

1. Determina los valores de los parámetros a y b de modo que la función  $f(x)$  sea continua en su dominio.

$$f(x) = \begin{cases} x + a, & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}}{3x}, & \text{si } 0 < x < 1 \\ bx, & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

2. El número de personas que utilizan las instalaciones de una piscina de verano viene expresado por la función  $f(t) = 10t^3 - 120t^2 + 450t$ , donde t representa el tiempo transcurrido desde la apertura de la piscina, 12 de la mañana (instante  $t = 0$ ) hasta el cierre de la piscina que se produce a las 19 horas de la tarde.

(a) Determina el dominio en el que estudiamos la función. ¿Cuántas personas quedan a la hora del cierre?

(b) ¿A qué hora el número de personas que utilizan la piscina es mayor? ¿Cuántas personas hay en ese momento?

3. Dada la función  $f(x) = \frac{4x^2+x+3}{3+4x^2}$ , determina:

(a) Dominio y asíntotas.

(b) Intervalos de concavidad y puntos de inflexión.

4. (a) Determina los parámetros a y b para que la recta tangente a la gráfica de  $f(x) = ax^2 - b$  en el punto (1, 5) sea la recta de ecuación  $y = 3x + 2$ .

(b) Calcula las funciones derivadas de:

$$f(x) = e^{1-x} + \ln(x+2) \quad \text{y} \quad g(x) = \sqrt{\log_5\left(\frac{2x-1}{3x^2}\right)}$$

## SOLUCIÓN

**1.** Tendremos que exigir que la función sea continua en  $x = 0$  y  $x = 1$ , puesto que en el resto de los puntos ya lo es.

$$f \text{ continua en } x = 0 \stackrel{DEF}{\Leftrightarrow} f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(0) = a \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + a) = a \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{3(\sqrt{x+1} + \sqrt{1-x})} = \frac{1}{3} \end{array} \right\} \stackrel{DEF}{\Leftrightarrow} a = \frac{1}{3}$$

$$f \text{ continua en } x = 1 \stackrel{DEF}{\Leftrightarrow} f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(1) = b \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} bx = b \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{1-x}}{3x} = \frac{\sqrt{2}}{3} \end{array} \right\} \stackrel{DEF}{\Leftrightarrow} b = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

**2. (a)**  $f(7) = 10 \cdot 7^3 - 120 \cdot 7^2 + 450 \cdot 7 = 700$  personas

**(b)**  $f'(x) = 30t^2 - 240t + 450$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 30t^2 - 240t + 450 = 0 \Rightarrow t^2 - 8t + 15 = 0 \Rightarrow t = 3, t = 5$$

Intervalos	$0 < x < 3$	$3 < x < 5$	$5 < x < 7$
Signo de $f'$	positivo	negativo	positivo
Función $f$	creciente	decreciente	creciente

La función presenta en  $x = 3$  un máximo relativo, siendo  $f(3) = 540$  personas. Pero a la hora del cierre,  $x = 7$ , la función alcanza un máximo absoluto de  $f(7) = 700$  personas. Por lo tanto, a la hora del cierre, 19 horas, hay un mayor número de personas que utilizan la piscina.

**3. (a)** Dominio  $f = \mathbb{R}$

No tiene asíntotas verticales.

La recta  $y = 1$  es una asíntota horizontal ya que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + x + 3}{3 + 4x^2} = 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 + x + 3}{3 + 4x^2}$$

No tiene asíntotas oblicuas pues:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

**(b)**  $f'(x) = \frac{3-4x^2}{(3+4x^2)^2}$        $f''(x) = \frac{32x^3-72x}{(3+4x^2)^3}$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow x(32x^2 - 72) = 0 \Rightarrow x = 0, x = \frac{3}{2}, x = \frac{-3}{2}$$

Intervalo	$x < -1.5$	$-1.5 < x < 0$	$0 < x < 1.5$	$x > 1.5$
Signo de $f''(x)$	negativa	positiva	negativa	positiva
Curvatura	Cóncava hacia abajo	Cóncava hacia arriba	Cóncava hacia abajo	Cóncava hacia arriba

Los puntos de abscisas  $x = 0$ ,  $x = -1.5$ ,  $x = 1.5$  son de inflexión.