

Halla la integral indefinida

$$\int \frac{dx}{x^2 + x - 6}$$

**Solución:**

Por descomposición en fracciones simples:

$$\frac{1}{x^2 + x - 6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3) + B(x-2)}{(x-2)(x+3)}$$

Luego:

$$1 = A(x+3) + B(x-2)$$

$$\text{si } x = 2: \quad 1 = 5A \Rightarrow A = 1/5$$

$$\text{si } x = -3: \quad 1 = -5B \Rightarrow B = -1/5$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 + x - 6} &= \int \left( \frac{1/5}{x-2} - \frac{1/5}{x+3} \right) dx = \frac{1}{5} \int \frac{1}{x-2} dx - \frac{1}{5} \int \frac{1}{x+3} dx = \\ &= \frac{1}{5} \ln(x-2) - \frac{1}{5} \ln(x+3) + c \end{aligned}$$

---

Calcula  $\int \frac{2}{x^2 - 1} dx$

**Solución:**

Por descomposición en fracciones simples:

$$\frac{2}{x^2 - 1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1) + B(x-1)}{x^2 - 1}$$

Luego:

$$2 = A(x+1) + B(x-1)$$

$$\text{si } x = 1: \quad 2 = 2A \Rightarrow A = 1$$

$$\text{si } x = -1: \quad 2 = -2B \Rightarrow B = -1$$

Con esto:

$$\int \frac{2}{x^2 - 1} dx = \int \frac{1}{x-1} dx - \int \frac{1}{x+1} dx = \ln(x-1) - \ln(x+1) + c$$

---

Calcula:  $\int \frac{1}{1-x^2} dx$

**Solución:**

(Observa que es casi igual que la anterior.)

Descomponiendo en fracciones simples,

$$\int \frac{1}{1-x^2} dx = \int \frac{1/2}{1-x} dx + \int \frac{1/2}{1+x} dx = -\frac{1}{2} L(1-x) + \frac{1}{2} L(1+x) + c$$

---

Calcula:

$$\int \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 - 4} dx$$

**Solución:**

Hacemos la división  $(x^3 + x^2 + 1):(x^2 - 4)$ .

$$\text{Queda: } \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 - 4} = x + 1 + \frac{4x + 5}{x^2 - 4}.$$

Descomponemos en fracciones simples  $\frac{4x + 5}{x^2 - 4}$ .

$$\frac{4x + 5}{x^2 - 4} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 2} = \frac{A(x + 2) + B(x - 2)}{x^2 - 4} \Rightarrow 4x + 5 = A(x + 2) + B(x - 2)$$

Para  $x = 2$ , se tiene:  $13 = 4A \Rightarrow A = 13/4$

Para  $x = -2$ , se tiene:  $-3 = -4B \Rightarrow B = 3/4$

$$\text{Luego, } \frac{4x + 5}{x^2 - 4} = \frac{13/4}{x - 2} + \frac{3/4}{x + 2}$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^3 + x^2 + 1}{x^2 - 4} dx &= \int \left( x + 1 + \frac{13/4}{x - 2} + \frac{3/4}{x + 2} \right) dx = \\ &= \int (x + 1) dx + \frac{13}{4} \int \frac{1}{x - 2} dx + \frac{3}{4} \int \frac{1}{x + 2} dx = \frac{1}{2} x^2 + x + \frac{13}{4} \ln(x - 2) + \frac{3}{4} \ln(x + 2) + k \end{aligned}$$

Calcula:

$$\int \frac{2dx}{x^3 - x}$$

**Solución:**

Puede hacerse por el método de descomposición en fracciones simples.

Como las raíces del denominador de la expresión  $\frac{2}{x^3 - x}$  son 0, -1 y 1, se tendrá:

$$\frac{2}{x^3 - x} = \frac{2}{x(x - 1)(x + 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{x + 1} = \frac{A(x^2 - 1) + Bx(x + 1) + Cx(x - 1)}{x^3 - x}$$

Por tanto:  $2 = A(x^2 - 1) + Bx(x + 1) + Cx(x - 1)$

Si damos los valores 0, 1 y -1 se tendrá:

$$\text{Para } x = 0 \Rightarrow 2 = -A \Rightarrow A = -2$$

$$\text{Para } x = 1 \Rightarrow 2 = 2B \Rightarrow B = 1$$

$$\text{Para } x = -1 \Rightarrow 2 = 2C \Rightarrow C = 1$$

Luego

$$\int \frac{2}{x^3 - x} dx = \int \left( \frac{-2}{x} + \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x + 1} \right) dx = -2 \ln x + \ln(x - 1) + \ln(x + 1) + c$$

Calcula la siguiente integral:  $\int \frac{x}{(x+1)^3} dx$

**Solución:**

Por descomposición en fracciones simples se tiene:

$$\frac{x}{(x+1)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{(x+1)^3} = \frac{A(x+1)^2 + B(x+1) + C}{(x+1)^3}$$

Por tanto,

$$x = A(x+1)^2 + B(x+1) + C = Ax^2 + (2A+B)x + (A+B+C)$$

Identificando coeficientes se tiene el sistema,

$$\begin{cases} A = 0 \\ 2A + B = 1 \\ A + B + C = 0 \end{cases} \Rightarrow A = 0, B = 1, C = -1$$

Luego  $\frac{x}{(x+1)^3} = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^3}$ , de donde

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{(x+1)^3} dx &= \int \left( \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^3} \right) dx = \int \frac{1}{(x+1)^2} dx - \int \frac{1}{(x+1)^3} dx = \\ &= -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+1)^2} + c \end{aligned}$$

Las dos últimas integrales son inmediatas, pues  $\int f'(x)(f(x))^n dx = \frac{(f(x))^{n+1}}{n+1}$ . Ahora basta

con escribir  $\int \frac{1}{(x+1)^2} dx - \int \frac{1}{(x+1)^3} dx = \int (x+1)^{-2} dx - \int (x+1)^{-3} dx$