqrt{1-9x^4}} dx$ f) $\int \frac{\ln x^2}{x} dx$
 a) $-\frac{5}{2} \sqrt{1-2x^2} + C$ d) $2 \operatorname{tg}(1+\sqrt{x}) + C$
 b) $\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg}(\sqrt{3}x) + C$ e) $\ln|\operatorname{tg} x| + C$
 c) $\frac{1}{2} \operatorname{arc\,sen} 3x^2 + C$ f) $\frac{1}{4} \ln^2 x^2 + C$

5 ■■■ Resuelve estas integrales, realizando el cambio de variable indicado.

a) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2+1}} dx$ $t^2 = x^2 + 1$
 b) $\int x^3(x^2+1)^6 dx$ $t = x^2 + 1$
 c) $\int \frac{x}{1+\sqrt{x}} dx$ $t = \sqrt{x}$
 d) $\int x\sqrt{1+x} dx$ $t^2 = 1+x$
 e) $\int \frac{2^x - 3 \cdot 4^x}{2+4^x} dx$ $t = 2^x$
 f) $\int \frac{\ln x}{x \ln(2x)} dx$ $t = \ln x$
 g) $\int \frac{2e^x}{e^x + 2e^{-x}} dx$ $t = e^x$
 h) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$ $t = \sqrt{x}$
 a) $\frac{(\sqrt{x^2+1})^3}{3} - \sqrt{x^2+1} + C$
 b) $\frac{1}{2} \left[\frac{(x^2+1)^8}{8} - \frac{(x^2+1)^7}{7} \right] + C$
 c) $\frac{2x \cdot \sqrt{x}}{3} - x + 2\sqrt{x} - 2 \ln|1+\sqrt{x}| + C$
 d) $\frac{2}{5}(\sqrt{1+x})^5 - \frac{2}{3}(\sqrt{1+x})^3 + C$
 e) $\frac{1}{\sqrt{2} \ln 2} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2^x}{\sqrt{2}}\right) - \frac{3}{2 \ln 2} \ln(2+4^x) + C$
 f) $\ln|x| - \ln 2 \ln|\ln|2x|| + C$
 g) $\ln(e^{2x}+2) + C$
 h) $2 \ln(\sqrt{x}+1) + C$

6 ■■■ Resuelve las siguientes integrales.

a) $\int x \ln x dx$ f) $\int \sqrt{x} \ln x dx$
 b) $\int x^2 \operatorname{sen} x dx$ g) $\int (x^2-2x+3)e^{-2x} dx$
 c) $\int \operatorname{arc\,tg} x dx$ h) $\int \cos(3x) e^{2x} dx$
 d) $\int x^2 e^{2x} dx$ i) $\int x^3 e^{x^2} dx$
 e) $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$
 a) $\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$ f) $\frac{2}{3} x \sqrt{x} \left(\ln x - \frac{2}{3} \right) + C$
 b) $-x^2 \cos x + 2x \operatorname{sen} x + 2 \cos x + C$
 c) $x \operatorname{arc\,tg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$ g) $\frac{-2x^2+2x-5}{4} e^{-2x} + C$
 d) $e^{2x} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{2} + \frac{1}{4} \right) + C$ h) $\frac{3}{13} e^{2x} \left(\operatorname{sen}(3x) + \frac{2}{3} \cos(3x) \right) + C$
 e) $-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C$ i) $\frac{e^{x^2}}{2} (x^2-1) + C$

7 ■■■ Resuelve las siguientes integrales.

- a) $\int \frac{3x^2 + x - 2}{x + 1} dx$ f) $\int \frac{dx}{x^4 + x^3 - x^2 - x}$
 b) $\int \frac{2x^2 + 5}{x - 1} dx$ g) $\int \frac{3x - 3}{x^3 + 2x^2 - 5x - 6} dx$
 c) $\int \frac{x - 2}{x^2 + 5} dx$ h) $\int \frac{2x^2 + 3}{x^3 + 8} dx$
 d) $\int \frac{5x - 3}{x^2 - 2x - 3} dx$ i) $\int \frac{e^{3x}}{2 + e^x} dx$
 e) $\int \frac{3x + 1}{x^2 + x + 1} dx$
 a) $\frac{3x^2}{2} - 2x + C$
 b) $x^2 + 2x + 7 \ln|x - 1| + C$
 c) $\frac{1}{2} \ln(x^2 + 5) - \frac{2}{\sqrt{5}} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + C$
 d) $2 \ln|x + 1| + 3 \ln|x - 3| + C$
 e) $\frac{3}{2} \ln(x^2 + x + 1) - \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{2x + 1}{\sqrt{3}}\right) + C$
 f) $-\ln|x| + \frac{1}{4} \ln|x - 1| + \frac{3}{4} \ln|x + 1| - \frac{1}{2} \frac{1}{x + 1} + C$
 g) $\ln|x + 1| + \frac{1}{5} \ln|x - 2| - \frac{6}{5} \ln|x + 3| + C$
 h) $\frac{11}{12} \ln|x + 2| + \frac{13}{24} \ln|x^2 - 2x + 4| + \frac{\sqrt{3}}{4} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x - 1}{\sqrt{3}}\right) + C$
 i) $\frac{e^{2x}}{2} - 2e^x + 4 \ln(2 + e^x) + C$

Ejercicios y problemas

Cálculo de integrales

8 ■■■ Calcula las siguientes integrales.

- a) $\int \left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt[3]{x}} dx$ f) $\int \frac{5^{2x+2}}{5 + 5^{2x}} dx$
 b) $\int \frac{\operatorname{sen} x}{3 + \cos x} dx$ g) $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x \cdot \operatorname{cotg} x}$
 c) $\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx$ h) $\int \frac{3^{x-1}}{1 + 3^{2x}} dx$
 d) $\int \frac{3}{x \ln(2x)} dx$ i) $\int \frac{2}{3x^2 + 6} dx$
 e) $\int \operatorname{sen}^2(3x) \cos(3x) dx$ j) $\int (\operatorname{tg}^2 x - 2) dx$
 a) $\frac{3}{7} x^2 \sqrt[3]{x} + \frac{6}{5} \sqrt[6]{x^5} + C$ f) $\frac{25}{2 \ln 5} \ln(5 + 5^{2x}) + C$
 b) $-\ln|3 + \cos x| + C$ g) $-\ln|\operatorname{cotg} x| + C$
 c) $\frac{(\ln x)^3}{3} + C$ h) $\frac{1}{3 \ln 3} \operatorname{arc\,tg} 3^x + C$
 d) $3 \ln|\ln|2x|| + C$ i) $\frac{\sqrt{2}}{3} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C$
 e) $\frac{\operatorname{sen}^3(3x)}{9} + C$ j) $\operatorname{tg} x - 3x + C$

9 ■■■ Calcula las siguientes integrales.

- a) $\int \frac{\sqrt{7 + 2\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx$ f) $\int \frac{x}{x^4 + 9} dx$
 b) $\int \frac{1 + \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x \cos x} dx$ g) $\int \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\cos^3 x} dx$
 c) $\int \operatorname{tg}(2x + 1) dx$ h) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{x \cos^2 \sqrt[3]{x}} dx$
 d) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$ i) $\int \frac{2e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}} dx$
 e) $\int x\sqrt{x^2 + 1} dx$ j) $\int \frac{dx}{4x^2 + 4x + 1}$
 a) $\frac{\sqrt{(7 + 2\operatorname{tg} x)^3}}{3} + C$ f) $\frac{1}{6} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x^2}{3}\right) + C$
 b) $-2 \ln|\cos x| + \ln|\operatorname{sen} x| + C$ g) $\frac{\operatorname{tg}^2 x}{2} + \operatorname{tg} x + C$
 c) $-\frac{1}{2} \ln|\cos(2x + 1)| + C$ h) $3 \operatorname{tg} \sqrt[3]{x} + C$
 d) $\sqrt{x^2 + 1} + C$ i) $2 \operatorname{arc\,sen} e^x + C$
 e) $\frac{1}{3} \sqrt{(x^2 + 1)^3} + C$ j) $\frac{-1}{4x + 2} + C$

10 ■■■ Calcula las siguientes integrales.

- a) $\int \frac{\ln(2x^2)}{x} dx$ c) $\int \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{1 + 2\operatorname{tg} x}} dx$
 b) $\int \frac{5x + 2}{1 + 2x^2} dx$ d) $\int \frac{e^{\sqrt{2x}}}{\sqrt{x}} dx$
 a) $\frac{1}{4} \ln^2(2x^2) + C$ c) $\sqrt{1 + 2\operatorname{tg} x} + C$
 b) $\frac{5}{4} \ln(1 + 2x^2) + \sqrt{2} \operatorname{arc\,tg}(\sqrt{2}x) + C$ d) $\sqrt{2} e^{\sqrt{2x}} + C$

11 ■■■ Halla estas integrales.

- a) $\int \operatorname{sen}^3 x dx$ d) $\int \frac{2e^{-x}}{2 + e^{-x}} dx$
 b) $\int \frac{2x^3}{1 + x^8} dx$ e) $\int \frac{\sqrt{\operatorname{arc\,sen} x}}{\sqrt{1 - x^2}} dx$
 c) $\int \frac{2^x}{1 + 4^x} dx$ f) $\int 2^{\operatorname{sen}^2 x} \cdot \operatorname{sen} 2x dx$
 a) $-\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C$
 b) $\frac{1}{2} \operatorname{arc\,tg} x^4 + C$
 c) $\frac{1}{\ln 2} \cdot \operatorname{arc\,tg} 2^x + C$
 d) $-2 \ln|2 + e^{-x}| + C$
 e) $\frac{2}{3} \sqrt{(\operatorname{arc\,sen} x)^3} + C$
 f) $\frac{2^{\operatorname{sen}^2 x}}{\ln 2} + C$

12 ■■■ Determina las siguientes integrales, utilizando los cambios de variable que se indican.

a) $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}$ $t = \sqrt{x}$

b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}$ $t^6 = x$

c) $\int \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} dx$ $t = \sqrt{x}$

d) $\int \frac{\sqrt{5x}}{\sqrt{5x} - 1} dx$ $t = \sqrt{5x}$

e) $\int \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} dx$ $t^2 = x^2 - 1$

f) $\int \frac{x}{\sqrt{x+3}} dx$ $t^2 = x + 3$

a) $2\sqrt{x} - 2 \ln |\sqrt{x} + 1| + C$

b) $2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} + 6 \ln |\sqrt[6]{x} - 1| + C$

c) $-x - 4\sqrt{x} - 4 \ln |1 - \sqrt{x}| + C$

d) $x + \frac{2}{5}\sqrt{5x} + \frac{2}{5} \ln |\sqrt{5x} - 1| + C$

e) $\sqrt{x^2 - 1} - \text{arc tg } \sqrt{x^2 - 1} + C$

f) $\frac{2}{3} \sqrt{(x+3)^3} - 6\sqrt{x+3} + C$

13 ■■■ Halla las siguientes integrales, utilizando los cambios de variable que se indican.

a) $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1 + e^x}} dx$ $t^2 = 1 + e^x$

b) $\int \frac{2}{3x + 2\sqrt{x}} dx$ $t = \sqrt{x}$

c) $\int \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx$ $t^2 = x - 1$

a) $\frac{2}{3} (\sqrt{1 + e^x})^3 - 2\sqrt{1 + e^x} + C$

b) $\frac{4}{3} \ln |3\sqrt{x} + 2| + C$

c) $\frac{2}{3} (\sqrt{x-1})^3 + 2\sqrt{x-1} + C$

14 ■■■ Determina el resultado de estas integrales, usando los cambios de variables que se indican.

a) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x} + \sqrt[3]{1-x}}$ $t^6 = 1 - x$

b) $\int \frac{3^x + 27^x}{1 + 9^x} dx$ $t = 3^x$

c) $\int 6x^7(3x^4 + 2)^{10} dx$ $t = 3x^4 + 2$

a) $-2\sqrt{1-x} + 3\sqrt[3]{1-x} - 6\sqrt[6]{1-x} + 6 \ln |\sqrt[6]{1-x} + 1| + C$

b) $\frac{3^x}{\ln 3} + C$ c) $\frac{1}{72} (3x^4 + 2)^{12} - \frac{1}{33} (3x^4 + 2)^{11} + C$

15 ■■■ Calcula las siguientes integrales.

a) $\int \frac{x + e^x}{e^{2x}} dx$ e) $\int x \ln^2 x dx$

b) $\int x^2 \text{sen } x dx$ f) $\int e^x \cos x dx$

c) $\int (x^2 + 1) \text{sen } (2x) dx$ g) $\int \text{sen } (\ln x) dx$

d) $\int x^2 \ln (2x + 1) dx$ h) $\int \text{arc sen } x dx$

a) $\frac{-x e^{-2x}}{2} - \frac{1}{4} e^{-2x} - e^{-x} + C$

b) $-x^2 \cos x + 2x \text{sen } x + 2 \cos x + C$

c) $\frac{-x^2 \cos (2x)}{2} + \frac{x \text{sen } (2x)}{2} + \frac{\cos (2x)}{4} + C$

d) $\frac{x^3}{3} \ln (2x + 1) - \frac{1}{9} x^3 + \frac{1}{12} x^2 - \frac{1}{12} x + \frac{1}{24} \ln (2x + 1) + C$

e) $\frac{x^2}{2} \ln^2 x - \frac{x^2}{2} \ln x + \frac{1}{4} x^2 + C$

f) $\frac{e^x}{2} (\text{sen } x + \cos x) + C$

g) $\frac{x}{2} [\text{sen } (\ln x) - \cos (\ln x)] + C$

h) $x \text{ arc sen } x + \sqrt{1 - x^2} + C$

16 ■■■ Calcula las siguientes integrales.

a) $\int x^2 \cos 4x dx$ d) $\int x^3 e^{-4x^2} dx$

b) $\int x^5 e^{-x^3} dx$ e) $\int x \ln (1 + x^2) dx$

c) $\int \frac{\ln x^2}{x} dx$ f) $\int \frac{\text{sen } x}{e^x} dx$

a) $\frac{x^2}{4} \text{sen } 4x + \frac{x}{8} \cos 4x - \frac{1}{32} \text{sen } 4x + C$

b) $-\frac{1}{3} e^{-x^3} (x^3 + 1) + C$

c) $\ln x (\ln x^2 - \ln x) + C$

d) $-\frac{1}{8} x^2 e^{-4x^2} - \frac{1}{32} e^{-4x^2} + C$

e) $\frac{x^2}{2} \ln (1 + x^2) - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \ln (1 + x^2) + C$

f) $\frac{-\text{sen } x - \cos x}{2e^x} + C$

17 ■■■ Calcula las siguientes integrales.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \int \frac{dx}{x^2 + x - 2} & \text{f)} \int \frac{3x + 2}{[(x-1)^2 + 3^2](x-1)} dx \\ \text{b)} \int \frac{x^2 + x + 6}{x^2 + 4} dx & \text{g)} \int \frac{10x^2}{9x^3 - 9x^2 + x - 1} dx \\ \text{c)} \int \frac{2x + 3}{x^2 + 2x + 5} dx & \text{h)} \int \frac{5x + 8}{2x^2 - x - 3} dx \\ \text{d)} \int \frac{dx}{(x-1)(x+2)^2} & \text{i)} \int \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - x - 2} dx \\ \text{e)} \int \frac{dx}{x^3 - 1} & \text{j)} \int \frac{x^2 - 5x + 1}{x^2 - 4x + 3} dx \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{a)} \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-1}{x+2} \right| + C \\ \text{b)} x + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) + \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C \\ \text{c)} \ln|x^2 + 2x + 5| + \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + C \\ \text{d)} \frac{1}{9} \ln|x-1| - \frac{1}{9} \ln|x+2| + \frac{1}{3x+6} + C \\ \text{e)} \frac{1}{3} \ln|x-1| - \frac{1}{6} \ln|x^2 + x + 1| - \frac{\sqrt{3}}{3} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + C \\ \text{f)} \frac{1}{9} \ln|x-1| - \frac{1}{18} \ln|x^2 - 2x + 10| + \arctan\left(\frac{x-1}{3}\right) + C \\ \text{g)} \ln|x-1| + \frac{1}{18} \ln|9x^2 + 1| + \frac{1}{3} \arctan(3x) + C \\ \text{h)} \frac{-3}{5} \ln|x+1| + \frac{31}{10} \ln|2x-3| + C \\ \text{i)} x + \ln \left| \frac{x-2}{x+1} \right| + C \\ \text{j)} x - \frac{5}{2} \ln|x-3| + \frac{3}{2} \ln|x-1| + C \end{array}$$

18 ■■■ Halla las siguientes integrales utilizando los cambios de variable que se indican.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \int \frac{dx}{e^x + 1} & e^x = t \\ \text{b)} \int \frac{3 dx}{1 + 2\sqrt{e^{-x}}} & t^2 = e^{-x} \\ \text{c)} \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}} & x = \sin t \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{a)} x - \ln(e^x + 1) + C \\ \text{b)} 3x + 6 \ln|1 + 2\sqrt{e^{-x}}| + C \\ \text{c)} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C \end{array}$$

19 ■■■ Halla estas integrales usando los cambios de variable.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 1}} & x = \frac{1}{\cos t} \\ \text{b)} \int \frac{\sen x}{\sen x + \cos x} dx & t = \operatorname{tg} x \\ \text{c)} \int \sqrt{9 - x^2} dx & x = 3 \sen t \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{a)} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} + C \\ \text{b)} \frac{-1}{2} \ln|\operatorname{tg} x + 1| + \frac{1}{4} \ln|1 + \operatorname{tg}^2 x| + \frac{1}{2} x + C \\ \text{c)} \frac{9 \operatorname{arc} \sen(x/3)}{2} + \frac{x\sqrt{9-x^2}}{2} + C \end{array}$$

20 ■■■ Resuelve las siguientes integrales.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \int \frac{\cos(2x)}{\sen^2 x} dx & \\ \text{b)} \int \sen^3 x \cos^2 x dx & \\ \text{c)} \int \frac{\sen^3 x}{\cos x} dx & \\ \text{d)} \int \frac{dx}{\sen x} & t = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{a)} -\operatorname{cotg} x - 2x + C \\ \text{b)} -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + C \\ \text{c)} -\ln|\cos x| + \frac{1}{4} \cos 2x + C \\ \text{d)} \ln \left| \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) \right| + C \end{array}$$

21 ■■■ Utilizando distintos métodos de integración resuelve las siguientes integrales.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x}} dx & \text{e)} \int \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx \\ \text{b)} \int (4 + \operatorname{tg}^2 x) dx & \text{f)} \int \frac{dx}{x\sqrt{2x-1}} \\ \text{c)} \int \frac{7}{4 + 9x^2} dx & \text{g)} \int x\sqrt{x^2 - 1} dx \\ \text{d)} \int \sen^2(3x) dx & \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \left(\frac{2}{5}x^2 - \frac{4}{3}x + 2\right)\sqrt{x} + C & \text{e)} 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{2x-1} + C \\ \text{b)} 3x + \operatorname{tg} x + C & \text{f)} 2\sqrt{x} - 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{x} \\ \text{c)} \frac{7}{6} \operatorname{arc} \operatorname{tg}\left(\frac{3x}{2}\right) + C & \text{g)} \frac{1}{3} (x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 1} + C \\ \text{d)} \frac{x}{2} - \frac{\sen(6x)}{12} + C & \end{array}$$

22 ■■■ Calcula estas integrales.

a) $\int \frac{x\sqrt{x+1}}{2x-3} dx$

e) $\int \frac{dx}{\sqrt{25-16x^2}}$

b) $\int \ln(\sqrt{x^2+1}) dx$

f) $\int \frac{x^2+1}{x-1} dx$

c) $\int \frac{x \operatorname{arc} \operatorname{sen} x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

g) $\int xe^{-x} dx$

d) $\int \operatorname{sen}(\ln x) dx$

h) $\int \frac{x+1}{x^2-4} dx$

a) $\frac{\sqrt{(x+1)^3}}{3} - \frac{3\sqrt{x+1}}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{4} \operatorname{arc} \operatorname{tg}(\sqrt{2x+2}) + C$

b) $\frac{x}{2} \ln(\sqrt{x^2+1}) - x + \operatorname{arctg} x + C$

c) $x - \sqrt{1-x^2} \operatorname{arc} \operatorname{sen} x + C$

d) $\frac{1}{2}(x \operatorname{sen}(\ln x) - x \cos(\ln x)) + C$

e) $\frac{1}{4} \operatorname{arc} \operatorname{sen}\left(\frac{4x}{5}\right) + C$

f) $\frac{1}{2}x^2 + x + 2 \ln|x-1| + C$

g) $-(1+x) \cdot e^{-x} + C$

h) $\frac{3}{4} \ln|x-2| + \frac{1}{4} \ln|x+2| + C$

23 ■■■ Determina todas las funciones cuyas derivadas sean como la siguiente.

$$f'(x) = \frac{x^4 + x + 1}{x^2 + x}$$

Indica, además, su dominio de definición.

Sol:

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x + \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + C$$

$$\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} - \{-1, 0\}$$

Cálculo de primitivas

24 ■■■ Dada la función: $f(x) = \cos x - \cos^3 x$

a) Halla su integral indefinida.

b) Determina la primitiva de $f(x)$ tal que pasa por el punto $(\pi/2, 0)$

a) $F(x) = \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + C$

b) $F(x) = \frac{\operatorname{sen}^3 x - 1}{3}$

25 ■■■ Calcula la primitiva de la función que se anula en el punto de abscisa $x = 2$:

$$f(x) = x\sqrt{x^2-1}$$

Sol: $F(x) = \frac{1}{3}(x^2-1)\sqrt{x^2-1} - \sqrt{3}$

26 ■■■ Calcula la primitiva de la función $f(x) = (\ln x)^2$ que se anula en $x = e$.

Sol: $F(x) = x(\ln x)^2 - 2x \ln x + 2x - e$

27 ■■■ Encuentra la primitiva de la función $f(x)$ que se anula

en $x = \frac{\pi}{4}$: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}$

Sol: El ejercicio no tiene solución.

28 ■■■ Para cada una de estas dos funciones, calcula la primitiva que cumple la condición de que su gráfica pase por el punto de coordenadas $(0, 1)$:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \quad \text{y} \quad g(x) = \operatorname{tg} x$$

Sol: $F(x) = \sqrt{x^2+1}$. $G(x) = -\ln|\cos x| + 1$.

29 ■■■ Calcula $f(x)$ tal que $f'(x) = x \ln(x^2+1)$ y $f(0) = 0$.

Sol: $f(x) = \frac{x^2+1}{2} \cdot \ln(x^2+1) - \frac{x^2}{2}$

30 ■■■ Halla la función $f(x)$ tal que $f'(x) = \frac{x}{x^2+1}$, sabiendo que $f(0) = 2$.

Sol: $f(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + 2$

31 ■■■ Determina la función f , definida en todo \mathbb{R} tal que $f'(x) = x^2 e^x$ y cuya gráfica pasa por el punto $(0, 2)$.

Sol: $f(x) = e^x(x^2 - 2x + 2)$

32 ■■■ Obtén la expresión de una función $f(x)$, sabiendo que $f'(x) = (x+1)e^{2x}$, y que $f(0) = \frac{5}{4}$.

Sol: $f(x) = e^{2x} \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \right) + 1$

33 ■■■ Encuentra la primitiva de $f(x) = \frac{-1}{(x-2)^2}$ sabiendo que su gráfica tiene como asíntota horizontal $y = 2$.

Sol: $F(x) = \frac{1}{x-2} + 2$

34 ■■■ Encuentra la primitiva de la función $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ cuya recta tangente en $x = e$ pasa por $(0, 0)$.

Sol: $F(x) = \ln|\ln|x|| + 1$

Actividades de aplicación

35 ■■■ Determina:

a) Los máximos y mínimos relativos y los puntos de inflexión de la función $f(x) = \frac{3x^2+x+3}{x^2+1}$.

b) Una función $F(x)$ tal que su derivada sea $f(x)$ y $F(0) = 4$.

a) En $x = 1$ hay un máximo relativo y en $x = -1$ un mínimo relativo.

En $x = 0$ y $x = \pm\sqrt{3}$ hay puntos de inflexión.

b) $F(x) = 3x + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + 4$.

36 ■■■ Sea la integral $\int e^{2x} \operatorname{sen} e^x dx$:

a) Intégrala mediante el cambio de variable $t = e^x$.

b) Calcula la constante de integración para que la función integral pase por el origen de coordenadas.

a) $\operatorname{sen} e^x - e^x \cos e^x + C$

b) $C = 0,9824$

37 ■■■ Se sabe que la gráfica de una función pasa por el punto $(1, 1)$ y que $f'(1) = 2$. Se conoce también que su derivada segunda es la función $g(x) = 2$. Calcula la función f .

Sol: $f(x) = x^2$.

38 ■■■ Halla $f(x)$ sabiendo que $f(0) = 1$, $f'(0) = 2$ y $f''(x) = 3x$.

Sol: $f(x) = \frac{x^3}{2} + 2x + 1$.

39 ■■■ ¿Existe alguna función $y = f(x)$ tal que $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ y que $f(0) = 2$ y $f(3) = 3$? ¿Y que $f(2) = 2$ y $f(3) = 3$? Justifica la respuesta. En el caso de que exista tal función f en alguna de estas situaciones, calcúlala.

Sol: En el primer caso, no existe

En el segundo caso: $f(x) = \frac{4}{3} \sqrt{(x-1)^3} - 1,44x + 3,54$

40 ■■■ Determina la expresión algebraica de la función $F(x)$ que verifica las siguientes condiciones:

- $F'(x) = 2x - 6$
- La gráfica de la función $F(x)$ presenta un mínimo en el punto de ordenada -1 .

Sol: $F(x) = x^2 - 6x + 10$

41 ■■■ Halla la ecuación de una curva $y = f(x)$ sabiendo que pasa por el punto $(1, 1)$ y que la pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa x es $m = 3x + 1$.

Sol: $f(x) = \frac{3x^2}{2} + x - \frac{3}{2}$

42 ■■■ Halla la ecuación de la curva $y = f(x)$ que cumple que $f''(x) = 4$, y la recta tangente en el punto de abscisa $x = 3$ tiene por ecuación $y = 9x - 13$.

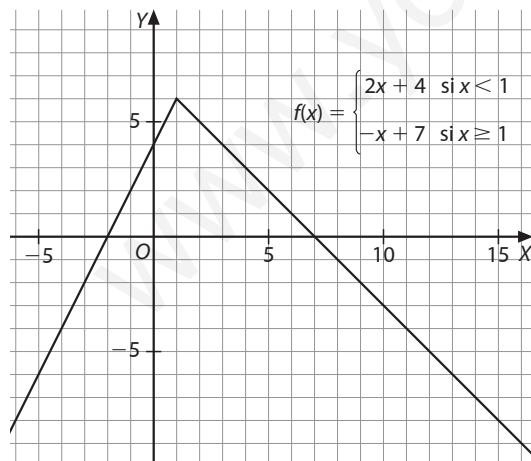
Sol: $y = 2x^2 - 3x + 5$.

43 ■■■ De una función $y = f(x)$ sabemos:

- Su dominio de definición es todo \mathbb{R} .
- Su función derivada es: $f'(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 1 \\ -1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$
- $f(x)$ es continua en todo punto y $f(-1) = 2$.

Determina el valor de $f(1)$ y dibuja la gráfica de la función $f(x)$.

Sol: $f(1) = 6$



44 ■■■ Determina la primitiva de la función $f(x) = \frac{-a}{(ax+1)^2}$ cuya gráfica tiene por asíntota horizontal la recta $y = 2$, y por asíntota vertical la recta $x = 1/2$.

Sol: $F(x) = \frac{-4x+3}{-2x+1}$

Actividades tipo test

Escoge y razona la respuesta correcta en cada caso.

45 ■■■ El resultado de $\int \frac{dx}{4x^2 - 4x + 4}$ es:

- a) $\frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$
- b) $\sqrt{3} \operatorname{arc\,tg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$
- c) $\operatorname{arc\,tg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C$
- d) $\ln |4x^2 - 4x + 4| + C$

La respuesta correcta es la a).

46 ■■■ Para resolver $\int e^{2x} \operatorname{sen} e^x dx$ se realiza este cambio de variable:

- a) $t = \operatorname{sen} x$
- b) $t = e^{2x}$
- c) $t = e^x$
- d) $t = \ln x$

La respuesta correcta es la c).

47 ■■■ Si $F'(x) = \frac{1}{2}x + 2$ y la gráfica de $F(x)$ presenta un mínimo en el punto de ordenada 4, entonces:

- a) $F(x) = \frac{x^2}{4} - 2x + 4$
- b) $F(x) = \frac{x^2}{2} + 2x - 4$
- c) $F(x) = \frac{x^2}{4} + 8x + 2$
- d) $F(x) = \frac{x^2}{4} + 2x + 8$

La respuesta correcta es la d).

1. Calcula una primitiva de la función: $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{1 - \ln x^2}}$

Sol: $-\sqrt{1 - \ln x^2} + C$

2. Resuelve las siguientes integrales.

a) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$

Sol: $2e^{\sqrt{x}} + C$

b) $\int \frac{\sen x + \cos x}{\sen x - \cos x} dx$

Sol: $\ln |\sen x - \cos x| + C$

c) $\int \frac{x}{2^x} dx$

Sol: $\frac{-1}{2^x \ln 2} \left(x + \frac{1}{\ln 2} \right) + C$

d) $\int \frac{x+1}{x^2(x-1)} dx$

Sol: $-2 \ln |x| + \frac{1}{x} + 2 \ln |x-1| + C$

e) $\int \frac{x+1}{3x^2+12} dx$

Sol: $\frac{1}{6} \ln |x^2+4| + \frac{1}{6} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{x}{2} \right) + C$

3. Halla $\int (\operatorname{tg}^4 x + \operatorname{tg}^6 x) dx$. Comprueba el resultado con medios tecnológicos.

Sol: $\frac{\operatorname{tg}^5 x}{5} + C$

4. Mediante el cambio de variable $t = \sqrt{x}$, calcula $\int \frac{1+x}{x+\sqrt{x}} dx$.

Sol: $x - 2\sqrt{x} + 4 \ln |1 + \sqrt{x}| + C$

5. Determina la función cuya derivada segunda es 6 sabiendo que su gráfica pasa por el punto $(-1, 0)$ y en dicho punto la pendiente de su recta tangente es -4 .

Sol: $f(x) = 3x^2 + 2x - 1$

6. Averigua la ecuación de la parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$ que en el punto de abscisa $x = -1$ tiene por tangente la recta $y = -x + 3$, y $f'(x) = 3$.

Sol: $f(x) = \frac{3}{2}x^2 + 2x + \frac{9}{2}$

7. Determina la función f sabiendo que su gráfica pasa por el punto $(1, 3)$, y que $f'(x) = \ln x + 1$.

Sol: $f(x) = x \ln x + 3$