

## Descomposición en fracciones simples

Dados  $f$  y  $g$  polinomios consideramos su cociente  $\frac{f}{g}$  que llamamos *función racional*. Queremos descomponerla en *fracciones simples* que sabemos integrar.

Una *fracción simple* es una expresión de la forma

$$\frac{A}{(x-a)^n} \quad \text{o} \quad \frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

donde en el segundo caso se cumple  $b^2 - 4c < 0$ .

Si  $\text{gr } f \geq \text{gr } g$ , entonces podemos **simplificar el cociente**  $\frac{f}{g}$  haciendo la división de  $f$  por  $g$ , quedándonos entonces

$$\frac{f(x)}{g(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{g(x)}$$

donde  $Q$  es un polinomio y  $R$  es un polinomio de grado menor que  $g$ . Por lo tanto reducimos la descomposición en fracciones simples al caso  $\frac{f}{g}$  donde  $\text{gr } f < \text{gr } g$ . A partir de ahora suponemos  $\text{gr } f < \text{gr } g$ .

Admitiremos que toda función racional  $\frac{f}{g}$  con  $\text{gr } f < \text{gr } g$  admite una única descomposición en suma de fracciones simples.

Para hallar la descomposición, **factorizamos el denominador** dejándolo en su forma más reducida. Para seguir con la descomposición tenemos que distinguir en casos:

**Primer caso:** *El denominador es producto de funciones lineales<sup>1</sup> diferentes*. Por ejemplo, si es producto de tres funciones lineales diferentes  $x - x_1, x - x_2, x - x_3$  donde  $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$  son constantes, debemos hacer

$$\frac{f(x)}{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} + \frac{C}{x-x_3}$$

donde  $A, B, C \in \mathbb{R}$  son constantes que debemos determinar. Para determinarlas, hacemos denominador común en la expresión de la derecha, y por igualdad de polinomios nos queda un sistema de ecuaciones lineales. En este caso concreto queda un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas ( $A, B$  y  $C$ ). Resolviendo el sistema hallamos  $A, B$  y  $C$  y la expresión en fracciones simples queda lista. Sabemos integrar los sumandos mediante logaritmos. Un ejemplo:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + 3x + 1}{(x-1)(x+1)(x+2)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2} \\ &= \frac{(A+B+C)x^2 + (3A+B)x + 2A - 2B - C}{(x-1)(x+1)(x+2)} \end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Una función lineal es un polinomio de grado 1.

Dado que los numeradores son iguales, es una igualdad entre polinomios  $x^2 + 3x + 1 = (A + B + C)x^2 + (3A + B)x + 2A - 2B - C$ . Por lo tanto los coeficientes de mismo grado deben ser iguales. Resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} A + B + C = 1 \\ 3A + B = 3 \\ 2A - 2B - C = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = \frac{5}{6} \\ B = \frac{1}{2} \\ C = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Por lo tanto

$$\frac{x^2 + 3x + 1}{(x - 1)(x + 1)(x + 2)} = \frac{5}{6(x - 1)} + \frac{1}{2(x + 1)} - \frac{1}{3(x + 2)}$$

y entonces el cálculo de la integral queda

$$\int \frac{x^2 + 3x + 1}{(x - 1)(x + 1)(x + 2)} dx = \frac{5}{6} \log |x - 1| + \frac{1}{2} \log |x + 1| - \frac{1}{3} \log |x + 2|$$

**Segundo caso:** *El denominador es producto de funciones lineales al menos una de las cuales se repite.* Por ejemplo, si es producto de dos iguales con una tercera, debemos hacer:

$$\frac{f(x)}{(x - x_1)^2(x - x_2)} = \frac{A}{x - x_1} + \frac{B}{(x - x_1)^2} + \frac{C}{x - x_2}$$

Análogamente al caso anterior, hacemos denominador común en la expresión de la derecha y por igualdad de polinomios encontramos  $A$ ,  $B$  y  $C$  y la expresión en fracciones simples queda lista. Sabemos integrar los sumandos mediante logaritmos y la expresión  $\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1}$  para  $p \neq -1$ .

**Tercer caso:** *El denominador es producto de funciones lineales y al menos una función cuadrática<sup>2</sup> ninguna de las cuales se repite.* Se procede similarmente al primer caso, sólo que en los numeradores de los factores cuadráticos tenemos que poner una función lineal en vez de una constante. Por ejemplo:

$$\frac{f(x)}{(x - 1)(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + x + 2}$$

donde  $A, B, C, D \in \mathbb{R}$  son constantes que debemos determinar. Para determinarlas, hacemos denominador común en la expresión de la derecha, y por igualdad de polinomios nos queda un sistema de ecuaciones lineales. En este caso concreto queda un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas ( $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$ ). Resolviendo el sistema hallamos  $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$ , y la expresión en fracciones simples queda lista. Puede haber una complicación para hallar las integrales de los miembros cuyo numerador tiene una función lineal. A veces conviene *completar el cuadrado* en el

---

<sup>2</sup>Una función cuadrática es un polinomio de grado 2.

denominador. Un ejemplo de cálculo de integrales:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+3}{x^2+x+1} &= \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} + \int \frac{2}{x^2+x+1} \\ &= \log(x^2+x+1) + 2 \int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} \\ &= \log(x^2+x+1) + \frac{4}{\sqrt{3}} \arctan\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) \end{aligned}$$

La primera igualdad es una astucia que resulta de observar que el numerador es *casi* la derivada del denominador, por lo tanto partimos en dos integrales, y en la primera efectivamente el numerador es la derivada del denominador. En el segundo término completamos el cuadrado para llevar el integrando a la forma  $\frac{1}{u^2+a^2}$ ; en este caso  $u = x + \frac{1}{2}$  y  $a = \sqrt{\frac{3}{4}}$ . Finalmente,  $\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a}$  via la sustitución  $t = \frac{u}{a}$ .

**Cuarto caso:** *El denominador es producto de funciones lineales y al menos una función cuadrática, y al menos uno de los factores se repite.* Se procede similarmente al segundo caso, sólo que en los numeradores de los factores cuadráticos tenemos que poner una función lineal en vez de una constante. Por ejemplo:

$$\frac{f(x)}{(x-1)^2(x^2+2)^3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+2} + \frac{Ex+F}{(x^2+2)^2} + \frac{Gx+H}{(x^2+2)^3}$$

donde  $A, B, C, D, E, F, G, H \in \mathbb{R}$  son constantes que debemos determinar. Para determinarlas, hacemos denominador común en la expresión de la derecha, y por igualdad de polinomios nos queda un sistema de ecuaciones lineales. En este caso concreto queda un sistema de ocho ecuaciones con ocho incógnitas. Resolviendo el sistema hallamos las incógnitas, y la expresión en fracciones simples queda lista. Un ejemplo de descomposición:

$$\frac{2x^6 - x^5 + x^4 + 2x^2 - 1}{(x-1)^2(x^2+2)^3} = \frac{1}{3(x-1)} + \frac{1}{9(x-1)^2} + \frac{14-3x}{9(x^2+2)} + \frac{16x-41}{9(x^2+2)^2} + \frac{11-10x}{3(x^2+2)^3}$$

Esto es,  $A = \frac{1}{3}, B = \frac{1}{9}, C = \frac{14}{9}, D = \frac{-3}{9}, E = \frac{16}{9}, F = \frac{-41}{9}, G = \frac{11}{3}, H = \frac{-10}{3}$ .