2. Resuelve las siguientes ecuaciones racionales:

a) $\frac{x+1}{3x-6}-\frac{x+1}{2x+4}=\frac{10-x^2}{6x^2-24}$

- Factorizamos los denominadores: (sacando factor común y utilizando identidades notables)

$3x-6=3(x-2)$

$2x+4=2(x+2)$

$6x^2-24=6(x^2-4)=6(x-2)(x+2)$

La ecuación queda:

$$\frac{x+1}{3(x-2)}-\frac{x+1}{2(x+2)}=\frac{10-x^2}{6(x-2)(x-2)}$$

- Reducimos las fracciones a mínimo común denominador:

$$\frac{2(x+2)(x+1)-3(x-2)(x+1)}{6(x-2)(x+2)}=\frac{10-x^2}{6(x-2)(x+2)}$$

- Eliminamos los denominadores (al ser iguales) y nos queda la ecuación:

$2(x+2)(x+1)-3(x-2)(x+1)=10-x^2$

- Operamos y reducimos términos semejantes:

$2(x^2+x+2x+2)-3(x^2+x-2x-2)=10-x^2 \Rightarrow 2(x^2+3x+2)-3(x^2-x-2)=10-x^2$

$\Rightarrow 2x^2+6x+4-3x^2+3x+6=10-x^2 \Rightarrow 2x^2+6x+4-3x^2+3x+6-10+x^2=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 9x=0$

- Resolvemos la ecuación de primer grado obtenida: $9x=0 \Rightarrow x=0$ "Posible solución"

En las ecuaciones racionales no es necesario (salvo que lo indique el enunciado) hacer todo el desarrollo de la comprobación de las posibles soluciones como ocurre en las ecuaciones radicales.
Sólo debéis aseguraros que no anulan los denominadores de la ecuación porque entonces no son solución ya que no se puede dividir por cero.
En este caso $x=0$ no anulan los denominadores por eso es solución de la ecuación.

Por tanto,

La solución de la ecuación es $x=0$

b) $15-\frac{8}{5-x}=\frac{12}{9-x}+9$

- Reducimos las fracciones a mínimo común denominador:

$$\frac{15(5-x)(9-x)-8(9-x)}{(5-x)(9-x)}=\frac{12(5-x)+9(5-x)(9-x)}{(5-x)(9-x)}$$

- Eliminamos los denominadores (al ser iguales) y nos queda la ecuación:

$15(5-x)(9-x)-8(9-x)=12(5-x)+9(5-x)(9-x)$

- Operamos y reducimos términos semejantes:

$15(45-5x-9x+x^2)-72+8x=60-12x+9(45-5x-9x+x^2)$

$15(x^2-14x+45)-72+8x=60-12x+9(x^2-14x+45)$

$$15x^2-210x+675-72+8x=60-12x+9x^2-126x+405$$
$$15x^2-9x^2-210x+8x+12x+126x+675-72-60-405=0$$
$$6x^2-64x+138=0\xrightarrow{:2}3x^2-32x+69=0$$

- Resolvemos la ecuación de 2º grado obtenida: $3x^2-32x+69=0 \Rightarrow a=3 \quad b=-32 \quad c=69$

$$x=\frac{32\pm\sqrt{(32)^2-4\cdot 3\cdot 69}}{2\cdot 3}=\frac{32\pm\sqrt{1024-828}}{6}=\frac{32\pm\sqrt{196}}{6}=\frac{32\pm 14}{6}=\begin{cases}\frac{46}{6}=\frac{23}{3}\\ \frac{18}{6}=3\end{cases}$$ ”Posibles soluciones”

En las ecuaciones racionales no es necesario (salvo que lo indique el enunciado) hacer todo el desarrollo de la comprobación de las posibles soluciones como ocurre en las ecuaciones radicales.
Sólo debéis aseguraros que no anulan los denominadores de la ecuación porque entonces no son solución ya que no se puede dividir por cero.

En este caso $x=3$ y $x=\frac{23}{3}$ no anulan los denominadores por eso los dos son soluciones de la ecuación.

Por tanto,

Las soluciones de la ecuación son $x=3$ y $x=\frac{23}{3}$

c) $\frac{6x+1}{x^2-4}=\frac{x+1}{x+2}+\frac{x}{x-2}$

- Factorizamos los denominadores:

$$\frac{6x+1}{(x-2)(x+2)}=\frac{x+1}{x+2}+\frac{x}{x-2}$$

- Reducimos las fracciones a mínimo común denominador:

$$\frac{6x+1}{(x-2)(x+2)}=\frac{(x-2)(x+1)+x(x+2)}{(x-2)(x+2)}$$

- Eliminamos los denominadores (al ser iguales) y nos queda la ecuación:

$$6x+1=(x-2)(x+1)+x(x+2)$$

- Operamos y reducimos términos semejantes:

$$6x+1=(x^2+x-2x-2)+x^2+2x \Rightarrow 6x+1=x^2+x-2x-2+x^2+2x \Rightarrow 2x^2-5x-3=0$$

- Resolvemos la ecuación de 2º grado obtenida: $2x^2-5x-3=0 \Rightarrow a=2 \quad b=-5 \quad c=-3$

$$x=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4\cdot 2\cdot(-3)}}{2\cdot 2}=\frac{5\pm\sqrt{25+24}}{4}=\frac{5\pm 7}{4}=\begin{cases}\frac{12}{4}=3\\ \frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}\end{cases}$$ ”Posibles soluciones”

En las ecuaciones racionales no es necesario (salvo que lo indique el enunciado) hacer todo el desarrollo de la comprobación de las posibles soluciones como ocurre en las ecuaciones radicales.

Sólo debéis aseguraros que no anulan los denominadores de la ecuación porque entonces no son solución ya que no se puede dividir por cero.

En este caso $x=3$ y $x=-\frac{1}{2}$ no anulan los denominadores por eso los dos son soluciones de la ecuación.

Por tanto,

Las soluciones de la ecuación son $x=-3$ y $x=-\frac{1}{2}$

d) $\frac{3x^2-2x}{3x+1}+\frac{1}{2x}=x-1$

- Reducimos las fracciones a mínimo común denominador:

$$\frac{2x(3x^2-2x)+1(3x+1)}{(3x+1)2x}=\frac{(3x+1)2x(x-1)}{(3x+1)2x}$$

- Eliminamos los denominadores (al ser iguales) y nos queda la ecuación:

$$2x(3x^2-2x)+1(3x+1)=(3x+1)2x(x-1)$$

- Operamos y reducimos términos semejantes:

$$6x^3-4x^2+3x+1=(6x^2+2x)(x-1)\Rightarrow 6x^3-4x^2+3x+1=6x^3-6x^2+2x^2-2x\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 6x^3-4x^2+3x+1-6x^3+6x^2-2x^2+2x=0\Rightarrow 5x+1=0$$

- Resolvemos la ecuación de primer grado obtenida: $5x+1=0\Rightarrow 5x=-1\Rightarrow x=-\frac{1}{5}$

$x=-\frac{1}{5}$ no anula los denominadores por eso es solución de la ecuación.

Por tanto,

La solución de la ecuación es $x=-\frac{1}{5}$

e) $\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x-3}=\frac{1}{x^2-9}$

- Factorizamos los denominadores:

$$\frac{1}{(x+3)}+\frac{1}{(x-3)}=\frac{1}{(x-3)(x+3)}$$

- Reducimos las fracciones a mínimo común denominador:

$$\frac{1(x-3)+1(x+3)}{(x-3)(x+3)}=\frac{1}{(x-3)(x+3)}$$

- Eliminamos los denominadores (al ser iguales) y nos queda la ecuación:

$$1(x-3)+1(x+3)=1$$

- Operamos y reducimos términos semejantes:

$$x-3+x+3=1\Rightarrow 2x-1=0$$

- Resolvemos la ecuación de primer grado obtenida: $2x-1=0 \Rightarrow 2x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$

$x=\frac{1}{2}$ no anula los denominadores por eso es solución de la ecuación.

Por tanto,

La solución de la ecuación es $x=\frac{1}{2}$

f) $\frac{3x-3}{x-1}+\frac{x^2+2}{x+1}=\frac{7x+1}{x^2-1}$

- Factorizamos los denominadores:

$$\frac{3x-3}{(x-1)}+\frac{x^2+2}{(x+1)}=\frac{7x+1}{(x-1)(x+1)}$$

- Reducimos las fracciones a mínimo común denominador:

$$\frac{(3x-3)(x+1)+(x^2+2)(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{7x+1}{(x-1)(x+1)}$$

- Eliminamos los denominadores (al ser iguales) y nos queda la ecuación:

$$(3x-3)(x+1)+(x^2-x+2x-2)=7x+1$$

- Operamos y reducimos términos semejantes:

$$\Rightarrow 3x^2+3x-3x-3+x^3-x^2+2x-2=7x+1 \Rightarrow x^3+2x^2+2x-5=7x+1 \Rightarrow x^3+2x^2-5x-6=0$$

- Resolvemos la ecuación obtenida: $x^3+2x^2-5x-6=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & +2 & -5 & -6 \\ -1 & & -1 & -1 & +6 \\ \hline & 1 & +1 & -6 & 0 \end{array}$$

$$x^3+2x^2-5x-6=0 \Rightarrow (x+1)(x^2+x-6)=0 \Rightarrow \begin{cases} x+1=0 \Rightarrow x=-1 \text{ (no es solución pues anula al denominador)} \\ x^2+x-6=0 \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{-1\pm 5}{2}=\begin{cases} x=2 \\ x=-3 \end{cases} \end{cases}$$

$x=-3$ y $x=2$ no anulan los denominadores por eso los dos son soluciones de la ecuación.

Por tanto,

Las soluciones de la ecuación son $x=-3$ y $x=2$

g) $\frac{x+2}{x^2+3x+2}-\frac{1}{x^2+2x+1}=\frac{1}{x^3+2x^2+x}$

- Factorizamos los denominadores:

➢ $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$

$x^2+3x+2=0 \Rightarrow a=1 \quad b=3 \quad c=2$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{(3)^2-4\cdot 1\cdot 2}}{2\cdot 1}=\frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{-3\pm 1}{2}=\begin{cases} \frac{-2}{2}=-1 \\ \frac{-4}{2}=-2 \end{cases} \quad \Rightarrow x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$$

➢ $x^2+2x+1=(x+1)^2$ (identidad notable)

➢ $x^3+2x^2+x=x(x^2+2x+1)=x(x+1)^2$ (sacar foactor común e identidad notable)

Luego la ecuación queda:

$$\frac{x+2}{(x+1)(x+2)}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{1}{x(x+1)^2}$$

- Simplificamos la primera fracción:

$$\frac{1}{(x+1)}-\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{1}{x(x+1)^2}$$

- Reducimos las fracciones a mínimo común denominador:

$$\frac{x(x+1)-x}{x(x+1)^2}=\frac{1}{x(x+1)^2}$$

- Eliminamos los denominadores (al ser iguales) y nos queda la ecuación:

$$x(x+1)-x=1$$

- Operamos y reducimos términos semejantes: $\Rightarrow x^2+x-x-1=0 \Rightarrow x^2-1=0$

- Resolvemos la ecuación obtenida:

$$x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\sqrt{1} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \text{ (no es solución porque anula al denominador)} \\ x=1 \end{cases}$$

$x=1$ no anula los denominadores por eso sí es solución de la ecuación.

Por tanto,

La solución de la ecuación es $x=1$

h) $x^2-\dfrac{64}{x^2}=-12$

- Reducimos las fracciones a mínimo común denominador:

$$\frac{x^4-64}{x^2}=\frac{-12x^2}{x^2}$$

- Eliminamos los denominadores (al ser iguales) y nos queda la ecuación:

$$x^4-64=-12x^2$$

- Operamos y reducimos términos semejantes: $\Rightarrow x^4+12x^2-64=0$

- Resolvemos la ecuación obtenida: $x^4+12x^2-64=0$ (bicuadrada)

1) Hacemos el cambio de variable $\underline{x^2=t}$ y la ecuación se convierte en la ecuación de 2º grado:

$t^2+12t-64=0$

2) Resolvemos la ecuación de segundo grado:

$$t^2+12t-64=0 \Leftrightarrow t=\frac{-12\pm\sqrt{144+256}}{2}=\frac{-12\pm 20}{2}=\begin{cases} t=4 \\ t=-16 \end{cases}$$

3) Deshacemos el cambio de variable

- $t=4 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\sqrt{4} \Rightarrow x=\pm 2$
- $t=-16 \Rightarrow x^2=-16 \Rightarrow x=\sqrt{-16} \Rightarrow$ no tiene solución real

$x=-2$ y $x=2$ no anulan los denominadores por eso los dos son soluciones de la ecuación.

Por tanto,

La solución de la ecuación es $x=1$

i) $\dfrac{x-1}{x^3-2x^2+x}+\dfrac{1}{x^2-1}=\dfrac{1}{x^4-x^2}$

- Factorizamos los denominadores:
  - ➢ $x^3-2x^2+x=x(x^2-2x+1)=x(x-1)^2$
  - ➢ $x^2-1=(x-1)(x+1)$
  - ➢ $x^4-x^2=x^2(x^2-1)=x^2(x-1)(x+1)$

La ecuación queda:

$$\frac{x-1}{x(x-1)^2}+\frac{1}{(x-1)(x+1)}=\frac{1}{x^2(x-1)(x+1)}$$

- Simplificamos la primera fracción:

$$\frac{1}{x(x-1)}+\frac{1}{(x-1)(x+1)}=\frac{1}{x^2(x-1)(x+1)}$$

- Reducimos las fracciones a mínimo común denominador:

$$\frac{x(x+1)+x^2}{x^2(x-1)(x+1)}=\frac{1}{x^2(x-1)(x+1)}$$

- Eliminamos los denominadores (al ser iguales) y nos queda la ecuación:

$x(x+1)+x^2=1$

- Operamos y reducimos términos semejantes: $x^2+x+x^2-1=0 \Rightarrow 2x^2+x-1=0$

- Resolvemos la ecuación obtenida: $2x^2+x-1=0$

$$2x^2+x-1=0 \Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\frac{-1\pm 3}{4}=\begin{cases} x=\dfrac{1}{2} \\ x=-1\,(\text{no es solución porque anula los denominadores}) \end{cases}$$

$x=\dfrac{1}{2}$ no anulan los denominadores por eso es solución de la ecuación.

Por tanto,

La solución de la ecuación es $x=\dfrac{1}{2}$

j) $\dfrac{7(x+1)}{3x^2+17x+10}-\dfrac{1}{3x+2}=\dfrac{1}{x^2+5x}$

- Factorizamos los denominadores:

➢ $3x^2+17x+10=(3x+2)(x+5)$

$3x^2+17x+10=0 \Rightarrow a=3 \quad b=17 \quad c=10$

$$x=\frac{-17\pm\sqrt{(17)^2-4\cdot 3\cdot 10}}{2\cdot 3}=\frac{-17\pm\sqrt{289-120}}{6}=\frac{-17\pm 13}{6}=\begin{cases}\frac{-4}{6}=-\frac{2}{3}\\ \frac{-30}{6}=-5\end{cases}$$

$$\Rightarrow 3x^2+17x+10=3\left(x+\frac{2}{3}\right)(x+5)(3x+2)(x+5)$$

- $x^2+5x=x(x+5)$ (sacar factor común "x")

Luego la ecuación queda:

$$\frac{7x+7}{(3x+2)(x+5)}-\frac{1}{(3x+2)}=\frac{1}{x(x+5)}$$

- Reducimos las fracciones a mínimo común denominador:

$$\frac{x(7x+7)-x(x+5)}{x(3x+2)(x+5)}=\frac{3x+2}{x(3x+2)(x+5)}$$

- Eliminamos los denominadores (al ser iguales) y nos queda la ecuación:

$$x(7x+7)-x(x+5)=3x+2$$

- Operamos y reducimos términos semejantes: $\Rightarrow 7x^2+7x-x^2-5x=3x+2\Rightarrow 6x^2-x-2=0$

- Resolvemos la ecuación de 2º grado obtenida: $6x^2-x-2=0\Rightarrow a=6\quad b=-1\quad c=-2$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 6\cdot(-2)}}{2\cdot 6}=\frac{1\pm\sqrt{1+48}}{12}=\frac{1\pm 7}{12}=\begin{cases}\frac{8}{12}=\frac{2}{3}\\ \frac{-6}{12}=-\frac{1}{2}\end{cases}$$ ”Posibles soluciones”

$x=\frac{2}{3}$ y $x=-\frac{1}{2}$ no anulan los denominadores por eso los dos son soluciones de la ecuación.

Por tanto,

Las soluciones de la ecuación son $x=\frac{2}{3}$ **y** $x=-\frac{1}{2}$