

## POLINOMIOS

### EJERCICIO 1 : Desarrolla y simplifica:

a)  $(x-1)(x^2+x)^2 - (x^5 - 5x^4 + x^3 - x^2)$

b)  $(2x-3)^2 - (2x^2 + 4x + 1)(x-2)$

c)  $(x^2 - 2x + 3)(2x+1) - (4x-1)^2$

d)  $\left(\frac{2}{3}x-1\right)(3x+6) + (x+1)(x-1) - (x+2)^2$

a)  $(x-1)(x^2+x)^2 - (x^5 - 5x^4 + x^3 - x^2) = (x-1)(x^4 + 2x^3 + x^2) - (x^5 - 5x^4 + x^3 - x^2) =$   
 $= x^5 + 2x^4 + x^3 - x^4 - 2x^3 - x^2 - x^5 + 5x^4 - x^3 + x^2 = 6x^4 - 2x^3$

b)  $(2x-3)^2 - (2x^2 + 4x + 1)(x-2) = (4x^2 - 12x + 9) - (2x^3 + 4x^2 + x - 4x^2 - 8x - 2) =$   
 $= 4x^2 - 12x + 9 - (2x^3 - 7x - 2) = 4x^2 - 12x + 9 - 2x^3 + 7x + 2 = -2x^3 + 4x^2 - 5x + 11$

c)  $(x^2 - 2x + 3)(2x+1) - (4x-1)^2 = (2x^3 + x^2 - 4x^2 - 2x + 6x + 3) - (16x^2 - 8x + 1) =$   
 $= 2x^3 - 3x^2 + 4x + 3 - 16x^2 + 8x - 1 = 2x^3 - 19x^2 + 12x + 2$

d)  $\left(\frac{2}{3}x-1\right)(3x+6) + (x+1)(x-1) - (x+2)^2 = (2x^2 + 4x - 3x - 6) + (x^2 - 1) - (x^2 + 4x + 4) =$   
 $= 2x^2 + x - 6 + x^2 - 1 - x^2 - 4x - 4 = 2x^2 - 3x - 11$

### EJERCICIO 2

a) Opera y simplifica:  $(x+2)^2 - 3(x^2 - 2x + 4)$

b) Halla el cociente y el resto de esta división:  $(4x^5 + 2x^3 - 3x + 1) : (x^2 - 2)$

Solución:

a)  $(x+2)^2 - 3(x^2 - 2x + 4) = x^2 + 4x + 4 - 3x^2 + 6x - 12 = -2x^2 + 10x - 8$

b) 
$$\begin{array}{r} 4x^5 + 2x^3 - 3x + 1 \\ - 4x^5 + 8x^3 \\ \hline 10x^3 - 3x + 1 \\ - 10x^3 + 20x \\ \hline 17x + 1 \end{array} \quad \begin{array}{r} | x^2 - 2 \\ 4x^3 + 10x \end{array}$$
  
 Cociente =  $4x^3 + 10x$       Resto =  $17x + 1$

### EJERCICIO 3

a) Opera y simplifica:  $\left(\frac{1}{2}x+1\right)(2x+2) - (x+1)^2$

b) Halla el cociente y el resto de esta división:  $(7x^5 - 2x^3 + 3x - 2) : (x^2 + 2)$

a)  $\left(\frac{1}{2}x+1\right)(2x+2) - (x+1)^2 = x^2 + x + 2x + 2 - (x^2 + 2x + 1) = x^2 + 3x + 2 - x^2 - 2x - 1 = x + 1$

b) 
$$\begin{array}{r} 7x^5 - 2x^3 + 3x - 2 \\ - 7x^5 - 14x^3 \\ \hline - 16x^3 + 3x - 2 \\ 16x^3 + 32x \\ \hline 35x - 2 \end{array} \quad \begin{array}{r} | x^2 + 2 \\ 7x^3 - 16x \end{array}$$
  
 Cociente =  $7x^3 - 16x$       Resto =  $35x - 2$

### EJERCICIO 4 : Calcula el cociente y el resto de cada división:

a)  $(2x^5 - 3x^4 + 2x^2 - x + 1) : (x^3 - 2x + 1)$

b)  $(2x^5 - 3x^3 + 2x - 1) : (x + 2)$

a) 
$$\begin{array}{r} 2x^5 - 3x^4 + 2x^2 - x + 1 \\ - 2x^5 + 4x^3 - 2x^2 \\ \hline - 3x^4 + 4x^3 - x + 1 \\ 3x^4 - 6x^2 + 3x \\ \hline 4x^3 - 6x^2 + 2x + 1 \\ - 4x^3 + 8x - 4 \\ \hline - 6x^2 + 10x - 3 \end{array} \quad \begin{array}{r} | x^2 + 2 + 1 \\ 2x^2 - 3x + 4 \end{array}$$
  
 Cociente =  $2x^2 - 3x + 4$       Resto =  $-6x^2 + 10x - 3$

b) Aplicamos la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrrr} & 2 & 0 & -3 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & & -4 & 8 & -10 & 20 & -44 \\ \hline & 2 & -4 & 5 & -10 & 22 & -45 \end{array}$$

$$\text{Cociente} = 2x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 10x + 22$$

$$\text{Resto} = -45$$

**EJERCICIO 5 : Halla el cociente y el resto de cada división:**

a)  $(2x^4 - 7x^3 + 3x^2 - 1) : (x^2 + 2)$

b)  $(-3x^4 + 6x^2 + x - 2) : (x - 1)$

a)

$$\begin{array}{r} 2x^4 + 7x^3 + 3x^2 - 1 \\ -2x^4 - 4x^2 \\ \hline -7x^3 - x^2 - 1 \\ 7x^3 + 14x \\ \hline -x^2 + 14x - 1 \\ x^2 + 2 \\ \hline 14x + 1 \end{array}$$

$$\text{Cociente} = 2x^2 - 7x - 1$$

$$\text{Resto} = 14x + 1$$

b) Aplicamos la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrr} & -3 & 0 & 6 & 1 & -2 \\ 1 & & -3 & -3 & 3 & 4 \\ \hline & -3 & -3 & 3 & 4 & 2 \end{array}$$

$$\text{Cociente} = -3x^3 - 3x^2 + 3x + 4$$

$$\text{Resto} = 2$$

**EJERCICIO 6 : Halla el valor de  $k$  para que la siguiente división sea exacta:**

$$(3x^2 + kx - 2) : (x + 2)$$

*Solución:* Llamamos  $P(x) = 3x^2 + kx - 2$ .

Para que la división sea exacta, ha de ser  $P(-2) = 0$ ; es decir:  $P(-2) = 12 - 2k - 2 = 10 - 2k = 0 \rightarrow k = 5$

**EJERCICIO 7**

a) Halla el valor numérico de  $P(x) = -2x^3 + x^2 - 3x - 6$  para  $x = -1$

b) ¿Es divisible el polinomio anterior,  $P(x)$ , entre  $x + 1$ ?

a)  $P(-1) = 2 + 1 + 3 - 6 = 0$

b) Sí. Por el teorema del resto, sabemos que el resto de la división  $P(x) : (x + 1)$  coincide con  $P(-1)$ . En este caso  $P(-1) = 0$ ; por tanto,  $P(x)$  es divisible entre  $x + 1$ .

**EJERCICIO 8 : Dado el polinomio  $P(x) = 4x^3 - 8x^2 + 3x - 1$ :**

a) Halla el cociente y el resto de la división:  $P(x) : (x - 2)$

b) ¿Cuánto vale  $P(2)$ ?

a) Aplicamos la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 4 & -8 & 3 & 1 \\ 2 & & 8 & 0 & 6 \\ \hline & 4 & 0 & 3 & 5 \end{array}$$

$$\text{Cociente} = 4x^2 + 3$$

$$\text{Resto} = 5$$

b) Por el teorema del resto, sabemos que  $P(2) = 5$ .

### EJERCICIO 9

a) Halla el valor numérico de  $P(x) = 3x^4 - 2x^3 + 2x - 3$  para  $x = 1$ .

b) ¿Es divisible el polinomio anterior,  $P(x)$ , entre  $x - 1$ ?

a)  $P(1) = 3 - 2 + 2 - 3 = 0$

b) Si. Por el teorema del resto, sabemos que el resto de la división  $P(x) : (x - 1)$  coincide con  $P(1)$ . En este caso  $P(1) = 0$ , por tanto,  $P(x)$  es divisible entre  $x - 1$ .

### EJERCICIO 10 : Opera y simplifica cada una de estas expresiones:

a)  $2x(2x + 1) - (2x + 3)^2$

b)  $\frac{4}{x} + \frac{x}{x-2}$

c)  $(x + 3)(x - 3) - x(3x - 7)$

b)  $\frac{(x+5)^2}{x} : \frac{x+5}{3x^3}$

*Solución:*

a)  $2x(2x + 1) - (2x + 3)^2 = 4x^2 + 2x - (4x^2 + 12x + 9) = 4x^2 + 2x - 4x^2 - 12x - 9 = -10x - 9$

b)  $\frac{4}{x} + \frac{x}{x-2} = \frac{4(x-2)}{x(x-2)} + \frac{x^2}{x(x-2)} = \frac{x^2 + 4x - 8}{x(x-2)} = \frac{x^2 + 4x - 8}{x^2 - 2x}$

c)  $(x + 3)(x - 3) - x(3x - 7) = x^2 - 9 - 3x^2 + 7x = -2x^2 + 7x - 9$

b)  $\frac{(x+5)^2}{x} : \frac{x+5}{3x^3} = \frac{3x^3(x+5)^2}{x(x+5)} = 3x^2 \cdot (x+5) = 3x^3 + 15x^2$

### EJERCICIO 11 : Opera y simplifica:

a)  $(3x + 2)^2 + x^2(x - 9)$

b)  $\frac{3x}{x+2} - \frac{5}{x-2}$

c)  $2(x - 1)^2 - x(1 + 2x)$

b)  $\frac{5x^4}{x-6} : \frac{10x^2}{(x-6)^2}$

*Solución:*

a)  $(3x + 2)^2 + x^2(x - 9) = 9x^2 + 12x + 4 + x^3 - 9x^2 = x^3 + 12x + 4$

b)  $\frac{3x}{x+2} - \frac{5}{x-2} = \frac{3x(x-2)}{(x+2)(x-2)} - \frac{5(x+2)}{(x+2)(x-2)} = \frac{3x^2 - 6x - 5x - 10}{(x+2)(x-2)} = \frac{3x^2 - 11x - 10}{x^2 - 4}$

c)  $2(x - 1)^2 - x(1 + 2x) = 2(x^2 - 2x + 1) - x - 2x^2 = 2x^2 - 4x + 2 - x - 2x^2 = -5x + 2$

b)  $\frac{5x^4}{x-6} : \frac{10x^2}{(x-6)^2} = \frac{5x^4(x-6)^2}{10x^2(x-6)} = \frac{x^2(x-6)}{2} = \frac{x^3 - 6x^2}{2}$

### EJERCICIO 12 : Factoriza los siguientes polinomios:

a)  $x^5 + 5x^4 - x^3 - 5x^2$

b)  $x^5 + x^4 - 4x^3 - 4x^2$

c)  $x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 18x$

d)  $x^4 + 6x^3 - x^2 - 6x$

e)  $x^4 + 6x^3 - x^2 - 6x$

f)  $x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 6x - 9$

a)  $x^5 + 5x^4 - x^3 - 5x^2$

• Sacamos  $x^2$  factor común:  $x^2(x^3 + 5x^2 - x - 5)$

• Utilizamos la regla de Ruffini para factorizar  $x^3 + 5x^2 - x - 5$ :

	1	5	-1	-5
1		1	6	5
	1	6	5	0
-1		-1	-5	
	1	5	0	

Por tanto:  $x^5 + 5x^4 - x^3 - 5x^2 = x^2(x - 1)(x + 1)(x + 5)$

b)  $x^5 + x^4 - 4x^3 - 4x^2$

• Sacamos  $x^2$  factor común:  $x^2(x^3 + x^2 - 4x - 4)$

• Utilizamos la regla de Ruffini para factorizar  $x^3 + x^2 - 4x - 4$ :

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 1 & -4 & -4 \\
 -1 & & -1 & 0 & 4 \\
 \hline
 & 1 & 0 & -4 & 0 \\
 2 & & 2 & 4 & \\
 \hline
 & 1 & 2 & 0 & 
 \end{array}$$

Por tanto:  $x^5 + x^4 - 4x^3 - 4x^2 = x^2(x+1)(x-2)(x+2)$

c)  $x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 18x$

- Sacamos x factor común:  $x(x^3 + 2x^2 - 9x - 18)$
- Utilizamos la regla de Ruffini para factorizar  $x^3 + 2x^2 - 9x - 18$ :

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 2 & -9 & -18 \\
 3 & & 3 & 15 & 18 \\
 \hline
 & 1 & 5 & 6 & 0 \\
 -3 & & -3 & -6 & \\
 \hline
 & 1 & 2 & 0 & 
 \end{array}$$

Por tanto:  $x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 18x = x(x-3)(x+3)(x+2)$

d)  $x^4 + 6x^3 - x^2 - 6x$

- Sacamos x factor común:  $x(x^3 + 6x^2 - x - 6)$
- Utilizamos la regla de Ruffini para factorizar  $x^3 + 6x^2 - x - 6$ :

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 6 & -1 & -6 \\
 1 & & 1 & 7 & 6 \\
 \hline
 & 1 & 7 & 6 & 0 \\
 -1 & & -1 & -6 & \\
 \hline
 & 1 & 6 & 0 & 
 \end{array}$$

Por tanto:  $x^4 + 6x^3 - x^2 - 6x = x(x-1)(x+1)(x+6)$

e)  $x^4 + 6x^3 - x^2 - 6x$

- Sacamos x factor común:  $x(x^3 + 6x^2 - x - 6)$
- Utilizamos la regla de Ruffini para factorizar  $x^3 + 6x^2 - x - 6$ :

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 6 & -1 & -6 \\
 1 & & 1 & 7 & 6 \\
 \hline
 & 1 & 7 & 6 & 0 \\
 -1 & & -1 & -6 & \\
 \hline
 & 1 & 6 & 0 & 
 \end{array}$$

Por tanto:  $x^4 + 6x^3 - x^2 - 6x = x(x-1)(x+1)(x+6)$

f) Usamos la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -6 & 8 & 6 & -9 \\
 1 & & 1 & -5 & 3 & 9 \\
 \hline
 & 1 & -5 & 3 & 9 & 0 \\
 -1 & & -1 & 6 & -9 & \\
 \hline
 & 1 & -6 & 9 & 0 & \\
 3 & & 3 & -9 & & \\
 \hline
 & 1 & -3 & 0 & & 
 \end{array}$$

Luego:  $x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 6x - 9 = (x-1)(x+1)(x-3)^2$

### EJERCICIO 13

a) Halla el cociente y el resto de la siguiente división:  $(3x^5 - 16x^3 + 6x^2 + 7x - 2) : (3x^2 - 1)$

b) Factoriza este polinomio:  $2x^4 + 4x^2$

$$\begin{array}{r}
 \text{a) } \begin{array}{r}
 3x^5 \quad -16x^3 + 6x^2 + 7x - 2 \\
 \underline{-3x^5 \quad \quad x^3} \\
 -15x^3 + 6x^2 + 7x \\
 \underline{15x^3 \quad \quad -5x} \\
 6x^2 + 2x - 2 \\
 \underline{-6x^2 \quad \quad +2} \\
 2x
 \end{array}
 \end{array}$$

Cociente =  $x^3 - 5x + 2$

Resto =  $2x$

b)  $2x^4 + 4x^2 = 2x^2(x^2 + 2)$  (El polinomio  $x^2 + 2$  no tiene raíces reales.)

### EJERCICIO 14

- a) **Calcula y simplifica:**  $(x - 3)(x + 3) - 2x(x^2 - 5x)$   
b) **Descompón en factores este polinomio:**  $3x^3 - 16x^2 + 23x - 6$

*Solución:*

a)  $(x - 3)(x + 3) - 2x(x^2 - 5x) = x^2 - 9 - 2x^3 + 10x^2 = -2x^3 + 11x^2 - 9$

b) Utilizamos la regla de Ruffini:

	3	-16	23	-6
2		6	-20	6
	3	-10	3	0
3		9	-3	
	3	-1	0	

Luego:  $3x^3 - 16x^2 + 23x - 6 = (x - 2)(x - 3)(3x - 1)$

### EJERCICIO 15 : Factoriza los siguientes polinomios:

- a)  $2x^4 - 18x^2$       b)  $x^4 - x^3 - x^2 - x - 2$       c)  $x^3 - 13x^2 + 36x$   
d)  $2x^3 - 9x^2 - 8x + 15$       e)  $x^5 + x^4 - 2x^3$       e)  $x^3 - 3x + 2$

*Solución:*

a) Sacamos factor común y tenemos en cuenta que  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ :

$2x^4 - 18x^2 = 2x^2(x^2 - 9) = 2x^2(x + 3)(x - 3)$

b) Utilizamos la regla de Ruffini:

	1	-1	-1	-1	-2
-1		-1	2	-1	2
	1	-2	1	-2	0
2		2	0	2	
	1	0	1	0	

$x^4 - x^3 - x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2)(x^2 + 1)$  (El polinomio  $x^2 + 1$  no tiene raíces reales).

c) Sacamos factor común y hallamos las otras raíces resolviendo la ecuación de segundo grado:

$x^3 - 13x^2 + 36x = x(x^2 - 13x + 36)$

$x^2 - 13x + 36 = 0 \rightarrow x = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2} \begin{cases} x = 9 \\ x = 4 \end{cases}$

Por tanto:  $x^3 - 13x^2 + 36x = x(x - 9)(x - 4)$

d) Utilizamos la regla de Ruffini:

	2	-9	-8	15
1		2	-7	-15
	2	-7	-15	0
5		10	15	
	2	3	0	

$2x^3 - 9x^2 - 8x + 15 = (x - 1)(x - 5)(2x + 3)$

e) Sacamos factor común y hallamos las otras raíces resolviendo la ecuación:

$x^5 + x^4 - 2x^3 = x^3(x^2 + x - 2)$

$$x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases}$$

Por tanto:  $x^5 + x^4 - 2x^3 = x^3(x-1)(x+2)$

f) Utilizamos la regla de Ruffini:

	1	0	-3	2	
1		1	1	-2	
	1	1	-2	0	
1		1	2		
	1	2	0		

$$x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$$

**EJERCICIO 16 : Opera y simplifica:**

a)  $\frac{2x}{x^2-1} - \frac{2}{x-1}$

b)  $\frac{x^2-2x+1}{x+3} : \frac{x-1}{x^2-9}$

a)  $\frac{x+1}{x-1} - \frac{x^2+2}{x^2-x}$

b)  $\frac{x^2-1}{x+2} \cdot \frac{(x+2)^2}{x^2+2x+1}$

a)  $\frac{x-1}{x-2} + \frac{x^2+1}{x^2-4}$

b)  $\frac{x^2+x}{2x+4} : \frac{x^2-1}{x+2}$

a)  $\frac{2x+1}{x^2-9} + \frac{3}{x+3}$

b)  $\frac{x^2+2x}{x^3} \cdot \frac{x^2}{x^2-4}$

a)  $\frac{3x^2+1}{x^2+x} - \frac{2x}{x+1}$

b)  $\left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 - \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{x}{x+1}$

Solución:

a)  $\frac{2x}{x^2-1} - \frac{2}{x-1} = \frac{2x}{(x-1)(x+1)} - \frac{2(x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{2x-2x-2}{(x-1)(x+1)} = \frac{-2}{x^2-1}$

b)  $\frac{x^2-2x+1}{x+3} : \frac{x-1}{x^2-9} = \frac{(x-1)^2}{(x+3)} : \frac{(x-1)}{(x+3)(x-3)} = \frac{(x-1)^2(x+3)(x-3)}{(x+3)(x-1)} = (x-1)(x-3) = x^2 - 4x + 3$

a)  $\frac{x+1}{x-1} - \frac{x^2+2}{x^2-x} = \frac{x(x+1)}{x(x-1)} - \frac{x^2+2}{x(x-1)} = \frac{x^2+x-x^2-2}{x(x-1)} = \frac{x-2}{x^2-x}$

b)  $\frac{x^2-1}{x+2} \cdot \frac{(x+2)^2}{x^2+2x+1} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x+2)} \cdot \frac{(x+2)^2}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)(x+2)}{x+1} = \frac{x^2+x-2}{x+1}$

a)  $\frac{x-1}{x-2} + \frac{x^2+1}{x^2-4} = \frac{(x-1)(x+2)}{(x-2)(x+2)} + \frac{x^2+1}{(x-2)(x+2)} = \frac{x^2+x-2+x^2+1}{(x-2)(x+2)} = \frac{2x^2+x-1}{x^2-4}$

b)  $\frac{x^2+x}{2x+4} : \frac{x^2-1}{x+2} = \frac{x(x+1)}{2(x+2)} : \frac{(x-1)(x+1)}{(x+2)} = \frac{x(x+1)(x+2)}{2(x+2)(x-1)(x+1)} = \frac{x}{2(x-1)} = \frac{x}{2x-2}$

a)  $\frac{2x+1}{x^2-9} + \frac{3}{x+3} = \frac{2x+1}{(x-3)(x+3)} + \frac{3(x-3)}{(x-3)(x+3)} = \frac{2x+1+3x-9}{(x-3)(x+3)} = \frac{5x-8}{x^2-9}$

b)  $\frac{x^2+2x}{x^3} \cdot \frac{x^2}{x^2-4} = \frac{x(x+2)}{x^3} \cdot \frac{x^2}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{x-2}$

a)  $\frac{3x^2+1}{x^2+x} - \frac{2x}{x+1} = \frac{3x^2+1}{x(x+1)} - \frac{2x^2}{x(x+1)} = \frac{3x^2+1-2x^2}{x(x+1)} = \frac{x^2+1}{x^2+x}$

b)  $\left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(1 - \frac{1}{x}\right) \cdot \frac{x}{x+1} = \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \cdot \frac{x}{x+1} = \frac{x^2-1}{x^2} \cdot \frac{x}{x+1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x^2} \cdot \frac{x}{(x+1)} = \frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x}$