

**Ejercicio 1.**

Extrae factor común para escribir como un producto las siguientes expresiones:

a)  $a^2 - a + ab - b$

b)  $x^3 + 2x^2y - xy^2 - 2y^3$

Solución:

No aparece un mismo factor común en todos los sumandos por lo que la extracción la haremos de dos veces.

a)  $a^2 - a + ab - b = a(a-1) + b(a-1) = (a-1)(a+b)$

b)  $x^3 + 2x^2y - xy^2 - 2y^3 = x^2(x+2y) - y^2(x+2y) = (x+2y)(x^2 - y^2) = (x+2y)(x+y)(x-y)$

**Ejercicio 2.**

Realiza las operaciones y simplifica el resultado:

a)  $\frac{2x^2 - 3x}{2x^3 - 5x^2 - x + 6} : \frac{x}{x^2 - 1}$

b)  $\frac{4}{x} - \frac{3x+2}{x^2+2x} - \frac{x}{x+2}$

Solución:

a)  $\frac{2x^2 - 3x}{2x^3 - 5x^2 - x + 6} : \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{(2x^2 - 3x)(x^2 - 1)}{x(2x^3 - 5x^2 - x + 6)} = \frac{x(2x-3)(x+1)(x-1)}{x(x+1)(x-2)(2x-3)} = \frac{\cancel{x}(2x-3)\cancel{(x+1)}(x-1)}{\cancel{x}\cancel{(x+1)}(x-2)\cancel{(2x-3)}} = \frac{x-1}{x-2}$

Factorizamos  $2x^3 - 5x^2 - x + 6$ . Si nos encontramos con dificultades, nos limitamos a probar si es divisible entre  $(x+1)$ ,  $(x-1)$  o  $(2x-3)$ , que son los factores que nos permitirían simplificar la fracción algebraica.

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -5 & -1 & 6 \\ -1 & & -2 & 7 & -6 \\ \hline & 2 & -7 & 6 & 0 \\ 2 & & 4 & -6 & \\ \hline & 2 & -3 & 0 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad 2x^3 - 5x^2 - x + 6 = (x+1)(x-2)(2x-3)$$

$$b) \frac{4}{x} - \frac{3x+2}{x^2+2x} - \frac{x}{x+2} = \frac{4(x+2)}{x(x+2)} - \frac{3x+2}{x(x+2)} - \frac{x^2}{x(x+2)} = \frac{4x+8-3x-2-x^2}{x(x+2)} = \frac{-x^2+x+6}{x(x+2)} = \frac{(x+2)(-x+3)}{x(x+2)} = \frac{3-x}{x}$$

$$mcm(x, x+2, x^2+2x) = x^2+2x \quad -x^2+x+6=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{c|ccc} -1 & 1 & 6 \\ -2 & 2 & -6 \\ \hline -1 & 3 & 0 \end{array} \quad (x+2)(-x+3)$$

### Ejercicio 3.

Dada una cuerda, la cortamos en dos trozos iguales de longitud  $x$  cm. Con uno de los trozos construimos un cuadrado y, con el otro, un círculo. Comprueba cuál de las dos figuras tiene mayor área.

Solución:

Tenemos  $x$  cm para construir un cuadrado y otros  $x$  cm para un círculo.

$$\text{Perímetro del cuadrado} = x \Rightarrow \text{lado del cuadrado} = \frac{x}{4} \Rightarrow A_{\text{cuadrado}} = \left(\frac{x}{4}\right)^2 \Rightarrow A_{\text{cuadrado}} = \frac{x^2}{16} \text{ cm}^2$$

$$\text{Perímetro del círculo} = x \Rightarrow 2\pi r = x \Rightarrow r = \frac{x}{2\pi} \Rightarrow A_{\text{círculo}} = \pi r^2 = \pi \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 = \frac{\pi x^2}{4\pi^2} \Rightarrow A_{\text{círculo}} = \frac{x^2}{4\pi} \text{ cm}^2$$

$$\text{Como } 4\pi < 16 \Rightarrow \frac{x^2}{4\pi} > \frac{x^2}{16} \Rightarrow \text{para el mismo perímetro } A_{\text{círculo}} > A_{\text{cuadrado}}$$

### Ejercicio 4.

Sean los polinomios:  $p(x) = 6x^4 + 11x^3 + 3x^2 - 3x - 1$  y  $q(x) = x^5 + 2x^4 + 2x^3 - 3x - 2$ . Se pide:

- Encuentra las raíces del polinomio  $p(x)$ .
- Calcula la descomposición en factores primos del polinomio  $q(x)$ .
- Calcula el  $MCD[p(x), q(x)]$ .

Solución:

$$p(x) = 6x^4 + 11x^3 + 3x^2 - 3x - 1 \Rightarrow \left| \begin{array}{c|ccccc} & 6 & 11 & 3 & -3 & -1 \\ -1 & \hline & -6 & -5 & 2 & 1 \\ & \hline & 6 & 5 & -2 & -1 & 0 \\ -1 & \hline & -6 & 1 & 1 & & \\ & \hline & 6 & -1 & -1 & 0 & \end{array} \right.$$

Expresiones algebraicas.

$$6x^4 + 11x^3 + 3x^2 - 3x - 1 = (x+1)^2 (6x^2 - x - 1)$$

Veamos si el polinomio  $6x^2 - x - 1$  es primo. Para ello, resolvemos la ecuación  $6x^2 - x - 1 = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-1)}}{2 \cdot 6} = \frac{1 \pm 5}{12} = \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow 6x^2 - x - 1 = 6 \left( x - \frac{1}{2} \right) \left( x + \frac{1}{3} \right) = (2x-1)(3x+1)$$

Por tanto  $p(x) = (x+1)^2 (2x-1)(3x+1)$  y sus raíces son  $x = -1$ ,  $x = \frac{1}{2}$ ,  $x = -\frac{1}{3}$

Factoricemos  $q(x) = x^5 + 2x^4 + 2x^3 - 3x - 2$

$$q(x) = (x-1)(x+1)^2 (x^2 + x + 2)$$

$x^2 + x + 2$  es primo puesto que no tiene raíces

$$\begin{array}{r|rrrrrr} 1 & 1 & 2 & 2 & 0 & -3 & -2 \\ & & 1 & 3 & 5 & 5 & 2 \\ \hline -1 & 1 & 3 & 5 & 5 & 2 & 0 \\ & & -1 & -2 & -3 & -2 & \\ \hline -1 & 1 & 2 & 3 & 2 & 0 & \\ & & -1 & -1 & -2 & & \\ \hline & 1 & 1 & 2 & 0 & & \end{array}$$

$$MCD[p(x), q(x)] = (x+1)^2$$

**Ejercicio 5.**

Dado el polinomio  $p(x) = x^4 + 4x^3 + ax^2 + bx + c$ , encuentra los valores de  $a$ ,  $b$  y  $c$ , sabiendo que es divisible entre  $x + 2$ , que obtenemos el mismo resto al dividirlo entre  $x - 1$  y  $x + 3$  y, además,  $x = 0$  es una de sus raíces.

Solución:

$$p(x) = x^4 + 4x^3 + ax^2 + bx + c$$

$$p(x) \text{ es divisible entre } (x+2) \Rightarrow p(-2) = 0 \Rightarrow (-2)^4 + 4(-2)^3 + a(-2)^2 + b(-2) + c = 0 \Rightarrow 4a - 2b + c = 16$$

$$\text{Igual resto al dividir } p(x) \text{ entre } (x-1) \text{ y } (x+3) \Rightarrow p(1) = p(-3) \Rightarrow 5 + a + b + c = -27 + 9a - 3b + c \Rightarrow 8a - 4b = 32$$

$$x = 0 \text{ es raíz de } p(x) \Rightarrow p(0) = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$\begin{cases} 4a - 2b + c = 16 \\ 8a - 4b = 32 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a - 2b = 16 \\ 8a - 4b = 32 \end{cases} \Rightarrow \text{las dos ecuaciones son iguales} \Rightarrow 2a - b = 8 \Rightarrow b = 2a - 8 \text{ y } c = 0$$

Quiere decir que hay infinitos polinomios que cumplen esas condiciones, uno para cada valor de  $a$ .

Por ejemplo, si  $a = 2 \Rightarrow b = -4$  y el polinomio será  $p(x) = x^4 + 4x^3 + 2x^2 - 4x$

**Ejercicio 6.**

Simplifica, si es posible, la fracción  $\frac{x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 2x - 3}{x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 3}$

Solución:

Descomponemos el polinomio  $x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 2x - 3$

$$\begin{array}{r|rrrrr} 1 & 1 & 2 & 2 & -2 & -3 \\ & & 1 & 3 & 5 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 3 & 5 & 3 & 0 \\ -1 & & -1 & -2 & -3 & \\ \hline & 1 & 2 & 3 & 0 & \end{array}$$

$x^2 + 2x + 3$  es un polinomio primo

$$x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 2x - 3 = (x-1)(x+1)(x^2 + 2x + 3)$$

Ahora, para poder simplificar la fracción,  $x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 3$  debe ser divisible por  $(x-1)$ ,  $(x+1)$  o  $(x^2 + 2x + 3)$ .

Probamos por  $(x-1)$  y  $(x+1)$  y no es divisible, nos queda probar por  $(x^2 + 2x + 3)$

$$\begin{array}{r} x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 3 \quad | \quad x^2 + 2x + 3 \\ -x^4 - 2x^3 - 3x^2 \quad \quad \quad x^2 + 1 \\ \hline \quad \quad \quad x^2 + 2x + 3 \\ \quad \quad \quad -x^2 - 2x - 3 \\ \hline \quad \quad \quad \quad \quad \quad 0 \end{array}$$

$$x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 3 = (x^2 + 2x + 3)(x^2 + 1)$$

$$\frac{x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 2x - 3}{x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 2x + 3} = \frac{(x-1)(x+1)(x^2 + 2x + 3)}{(x^2 + 2x + 3)(x^2 + 1)} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2 + 1} = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$