

# Matrices elementales.

## Forma normal de Hermite

### 1. GENERALIDADES SOBRE MATRICES.

Una matriz de dimensión  $m \times n$  puede ser considerada como una lista formada por un conjunto de listas de la misma longitud siendo  $m$  el número de listas que la componen y  $n$  la longitud de las mismas. Por ejemplo, la lista:

```
In[]:= a={{1,2,3},{2,3,4},{3,4,6}};
```

puede considerarse que representa a la tabla o matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Si se desea que Mathematica la represente en forma tabular, escribiremos:

**MatrixForm[a]**

La orden **Dimensions[nombre]** genera una lista formada por un único número igual a su longitud, si “nombre” es una matriz fila o columna, o por dos números en caso contrario que representan el número de filas y el de columnas, respectivamente.

```
In[]:= v={-1,2,3};
```

```
In[]:= Dimensions[v]
```

```
Out[] = {3}
```

```
In[]:= Dimensions[a]
```

```
Out[] = {3,3}
```

Si se desea seleccionar una fila de una matriz, bastará con escribir el nombre de la misma y, entre dobles corchetes, la posición que ocupa dicho elemento. La  $i$ -ésima

componente de  $v$  se selecciona mediante  $v[[i]]$ , y el elemento que ocupa la posición  $(i, j)$  de la matriz  $a$  mediante  $a[[i, j]]$ .

Las órdenes

```
In[]:= m=Dimensions[a][[1]]
```

```
In[]:= n=Dimensions[a][[2]]
```

asignan a  $m$  y  $n$  el número de filas, 3 y el de columnas, 3 de la lista  $a$ , pues  $\text{Dimensions}[a]$  es la lista formada por estos dos valores.

Las siguientes funciones permiten construir algunos tipos especiales de matrices:

a) **DiagonalMatrix[{x,y,z,...}]**

Genera la matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal son sus argumentos.

```
In[]:= DiagonalMatrix[{1,-2,4}]
```

```
Out[]= {{1, 0, 0}, {0, -2, 0}, {0, 0, 4}}
```

b) **IdentityMatrix[n]**

Matriz identidad de orden  $n$ .

```
In[]:= IdentityMatrix[4]
```

```
Out[]= {{1, 0, 0, 0}, {0, 1, 0, 0}, {0, 0, 1, 0},
        {0, 0, 0, 1}}
```

## 2. OPERACIONES CON MATRICES.

La suma y el producto de matrices con las correspondientes condiciones sobre sus dimensiones, se expresan mediante los operadores "+" y "." respectivamente. Consideremos las siguientes matrices:

```
In[]:= a=Table[1/(i+j),{i,5},{j,5}];
       b={{2,3,4,5,6},{3,4,5,6,7},{4,5,6,7,8},{5,6,7,8,9},{6,7,8,9,10}};
       MatrixForm[a]
       MatrixForm[b]
```

```
Out[]=
```

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

Algunos ejemplos de operaciones son:

a) `In[]:= a+b//MatrixForm`

$$Out[] = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & \frac{10}{3} & \frac{17}{4} & \frac{26}{5} & \frac{37}{6} \\ \frac{10}{3} & \frac{17}{4} & \frac{26}{5} & \frac{37}{6} & \frac{50}{7} \\ \frac{17}{4} & \frac{26}{5} & \frac{37}{6} & \frac{50}{7} & \frac{65}{8} \\ \frac{26}{5} & \frac{37}{6} & \frac{50}{7} & \frac{65}{8} & \frac{82}{9} \\ \frac{37}{6} & \frac{50}{7} & \frac{65}{8} & \frac{82}{9} & \frac{101}{10} \end{pmatrix}$$

b) `In[]:= a b`

$$Out[] = \{\{1, 1, 1, 1, 1\}, \{1, 1, 1, 1, 1\}, \{1, 1, 1, 1, 1\}, \{1, 1, 1, 1, 1\}, \{1, 1, 1, 1, 1\}\}$$

c) `In[]:= a*b`

$$Out[] = \{\{1, 1, 1, 1, 1\}, \{1, 1, 1, 1, 1\}, \{1, 1, 1, 1, 1\}, \{1, 1, 1, 1, 1\}, \{1, 1, 1, 1, 1\}\}$$

d) `In[]:= a.b//MatrixForm`

$$Out[] = \begin{pmatrix} 5 & \frac{129}{20} & \frac{79}{10} & \frac{187}{20} & \frac{54}{5} \\ \frac{547}{140} & 5 & \frac{853}{140} & \frac{503}{70} & \frac{1159}{140} \\ \frac{1357}{420} & \frac{3457}{840} & 5 & \frac{4943}{840} & \frac{2843}{420} \\ \frac{2321}{840} & \frac{4421}{1260} & \frac{10721}{2520} & 5 & \frac{14479}{2520} \\ \frac{1523}{630} & \frac{2573}{840} & \frac{4673}{1260} & \frac{10973}{2520} & 5 \end{pmatrix}$$

Las potencias de una matriz las calcularemos a través de la función `MatrixPower[matriz, n]`, quien realiza la potencia n-ésima de la matriz "matriz".

`In[]:= M={{2,3,4},{3,4,5},{4,5,6}}`  
`MatrixPower[M,4]`

$$Out[] = \{\{4493, 5916, 7338\}, \{5916, 7788, 9660\}, \{7338, 9660, 11982\}\}$$

sin embargo de la forma siguiente no calculamos las potencias

`In[]:= M^4`

`Out[] = {{16, 81, 256}, {81, 256, 625}, {256, 625, 1296}}`

El producto de un escalar por un vector o una matriz se expresa mediante el operador "\*" o un espacio:

a) `In[] := 0 a`

`Out[] = {{0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0}}`

b) `In[] := 0*a`

`Out[] = {{0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0}, {0, 0, 0, 0, 0}}`

La transpuesta de una matriz la calculamos a partir de la función `Transpose[matriz]` quien nos devuelve la transpuesta de "matriz".

`In[] := M2={{1,0},{3,2},{4,-1}};  
Transpose[M2]`

`Out[] = {{1, 3, 4}, {0, 2, -1}}`

### 3. MATRICES ELEMENTALES EN MATHEMATICA.

Vamos a definir las matrices elementales en Mathematica. Recordemos que una matriz elemental es la matriz que se obtiene al realizar una y solo una transformación elemental por filas sobre la matriz identidad. Como sabemos hay tres tipos, cada uno de ellos correspondientes a una de las transformaciones elementales.

Tipo I: Se obtiene intercambiando en la matriz identidad de orden  $n$ , las filas  $i$  y  $j$ , en Mathematica tal transformación la denotaremos por `el1[i, j, n]`:

`In[] := el1[i_,j_,n_] :=Module[{B},  
B=IdentityMatrix[n];  
B[[i, i]] = 0;  
B[[j, j]] = 0;  
B[[i, j]] = 1;  
B[[j, i]] = B[[i, j]];  
B]`

`In[] := el1[3, 4, 5]//MatrixForm`

`Out[] =`

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Tipo II: Se obtiene multiplicando la fila  $i$  de la matriz identidad de orden  $n$  por  $k$  y en Mathematica la vamos a denotar mediante `el2[i, k, n]`:

```
In[]: =      el2[i_, k_, n_] :=Module[{B},
             B =IdentityMatrix[n];
             B[[i, i]] = k;
             B]
```

```
In[]: =      el2[2, -4, 3]//MatrixForm
```

```
Out[] =      
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```

Tipo III: Se obtiene sumando a la fila  $i$  de la matriz identidad de orden  $n$ , la fila  $j$  previamente multiplicada por  $k$ , en Mathematica la vamos a denotar por `el3[i, j, k, n]`:

```
In[]: =      el3[i_, j_, k_, n_] :=Module[{B},
             B =IdentityMatrix[n];
             B[[i, j]] = k;
             B]
```

```
In[]: =      el3[3, 1, 5, 4]//MatrixForm
```

```
Out[] =      
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

```

En lo sucesivo siempre que queramos trabajar con matrices elementales en el Mathematica hemos de ejecutar previamente la definición de las matrices elementales, pues Mathematica no las tiene predeterminadas.

Por último, vamos a comprobar como dada una matriz  $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$  y dada  $E$  (resp.  $F$ ) matriz elemental de orden  $m$  (resp.  $n$ ), entonces  $EA$  (resp.  $AF$ ) es la matriz que se obtiene de  $A$  aplicando a sus filas (resp. columnas) la misma transformación elemental con la que se obtiene  $E$  (resp.  $F$ ) a partir de la identidad:

```
In[]: =      A={{1,2,3,4},{2,3,4,5},{3,4,5,6}};
             b=el1[2,3,3].A;
             MatrixForm[b]
             c=A.Transpose[el2[2,3,4]];
             MatrixForm[c]
```

```
Out[] =      
$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 & 4 \\ 2 & 9 & 4 & 5 \\ 3 & 12 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

```

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

## 2. FORMA NORMAL DE HERMITE POR FILAS.

En este apartado nos proponemos calcular la forma de Hermite por filas de una matriz, por ejemplo:

*In[]*: = **a={{3,6,-5,0},{1,1,2,9},{2,4,-3,1}};**  
**MatrixForm[a]**

*Out[]* = 
$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Para hacerlo de una forma directa, Mathematica incorpora el siguiente comando:

**RowReduce[matriz]**

que nos devuelve la forma normal de Hermite por filas de matriz:

*In[]*: = **RowReduce[a]MatrixForm**

*Out[]* = 
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Sin embargo, si queremos calcularla paso a paso, utilizando transformaciones elementales, en primer lugar tendremos que ejecutar el fichero donde tengamos la definición de las matrices elementales.

Una vez que hemos introducido la matriz en el Mathematica:

*In[]*: = **a={{3,6,-5,0},{1,1,2,9},{2,4,-3,1}};**  
**MatrixForm[a]**

*Out[]* = 
$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Iremos realizando transformaciones elementales hasta conseguir la forma normal de Hermite, para lo cual multiplicaremos  $A$ , a izquierda, por las correspondientes matrices elementales. En primer lugar, intercambiamos la fila 1 y la fila 2, para obtener el pivote 1:

**In[] := a1=el1[1, 2, 3].a;  
MatrixForm[a1]**

$$Out[] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

A continuación haremos ceros por debajo del pivote:

**In[] := a2=el3[2, 1, -3, 3].a1;  
MatrixForm[a2]**

$$Out[] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

**In[] := a3=el3[3, 1, -2, 3].a2;  
MatrixForm[a3]**

$$Out[] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 3 & -11 & -27 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \end{pmatrix}$$

Repetiremos el proceso con las  $m - 1$  filas restantes y las  $n - 1$  columnas restantes. Primero el segundo pivote 1:

**In[] := a4=el2[2, 1/3, 3].a3;  
MatrixForm[a4]**

$$Out[] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{3} & -9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \end{pmatrix}$$

Ceros por debajo de él:

**In[] := a5=el3[3, 2, -2, 3].a4;  
MatrixForm[a5]**

$$Out[] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{3} & -9 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Haremos el tercer pivote 1, consiguiendo una matriz escalonada:

**In[] := a6=e12[3, 3, 3].a5;  
MatrixForm[a6]**

$$Out[] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{11}{3} & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Nuestro objetivo, ahora, será hacerla reducida. Para ello haremos ceros por encima de cada pivote. En primer lugar podemos utilizar el tercer pivote:

**In[] := a7=e13[2, 3, 11/3, 3].a6;  
MatrixForm[a7]**

$$Out[] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

**In[] := a8=e13[1, 3, -2, 3].a7;  
MatrixForm[a8]**

$$Out[] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Ahora usamos el segundo pivote y obtendremos ya la forma normal de Hermite por filas de a:

**In[] := a9=e13[1, 2, -1, 3].a8;  
Print[ "La forma normal de Hermite de a es: ",  
MatrixForm[a9]]**

$$Out[] = \text{La forma normal de Hermite de a es: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Observemos que  $H = E_k \dots E_1 A$  es decir, la forma normal de Hermite es el producto de las matrices elementales por A (¡cuidado con el orden!):

**In[] := H=e13[1, 2, -1, 3]. e13[1, 3, -2, 3]. e13[2, 3, 11/3, 3]. e12[3, 3, 3].  
e13[3, 2, -2, 3]. e12[2, 1/3, 3]. e13[3, 1, -2, 3]. e11[1, 2, 3].a;  
MatrixForm[H]**

$$Out[] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$