

**FUNCIONES CONTINUAS EN UN INTERVALO**

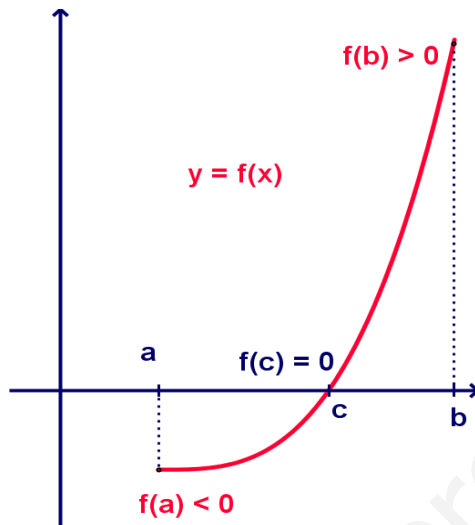
**Teorema de Bolzano**

Sea  $f$  una función que verifica las siguientes hipótesis:

1. Es continua en el intervalo cerrado  $[a, b]$
2. Las imágenes en los extremos del intervalo tienen signo distinto:  $f(a) \cdot f(b) < 0$

Entonces, existe un punto  $c \in (a, b)$  tal que  $f(c) = 0$

Es decir la función corta al eje OX en el interior del intervalo



**Teorema de Bolzano**

*Hipótesis:*  $f$  es continua en  $[a, b]$   
 $f(a) \cdot f(b) < 0$

*Tesis:*  $\exists c \in (a, b) / f(c) = 0$

**Aplicación del teorema de Bolzano**

El T<sup>o</sup> de Bolzano es útil para determinar en algunas ocasiones si una ecuación tiene soluciones reales:

**Ejemplo 1**

Demostrar que la ecuación  $4x^3 - 4x + 1 = 0$  tiene una solución real.

1º. Se considera la función  $f(x) = 4x^3 - 4x + 1$  continua en  $\mathbb{R}$  luego continua en cualquier intervalo cerrado que se considere.

2º. Se busca el intervalo donde se cumplan las hipótesis del T<sup>o</sup> Bolzano:

$$f(0) = 1 > 0 \qquad f(1) = 1 > 0$$

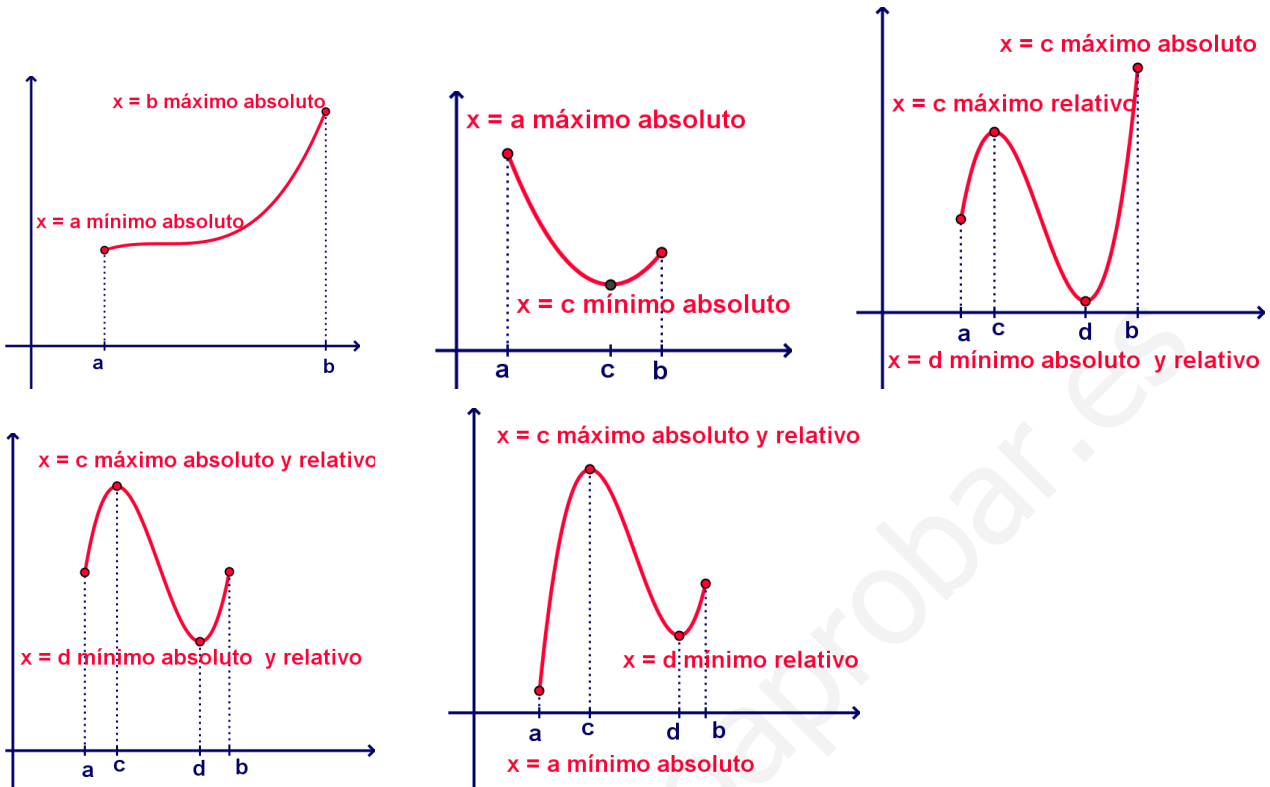
$$f(-1) = 1 > 0 \qquad f(-2) = -23 < 0$$

3º. Por tanto en el intervalo  $[-2, -1]$  se cumplen las hipótesis del T<sup>o</sup> de Bolzano, luego:

$\exists c \in (-2, -1)$  tal que  $f(c) = 0$  que equivale a decir que la ecuación  $4x^3 - 4x + 1 = 0$  tiene una solución  $c$  en el intervalo  $(-2, -1)$

**Teorema de Weierstrass**

Toda función continua en un intervalo cerrado alcanza su máximo y mínimo absolutos

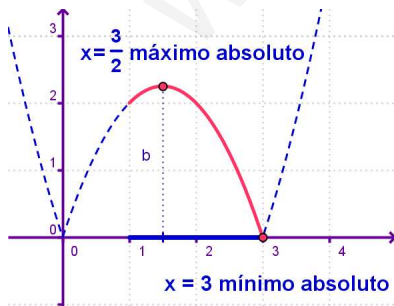


Como se observa en los dibujos anteriores los máximos y mínimos (extremos) absolutos se encuentran entre los relativos o los extremos del intervalo:

- 1º.- Se calculan los máximos y mínimos relativos
- 2º.- Se calculan las imágenes en estos máximos y mínimos relativos y en los extremos del intervalo
- 3º.- El mayor valor es el máximo absoluto y el menor valor es el mínimo absoluto.

**Ejemplo 2**

Sea la función  $f(x) = |x^2 - 3x|$  Calcula los extremos absolutos de  $f$  en el intervalo  $[1,3]$ , ¿en qué  $T^a$  te basas para asegurar su existencia. ?



$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 3x & \text{si } x \in [1,3] \\ x^2 - 3x & \text{si } x \notin (1,3) \end{cases}$$

Por tanto  $x \in [1,3] \Rightarrow f(x) = -x^2 + 3x$

1º.-  $f'(x) = -2x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \in [1,3]$  es máximo relativo (parábola)

2º.-  $f(1) = 2$  ,  $f(3) = 0$   $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4}$

3º.- máximo absoluto:  $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$  mínimo absoluto:  $(3,0)$

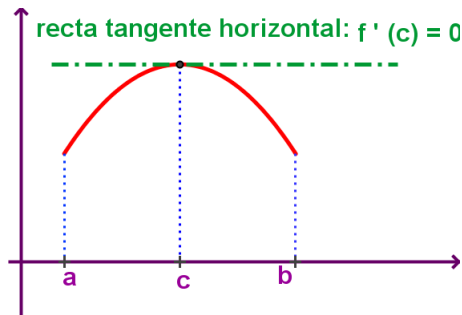
## FUNCIONES DERIVABLES EN UN INTERVALO

### Teorema de Rolle

Sea  $f$  una función que verifica las siguientes hipótesis:

1. Es continua en el intervalo cerrado  $[a, b]$
2. Es derivable en el intervalo abierto  $(a, b)$
3. Toma el mismo valor en los extremos del intervalo, es decir  $f(a) = f(b)$

Entonces, existe un punto  $c \in (a, b)$  tal que  $f'(c) = 0$ , es decir, con tangente horizontal.



### Teorema de Rolle

*Hipótesis* :  $f$  es continua en  $[a, b]$   
 $f$  es derivable en  $(a, b)$   
 $f(a) = f(b)$

*Tesis* :  $\exists c \in (a, b) / f'(c) = 0$

### Ejemplo 3

La función  $f: [-2, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = x^3 - 3x$  verifica las siguientes hipótesis:

1. Es continua en  $[-2, 1]$  por ser polinómica
2. Es derivable en  $(-2, 1)$  por ser polinómica.
3.  $f(-2) = f(1) = -2$

Entonces existe un punto  $c$  en el intervalo abierto  $(-2, 1)$  con derivada nula en dicho punto. Vamos a comprobarlo:

$$f(x) = x^3 - 3x \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow c = -1 \in (-2, 1)$$

### Ejemplo 4

Determina  $k$  para que la función  $f(x) = x^3 - kx + 10$  cumpla las hipótesis del T<sup>a</sup> de Rolle en el intervalo  $[-3, 1]$  y calcula el punto que vaticina el T<sup>a</sup>.

→ La continuidad y derivabilidad se cumplen puesto que es una función polinómica, luego la única condición que hay que imponer es la 3<sup>a</sup>:

$$f(-3) = f(1) \Rightarrow (-3)^3 - k(-3) + 10 = 1^3 - k \cdot 1 + 10 \Rightarrow -27 + 3k + 10 = 11 - k$$

$$4k = 28 \Rightarrow k = 7 \Rightarrow f(x) = x^3 - 7x + 10$$

→ El valor que vaticina el T<sup>a</sup> es:

$$f(x) = x^3 - 7x + 10 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 7 = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{7/3} \Rightarrow c = -\sqrt{7/3} \in (-2, 1)$$

**Ejemplo 5: Aplicación del teoremas de Rolle**

Sea  $f$  una función derivable, demostramos que si  $f'(x) = 0$  tiene 1 única solución  $\Rightarrow f(x) = 0$  tiene 2 soluciones como máximo

**Solución**

La demostración se hace por reducción al absurdo es decir negar "tiene 2 soluciones como máximo"

Se supone que  $f(x) = 0$  tiene 3 soluciones:  $\exists c_1 < c_2 < c_3$  tales que  $f(c_1) = f(c_2) = f(c_3) = 0$

Por tanto se puede aplicar el T<sup>a</sup> de Rolle a la función  $f$  en los intervalos  $[c_1, c_2]$  y  $[c_2, c_3]$

En ambos intervalos se cumplen las hipótesis del T<sup>a</sup> Rolle, luego:

$\exists d \in (c_1, c_2)$  y  $\exists d' \in (c_2, c_3)$  tales que  $f'(d) = f'(d') = 0$  en contradicción con " $f'(x) = 0$  tiene 1 única solución" por tanto no se puede suponer que  $f(x) = 0$  tiene 3 soluciones

Por tanto  $f(x) = 0$  tiene 2 soluciones como máximo

Se demuestra en general que:

Sea  $f$  una función derivable, demostramos que si  $f'(x) = 0$  tiene  $n$  única soluciones  $\Rightarrow f(x) = 0$  tiene  $n + 1$  soluciones como máximo

**Ejemplo 6: Aplicación conjunta de los teoremas de Bolzano y de Rolle**

Demuestra que la ecuación  $x^5 + 5x + 1 = 0$  sólo admite una solución real

**Solución**

1°. Se considera la función  $f(x) = x^5 + 5x + 1$  continua y derivable en  $\mathbb{R}$  luego continua y derivable en cualquier intervalo cerrado que se considere.

2°. Se busca el intervalo donde se cumplan las hipótesis del T<sup>a</sup> Bolzano:

$$f(0) = 1 > 0 \qquad f(1) = 7 > 0$$

$$f(-1) = 5 > 0 \qquad f(-2) = -41 < 0$$

3°. Por tanto en el intervalo  $[-2, -1]$  se cumplen las hipótesis del T<sup>a</sup> de Bolzano, luego:

$\exists c \in (-2, -1)$  tal que  $f(c) = 0$  que equivale a decir que la ecuación  $x^5 + 5x + 1 = 0$  tiene una solución  $c$  en el intervalo  $(-2, -1)$

4°. Es única:

Se supone que tiene 2 soluciones:  $\exists c_1 < c_2$  tales que  $f(c_1) = f(c_2) = 0$

En el intervalo  $[c_1, c_2]$  se cumple las hipótesis del T<sup>a</sup> Rolle, luego:

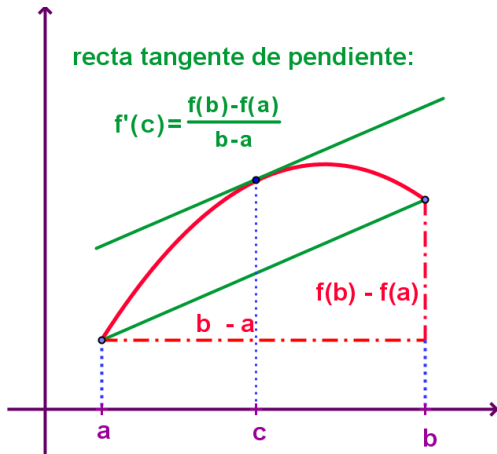
$\exists d \in (c_1, c_2)$  tal que  $f'(d) = 0$  pero  $f'(x) = 5x^4 + 5 \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}$  por tanto no se puede suponer que  $f(x) = 0$  tiene 2 soluciones

**Teorema del valor medio o de Lagrange**

Sea  $f$  una función que verifica las siguientes hipótesis:

1. Es continua en el intervalo cerrado  $[a, b]$
2. Es derivable en el intervalo abierto  $(a, b)$

Entonces existe un punto  $c \in (a, b)$  tal que  $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$



**Teorema del Valor Medio**

*Hipótesis:*  $f$  es continua en  $[a, b]$   
 $f$  es derivable en  $(a, b)$

*Tesis:*  $\exists c \in (a, b) / f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

**Interpretación geométrica:** Existe un punto en la curva cuya tangente es paralela a la cuerda que une los extremos.

**Ejemplo 7**

Sea  $f: [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por  $f(x) = 3x^2 - 6$  que es continua y derivable en su dominio. Por el teorema del valor medio:

$$\exists c \in (-1, 2) / f'(c) = \frac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)} = \frac{6-(-3)}{3} = 3$$

$$f(x) = 3x^2 - 6 \Rightarrow f'(x) = 6x \Rightarrow 6x = 3 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

**Teorema de Cauchy**

Si  $f$  y  $g$  son dos funciones continuas en  $[a, b]$  y derivables en  $(a, b)$ , existe un punto  $c \in (a, b)$  tal que  $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$

**Ejemplo 8**

Halla el valor de  $c$  del intervalo  $(0, 3)$  donde se cumple la tesis del teorema de Cauchy, siendo  $f(x) = -2x + 4$  y  $g(x) = x^2 - 4$

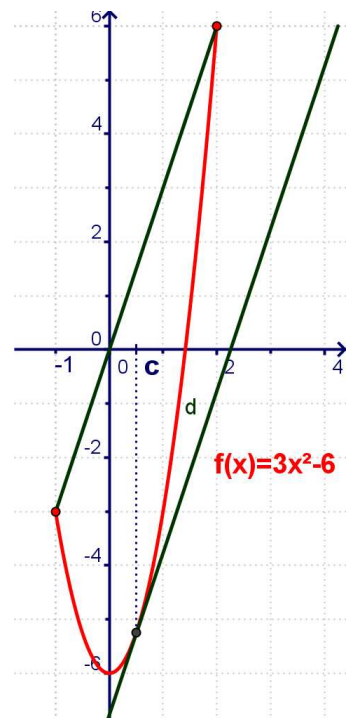
→ Las funciones son continuas y derivables en todo  $\mathbb{R}$  por ser funciones polinómicas

$$\left. \begin{aligned} f'(x) = -2 &\Rightarrow f'(c) = -2 \\ g'(x) = 2x &\Rightarrow g'(c) = 2c \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{-2}{2c} = \frac{-1}{c}$$

→ Valores de las funciones en los extremos del intervalo:

$$\left. \begin{aligned} f(0) = 4 \text{ y } f(3) = -2 \\ g(0) = -4 \text{ y } g(3) = 5 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{f(3)-f(0)}{g(3)-g(0)} = \frac{-2-4}{5-4} = \frac{-2}{3}$$

$$\rightarrow \text{Luego } \frac{-2}{3} = \frac{-1}{c} \Rightarrow -2c = -3 \Rightarrow c = \frac{3}{2} \in (0, 3)$$



### Regla de L'Hôpital

Esta regla permite obtener fácilmente ciertos límites y dice:

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0} \text{ y } \exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

También se puede aplicar para cuando  $x \rightarrow \infty$  y la indeterminación  $\frac{\infty}{\infty}$

La regla puede aplicarse una o más veces, mientras se mantenga la indeterminación.

### Ejemplo 9

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{0}{0} \text{ indeterminación L'Hôpital} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen} x}{2x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}$$

### Ejemplo 10

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Ln}(1+x) - \text{sen} x}{x \cdot \text{sen} x} &= \frac{\text{Ln}(1+0) - \text{sen} 0}{0 \cdot \text{sen} 0} = \frac{0}{0} \text{ (aplicamos la regla de L'Hôpital)} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Ln}(1+x) - \text{sen} x}{x \cdot \text{sen} x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - \cos x}{\text{sen} x + x \cdot \cos x} = \frac{\frac{1}{1+0} - \cos 0}{\text{sen} 0 + 0 \cdot \cos 0} = \frac{0}{0} \text{ (aplicamos L'Hôpital)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-1}{(1+x)^2} + \text{sen} x}{\cos x + \cos x - x \cdot \text{sen} x} = \frac{\frac{-1}{(1+0)^2} + \text{sen} 0}{\cos 0 + \cos 0 - 0 \cdot \text{sen} 0} = \frac{-1}{2} \end{aligned}$$

### Ejemplo 11

Se sabe que  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{e^x - 1} - \frac{a}{2x} \right)$  es finito. Determina el valor de  $a$  y calcula el límite.

### **Solución**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{e^x - 1} - \frac{a}{2x} \right) \stackrel{\infty - \infty}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2x - a(e^x - 1)}{(e^x - 1) \cdot 2x} \right) = \frac{0}{0} \text{ ind (L'Hôpital)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2 - ae^x}{e^x \cdot 2x + (e^x - 1) \cdot 2} \right) = \frac{2 - a}{0}$$

Como me dicen que el límite existe y es finito el numerador ha de ser cero para poder seguir aplicándole la Regla de L'Hôpital, es decir  $2 - a = 0 \Rightarrow a = 2$

Volviendo a aplicar la regla de L'Hôpital, con  $a = 2$ , tenemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2 - 2e^x}{e^x \cdot 2x + (e^x - 1) \cdot 2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{-2e^x}{e^x \cdot 2x + 2e^x + 2e^x} \right) = \frac{-2}{0 + 2 + 2} = \frac{-1}{2}$$

### Ejemplo 12

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{e^{2x} - 1} = \frac{0}{0} \text{ L'Hôpital} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\cos x \cdot (-\text{sen} x)}{2 \cdot e^{2x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \cdot \text{sen} x}{e^{2x}} = \frac{0}{1} = 0$$

## Ejercicios resueltos

1.- Demostrar que la siguiente ecuación tiene una solución en el intervalo  $(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ :  $\frac{6}{2+\operatorname{sen}x} = 4$

1°. Se considera la función  $f(x) = \frac{6}{2+\operatorname{sen}x} - 4$  continua en  $\mathfrak{R}$  luego continua en cualquier intervalo cerrado que se considere.

2°. Se busca el intervalo donde se cumplan las hipótesis del T<sup>a</sup> Bolzano:

$$f\left(\frac{-\pi}{2}\right) = \frac{6}{2-1} - 4 > 0 \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{6}{2+1} - 4 < 0$$

3°. Por tanto en el intervalo  $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  se cumplen las hipótesis del T<sup>a</sup> de Bolzano, luego:

$\exists c \in (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  tal que  $f(c) = 0$  que equivale a decir que la ecuación  $\frac{6}{2+\operatorname{sen}x} = 4$  tiene una solución  $c$  en el intervalo  $(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

2.- Demostrar que la ecuación  $x^{18} - 5x = -3$  no puede tener más de dos raíces reales.

1°. Se considera la función  $f(x) = x^{18} - 5x + 3$  continua y derivable en  $\mathfrak{R}$  luego continua y derivable en cualquier intervalo cerrado que se considere.

2°. Se buscan los intervalos donde se cumplan las hipótesis del T<sup>a</sup> Bolzano:

$$f(0) = 3 > 0 \quad f(1) = -1 < 0 \quad f(2) > 0$$

3°. Por tanto en el intervalo  $[0,1]$  y  $[1,2]$  se cumplen las hipótesis del T<sup>a</sup> de Bolzano, luego:

$\exists c \in (0,1)$  y  $\exists c' \in (1,2)$  tal que  $f(c) = f(c') = 0$  que equivale a decir que la ecuación  $x^{18} - 5x = -3$  tiene 2 soluciones en  $\mathfrak{R}$

3.- Demuestra que la ecuación  $x^3 - 3x + a = 0$  con  $a \in \mathfrak{R}$  tiene a lo más una solución en  $[-1,1]$ .  
¿Para que valor de  $a$  existe dicha solución?

1°. Se considera la función  $f(x) = x^3 - 3x + a$  continua y derivable en  $\mathfrak{R}$  luego continua y derivable en cualquier intervalo cerrado que se considere.

2°. Se supone que hay más de 1 solución:

$$\text{hay 2 soluciones, } c_1, c_2 \in [-1,1] \text{ tales que } f(c_1) = f(c_2) = 0$$

Luego en el intervalo  $[c_1, c_2]$  se cumplen las hipótesis del T<sup>a</sup> Rolle por lo que

$$\exists d \in (c_1, c_2) \subset [-1,1] \text{ tal que } f'(d) = 0 \text{ que equivale a decir } d \in (-1,1)$$

Veamos que pasa con la función derivada:

$$f(x) = x^3 - 3x + a \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm 1 \notin (-1,1) \text{ en contradicción con } d \in (-1,1)$$

Por tanto a lo sumo existe una solución de la ecuación.

3°. ¿Para que valor de  $a$  existe dicha solución? Se tiene que cumplir el T<sup>a</sup> Bolzano en  $[-1,1]$ :

$$\left. \begin{array}{l} f(-1) = -1 + 3 + a = a + 2 \\ f(1) = 1 - 3 + a = a - 2 \end{array} \right\} \Rightarrow (a + 2) \cdot (a - 2) < 0 \Rightarrow a \in (-2,2)$$

**4.-** Demostrar que la siguiente ecuación tiene una solución en el intervalo  $(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ :  $\frac{6}{2+\operatorname{sen}x} = 4$

**1º.** Se considera la función  $f(x) = \frac{6}{2+\operatorname{sen}x} - 4$  continua en  $\mathbb{R}$  luego continua en cualquier intervalo cerrado que se considere.

**2º.** Se busca el intervalo donde se cumplan las hipótesis del Tº Bolzano:

$$f\left(\frac{-\pi}{2}\right) = \frac{6}{2-1} - 4 > 0 \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{6}{2+1} - 4 < 0$$

**3º.** Por tanto en el intervalo  $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  se cumplen las hipótesis del Tº de Bolzano, luego:

$\exists c \in (\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  tal que  $f(c) = 0$  que equivale a decir que la ecuación  $\frac{6}{2+\operatorname{sen}x} = 4$  tiene una solución  $c$  en el intervalo  $(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

**5.-** Demostrar que la ecuación  $x^{18} - 5x = -3$  no puede tener más de dos raíces reales.

**1º.** Se considera la función  $f(x) = x^{18} - 5x + 3$  continua y derivable en  $\mathbb{R}$  luego continua y derivable en cualquier intervalo cerrado que se considere.

**2º.** Se buscan los intervalos donde se cumplan las hipótesis del Tº Bolzano:

$$f(0) = 3 > 0 \quad f(1) = -1 < 0 \quad f(2) > 0$$

**3º.** Por tanto en el intervalo  $[0,1]$  y  $[1,2]$  se cumplen las hipótesis del Tº de Bolzano, luego:

$\exists c \in (0,1)$  y  $\exists c' \in (1,2)$  tal que  $f(c) = f(c') = 0$  que equivale a decir que la ecuación  $x^{18} - 5x = -3$  tiene 2 soluciones en  $\mathbb{R}$

**4º.** Solo hay 2:

Se supone que hay 3 soluciones:  $\exists c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$  con  $c_1 < c_2 < c_3$  tales que  $f(c_1) = f(c_2) = f(c_3) = 0$

En los intervalos  $[c_1, c_2]$  y  $[c_2, c_3]$  se cumplen las hipótesis del Tº Rolle, luego:

$\exists d \in (c_1, c_2)$  y  $d' \in (c_2, c_3)$  tales que  $f'(d) = f'(d') = 0$  pero  $f'(x) = 18x^{17} - 5 = 0$  que solo tiene una solución real  $x = \sqrt[17]{\frac{5}{18}}$  en contradicción con la suposición, por tanto solo hay 2

**6.-** La función  $f: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$  toma el mismo valor en los extremos del intervalo:  $f(-1) = \sqrt[3]{(-1)^2} = 1$   $f(1) = \sqrt[3]{1^2} = 1$

Encontrar su derivada y comprobar que no se anula nunca. ¿Contradice esto el teorema de Rolle?

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

Si intentamos anular la derivada resulta:  $\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = 0 \Rightarrow 2 = 0$  absurdo!

Esto no contradice el teorema de Rolle porque la segunda hipótesis no se verifica: la función no es derivable en todos los puntos del intervalo, en el punto  $x = 0$  no existe la derivada como podemos ver calculándola a través del límite:

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{h^2} - 0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^{1-\frac{2}{3}}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h}} = \infty$$



**7.-** Calcula  $b$  para que la función  $f(x) = x^3 - 9x + 2$  cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo  $[0, b]$ . ¿Dónde se cumple la tesis?

→ Por ser una función polinómica, es continua y derivable en todo  $\mathfrak{R}$  y se cumplen las dos primeras hipótesis.

→ Tercera hipótesis:  $\left. \begin{matrix} f(0) = 2 \\ f(b) = b^3 - 9b + 2 \end{matrix} \right\} \Rightarrow b^3 - 9b + 2 = 2 \Rightarrow b^3 - 9b = 0 \Rightarrow b(b^2 - 9) = 0$

$$b(b^2 - 9) = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b = \pm 3 \end{cases} \Rightarrow \text{La única solución válida es } b = 3$$

→ La tesis se cumple:  $f'(x) = 3x^2 - 9 \Rightarrow f'(c) = 3c^2 - 9 = 0 \Rightarrow c = \pm\sqrt{3} \Rightarrow c = \sqrt{3} \in (0, 3)$

**8.-** Prueba que la función  $f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & -\frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 5 - (x - 2)^2 & 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$  Cumple las hipótesis del T<sup>o</sup> de Rolle. Averigua dónde cumple la tesis.

En cada uno de los intervalos es una función polinómica que es continua y derivable en  $\mathfrak{R}$

El único punto dudoso es  $x = 1 \Rightarrow$  estudiamos la continuidad y derivabilidad en dicho punto

★  $f$  continua en  $x = 1 \Rightarrow f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 4 \Rightarrow$

Se cumple la 1<sup>a</sup> hipótesis:  $f$  es continua en  $\left[\frac{-1}{2}, 4\right]$

★  $f$  derivable en  $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & -\frac{1}{2} \leq x < 1 \\ 5 - (x - 2)^2 & 1 \leq x \leq 4 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 2 & -\frac{1}{2} < x < 1 \\ -2(x - 2) & 1 < x < 4 \\ ? & x = 1 \end{cases}$$

$f$  derivable en  $x = 1 \Rightarrow f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = 2 \Rightarrow$

Se cumple la 2<sup>a</sup> hipótesis:  $f$  es derivable en  $\left(\frac{-1}{2}, 4\right)$

★  $\left. \begin{matrix} f\left(\frac{-1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{-1}{2} + 2 = 1 \\ f(4) = 5 - (4 - 2)^2 = 1 \end{matrix} \right\} \Rightarrow$  se cumple la 3<sup>a</sup> hipótesis

★ Veamos dónde se verifica la tesis:  $f'(x) = \begin{cases} 2 & -\frac{1}{2} < x < 1 \\ -2(x - 2) & 1 \leq x < 4 \end{cases}$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2 = 0 & \text{absurdo} \\ -2(x - 2) = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2 \in [1, 4] \Rightarrow$  **La tesis se verifica en  $c = 2$**

**9.-** Sea la función  $f(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ A \cdot e^x + B & x > 0 \end{cases}$   
 Calcula "A" y "B" para que  $f$  cumpla las hipótesis del T<sup>a</sup> de Lagrange en  $[-1,1]$

La función es continua y derivable  $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\} = \mathbb{R}^*$  puesto que los trozos lo son luego para que se cumplan las hipótesis del T<sup>a</sup> se tiene que cumplir la continuidad y derivabilidad en  $x = 0$

★  $f$  continua en  $x = 0 \Rightarrow f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \Rightarrow 0 = A + B$

★  $f$  derivable en  $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} x & x \leq 0 \\ A \cdot e^x + B & x > 0 \end{cases} \Rightarrow f'(x) = \begin{cases} 1 & x < 0 \\ A \cdot e^x & x > 0 \\ \exists & x = 0 \end{cases}$$

$$f \text{ derivable en } x = 0 \Rightarrow f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) \Rightarrow 1 = A \stackrel{A+B=0}{\Rightarrow} B = -1$$

**10.-** Prueba que la función  $f(x) = \begin{cases} \frac{3-x^2}{2} & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$  satisface las hipótesis del teorema del valor medio en el intervalo  $[0,2]$  y calcula el o los valores vaticinados por el teorema.

★ La función es continua en el intervalo  $[0,2]$

➤  $y = \frac{3-x^2}{2}$  continua en  $\mathbb{R}$  (es polinómica)  $\Rightarrow f$  continua en  $x < 1$

➤  $y = \frac{1}{x}$  continua en  $\mathbb{R}^*$   $\Rightarrow f$  continua en  $x > 1$

➤  $f$  continua en  $x = 1$  porque  $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$

★ La función es derivable en el intervalo  $(0,2) \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 1 \\ \frac{-1}{x^2} & \text{si } x > 1 \\ ? & x = 1 \end{cases}$

➤  $y = \frac{3-x^2}{2}$  derivable en  $\mathbb{R}$  (es polinómica)  $\Rightarrow f$  derivable en  $x < 1$

➤  $y = \frac{1}{x}$  derivable en  $\mathbb{R}^*$   $\Rightarrow f$  derivable en  $x > 1$

➤  $f$  derivable en  $x = 1$  porque  $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = -1$

★ El valor o valores que vaticina el teorema del valor medio:  $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{\frac{1-3}{2}-\frac{1-3}{2}}{2-0} = \frac{-1}{2} = \begin{cases} -c & \text{si } x < 1 \\ \frac{-1}{c^2} & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{-1}{2} = -c & \text{si } c < 1 \\ \frac{-1}{2} = \frac{-1}{c^2} & \text{si } c \geq 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} c = \frac{1}{2} & \text{si } c < 1 \\ c = \pm\sqrt{2} & \text{si } c \geq 1 \end{cases} \Rightarrow c = \frac{1}{2} \text{ y } c = \sqrt{2}$$

11.- Calcula aplicando la regla de L'Hôpital:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot \ln x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x}$   
 $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\sin^2 x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin x}{1 - \cos x}$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}$

★  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x} = \frac{0}{0}$  indeterminación L'Hôpital =  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \cdot \ln a - b^x \cdot \ln b}{1} = \ln a - \ln b$   $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x}$

★  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot \ln x) = 0 \cdot \infty \text{ ind} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{1/x} = \frac{\infty}{\infty}$  indet L'Hôp =  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/x}{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0$

Las indeterminaciones  $0 \cdot \infty$  se transforman en  $\frac{\infty}{\infty}$  o  $\frac{0}{0}$  y se pueden resolver por L'Hôpital

★  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^x) = [0^0 \text{ indeterminación}] = L \Rightarrow \ln L = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \cdot \ln x) = 0 \Rightarrow L = e^0 = 1$

★  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x} = [\infty^0 \text{ ind}] = L \Rightarrow \ln L = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{x} \cdot \ln x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \text{ ind L'Hôpital} \right] =$   
 $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{1} = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow L = e^0 = 1$

★  $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}} = [1^\infty \text{ indeterminación}] = e^{\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \cdot \frac{1}{1-x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} -1} = e^{-1} = \frac{1}{e}$

Se ha aplicado la fórmula:  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = [1^\infty \text{ ind}] = e^{\lim_{x \rightarrow 1} [(f(x)-1) \cdot g(x)]}$

→ Otra forma de hacerlo es:

$\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}} = L \Rightarrow \ln L = \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1-x} \cdot \ln x \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{1-x} = \left[ \frac{0}{0} \text{ indeterminación L'Hôpital} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1/x}{-1} = -1$

Así:  $\ln L = -1 \Rightarrow L = e^{-1} = \frac{1}{e}$

★  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) = [\infty - \infty \text{ ind. L'Hôpital}] = \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x-1 - \ln x}{(x-1)\ln x} \right) = \left[ \frac{0}{0} \text{ ind. L'Hôpital} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\ln x + \frac{x-1}{x}} =$   
 $= \left[ \frac{0}{0} \text{ ind. L'Hôpital} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} + \frac{x-(x-1)}{x^2}} = \frac{1}{2}$

Las indeterminaciones  $\infty - \infty$  se transforman en  $\frac{\infty}{\infty}$  o  $\frac{0}{0}$  y se pueden resolver por L'Hôpital

★  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{\sin^2 x} = \left[ \frac{0}{0} \text{ indeterminación L'Hôpital} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2 \sin x \cdot \cos x} = \left[ \frac{0}{0} \text{ ind. L'Hôpital} \right] =$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2(\cos^2 x - \sin^2 x)} = \frac{0}{2} = 0$

★  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin x}{1 - \cos x} = \left[ \frac{0}{0} \text{ indeterminación L'Hôpital} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x \cdot \cos x}{\sin x} =$   
 $= \left[ \frac{0}{0} \text{ indeterminación L'Hôpital} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + \cos x - x \cdot \sin x}{\cos x} = \frac{2}{1} = 2$

★  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \left[ \frac{0}{0} \text{ indeterminación L'Hôpital} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \left[ \frac{0}{0} \text{ indeterminación L'Hôpital} \right]$   
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \left[ \frac{0}{0} \text{ indeterminación L'Hôpital} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2$

**Ejercicios propuestos**

1.- Determina los extremos absolutos de la función  $f : [0,8] \rightarrow \mathfrak{R}$  definida por  $f(x) = \sqrt[3]{x} - \sqrt{x^2}$

2.- Sea  $f : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$  dada por  $f(x) = |x^2 - 2x - 3|$ .

- A. Estudia si  $f$  cumple las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo  $[2,4]$   
 B. Estudia si  $f$  cumple las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo  $[-1,3]$   
 C. Si  $f$  cumple las hipótesis del teorema de Rolle en alguno de los intervalos de los apartados anteriores, determina el punto correspondiente cuya existencia se afirma en dicho teorema

3.- Demostrar que la ecuación  $x^2 = x \cdot \operatorname{sen} x + \operatorname{cos} x$  tiene exactamente dos soluciones en  $[-\pi, \pi]$

4.- Demuestra que la siguiente función nunca tiene dos raíces en el intervalo cerrado  $[0,1]$  :

$$f_m(x) = x^3 - 3x + m$$

- a) Si "n" es par entonces el polinomio p no puede tener más de dos raíces reales .  
 b) Si "n" es impar entonces el polinomio p no puede tener más de tres raíces reales .

6.- Demuestra que la ecuación  $\ln x - \frac{x}{2} = -3$  tiene al menos una solución real

7.- a) Sea  $f : [-1,2] \rightarrow \mathfrak{R}$  la función definida por  $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + x + 10$

Determina todos los puntos de la gráfica de  $f$  en los que la recta tangente a la gráfica de  $f$  es paralela a la recta que pasa por los puntos  $A(-1, f(-1))$  y  $B(2, f(2))$ . ¿Cuál de ellos es el predicho por el T<sup>a</sup> de Lagrange en el intervalo  $[-1,2]$  ?

b) Considera  $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathfrak{R}$  definida por  $f(x) = 2x + \operatorname{sen} x$ . Comprueba si  $f$  cumple las hipótesis del T<sup>a</sup> y, en caso afirmativo, encuentra dichos valores.

8.- Sea la función:  $f(x) = \begin{cases} \frac{(a+1)x}{1-x} & x < 0 \\ \frac{2x}{1+ax} & x \geq 0 \end{cases}$  Sol : a=1

Calcular " a " para que ésta función cumpla las hipótesis del T<sup>a</sup> del valor medio de Lagrange en el intervalo  $[-1, \frac{1}{2}]$  ( Sol : valor vaticinado  $c_1 = 1 - \frac{3}{\sqrt{5}}$  ,  $c_2 = -1 + \frac{3}{\sqrt{5}}$  )

9.- Sea la función  $f(x) = \begin{cases} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$ .

- a) ¿ Para que valor de " a " será continua en  $x = 0$  ?  
 b) ¿ Se puede aplicar el T<sup>a</sup> de Lagrange en  $[-1,1]$  ?

10.- ¿Se puede aplicar el teorema de Rolle a la función  $f(x) = \frac{x^2 - 4x}{x - 2}$  en el intervalo  $[0, 4]$ ? Razónalo

11.- Calcula  $a$  y  $b$  para que  $f(x) = \begin{cases} ax - 3 & \text{si } x < 4 \\ -x^2 + 10x - b & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$  cumpla las hipótesis del teorema del

valor medio en el intervalo  $[2, 6]$ . ¿Dónde cumple la tesis? (Solución:  $a = 2$ ;  $b = 19$ ;  $c = \frac{9}{2}$ )

12.- Se considera la función  $f(x) = \begin{cases} x^2 + nx & \text{si } x < -2 \\ x^3 + m & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$

- a. Determina  $m$  y  $n$  para que se cumplan las hipótesis del teorema del valor medio en  $[-4, 2]$   
 b. Halla los puntos del intervalo cuya existencia garantiza el teorema.

13. a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}$  (Solución 1/6) b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{arctg} x - x}{2x - \operatorname{arcsen} x}$  (Solución: 1) c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ x^2 \cdot \left( 1 - \cos \frac{1}{x} \right) \right]$  (Solución:  $\frac{1}{2}$ )