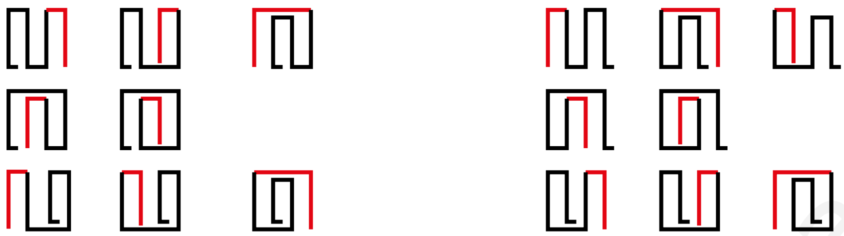
Página 233

Resuelve

1. Construye el árbol completo para llegar a todos los posibles plegados de cuatro sellos.

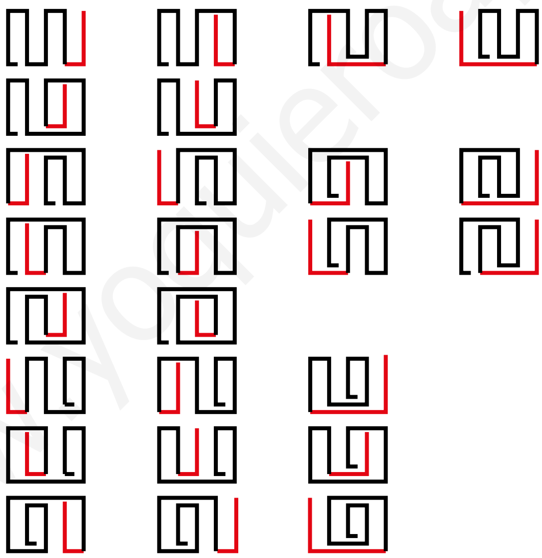
Partiendo de tres sellos, hacemos los dobleces para cuatro sellos:



Hay 16 formas de plegar cuatro sellos sin doblar ninguno.

2. Prolonga el árbol anterior para ver los posibles plegados de cinco sellos.

Para plegar cinco sellos partimos de cada una de las posibilidades de plegar cuatro sellos del grupo de la izquierda del ejercicio anterior:



Con las otras ocho posibilidades salen los mismos casos, es decir, otros 25 casos.

Hay 25 + 25 = 50 formas de plegar cinco sellos sin doblar ninguno.

1 Estrategias basadas en el producto

Página 234

1. Resuelve, razonadamente, los enunciados 2, 3, 4 y 5 anteriores.

2. ***Hay conversaciones bilaterales entre la UE y Japón. Los europeos acuden con 8 representantes, y los japoneses, con 11. Al encontrarse, cada miembro de una delegación saluda, estrechando la mano, a cada miembro de la otra. ¿Cuántos apretones de manos se dan?***

3. ***Vamos a merendar a un bar. Nos ofrecen 5 tipos de bocadillos y 8 tipos de bebidas. ¿Cuántos menús podemos confeccionar?***

4. ***¿Cuántos resultados distintos podemos obtener al lanzar un dado de color rojo y otro de color verde?***

5. ***Lanzamos un dado y extraemos una carta de una baraja de 40 cartas. ¿Cuántos resultados distintos podemos obtener?***

2. Cada representante europeo da la mano a cada uno de los once japoneses. Como hay 8 representantes europeos, en total hay $8 \cdot 11 = 88$ apretones de mano.

3. Con cada bocadillo podemos tomar 8 bebidas. Como hay 5 tipos de bocadillos, en total hay $8 \cdot 5 = 40$ menús distintos.

4. Con cada resultado del dado rojo hay 6 resultados del dado verde. Como hay 6 resultados del dado rojo, en total hay $6 \cdot 6 = 36$ resultados distintos.

5. Con cada resultado del dado hay 40 cartas de la baraja. Como hay 6 resultados del dado, en total existen $6 \cdot 40 = 240$ posibles resultados.

Página 235

2. Resuelve, razonadamente, los enunciados 2b, 3b, 4b y 5b.

2b. ***Los japoneses y los europeos se saludan, estrechándose la mano, no solamente al conocerse, sino cada día al juntarse y al separarse (¡qué pesados!). Las conversaciones duran 3 días. ¿Cuántos apretones de manos se darán?***

3b. ***En el bar donde fuimos a merendar, además de bocadillos y bebidas, decidimos pedir postre. Los hay de 4 tipos distintos. ¿Cuántos menús distintos salen ahora?***

4b. ***¿Cuántos resultados distintos podemos obtener al lanzar un dado rojo, uno verde y uno azul?***

5b. ***¿Cuántos resultados distintos podemos obtener al lanzar un dado, extraer una carta de una baraja de 40 cartas y lanzar una moneda?***

2b. Cada día se dan 2 apretones de manos durante los tres días. Por lo tanto, cada pareja se saluda $2 \cdot 3 = 6$ veces. En total se dan $88 \cdot 6 = 528$ apretones de manos.

3b. Hay cuatro postres para cada menú. Entonces hay $40 \cdot 4 = 160$ menús distintos ahora.

4b. Lanzando dos dados obtenemos $6 \cdot 6 = 36$ resultados.

Lanzando tres dados obtenemos $36 \cdot 6 = 216$ resultados distintos.

5b. Extrayendo una carta y lanzando un dado, conseguimos 240 resultados distintos. Para cada resultado hay dos posibilidades al lanzar una moneda, luego hay $240 \cdot 2 = 480$ resultados distintos.

Página 237

3. Alberto, Beatriz y Claudia van a ver a su abuelo. Al irse, este les dice: "Escoged cada uno el libro que queráis de estos", y les muestra 10 libros distintos. ¿De cuántas formas pueden hacer su elección?

El primer nieto: elegirá 1 libro de entre 10 libros distintos.

El segundo nieto: por cada una de las 10 posibilidades que ha tenido el primer nieto tiene 9 posibilidades: $10 \cdot 9 = 90$ posibilidades.

El tercer nieto: por cada una de las 90 posibilidades que hay al haber elegido ya el segundo nieto tiene 8 posibilidades.

En total tienen $90 \cdot 8 = 720$ formas de hacer la elección.

Página 238

4. **Luis, Carlos, Gonzalo, Paco y Jorge han quedado en encontrarse en la puerta del cine con sus amigas, Carmen, Elena, Marta y Cristina. Al encontrarse, se saludan como es habitual: dos besos en la mejilla entre un chico y una chica.**

¿Cuántos besos se dan entre todos?

Cada chico da dos besos a cada chica. Cada chico da $2 \cdot 4 = 8$ besos.

Como hay 5 chicos, en total dan $5 \cdot 8 = 40$ besos.

5. **¿Cuántos partidos de Primera División se juegan en una temporada de la Liga española de fútbol? (Son 20 equipos que juegan todos contra todos dos veces).**

Cada equipo juega 19 partidos de ida y 19 partidos de vuelta. En total juegan 38 partidos.

Como hay 20 equipos, se jugarán $20 \cdot 38$ partidos. Pero estamos contando dos veces cada partido, por lo tanto se jugarán $10 \cdot 38 = 380$ partidos de fútbol.

6. **¿Cuántos resultados posibles se pueden obtener al lanzar un dado y dos monedas distintas?**

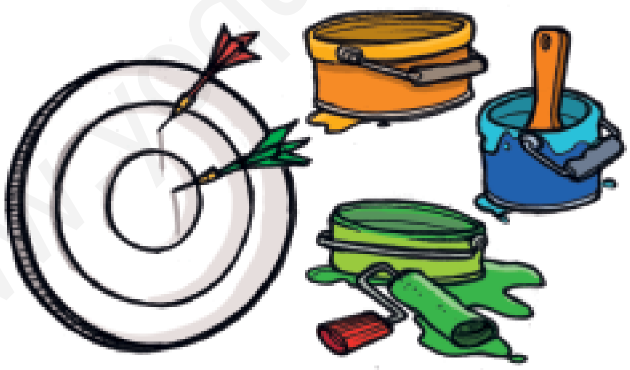
Al lanzar dos monedas tenemos 4 posibles resultados:

CC CX XC XX

Por cada una de estas 4 posibilidades, hay 6 resultados al lanzar un dado.

En total hay $6 \cdot 4 = 24$ posibles resultados.

7. **Quiero pintar una diana como la de la figura, con tres colores distintos, para jugar a los dardos.**



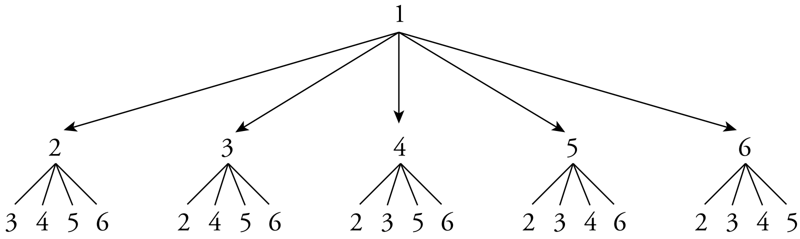
¿De cuántas formas la puedo pintar si tengo pintura de colores azul, verde y naranja?

¿Y si tuviera 6 colores?

COLOR EXTERNO	COLOR INTERMEDIO	COLOR INTERNO
A	V	N
	N	V
V	A	N
	N	A
N	A	V
	V	A

Hay 6 posibilidades con tres colores.

Si hay 6 colores (enumeramos los colores del 1 al 6):



5 · 4 = 20 posibilidades con el color 1 en primer lugar. Si hacemos este árbol para los otros cinco colores, obtendremos: 6 · 5 · 4 = 120 posibilidades.

Hay 120 formas de pintar la diana.

8. En el pub "El Sabrosón" son especialistas en combinados de zumos y en café. Tienen 5 tipos de zumos de frutas y 3 tipos de cafés.

¿Cuántas combinaciones distintas se pueden hacer eligiendo un zumo y una taza de café?

Si, además, se añade a cada combinación un bombón de chocolate blanco o negro, ¿cuántas se podrán preparar de esta forma?

Por cada zumo se pueden hacer tres combinaciones con café.

En total habrá 5 · 3 = 15 combinaciones de zumo y café.

A cada una de estas 15 combinaciones se le puede añadir un bombón a elegir entre dos tipos. Luego ahora habrá 15 · 2 = 30 combinaciones distintas.

9. La Asociación de Libreros va a entregar los premios "Pluma de Oro" y "Pluma de Plata". Para ello, ha seleccionado 10 libros entre los publicados este año. ¿De cuántas formas pueden repartirse los dos premios entre esos libros?

Por cada libro que reciba "Pluma de Oro" hay 9 posibilidades de otorgar a otro libro distinto de este la "Pluma de Plata".

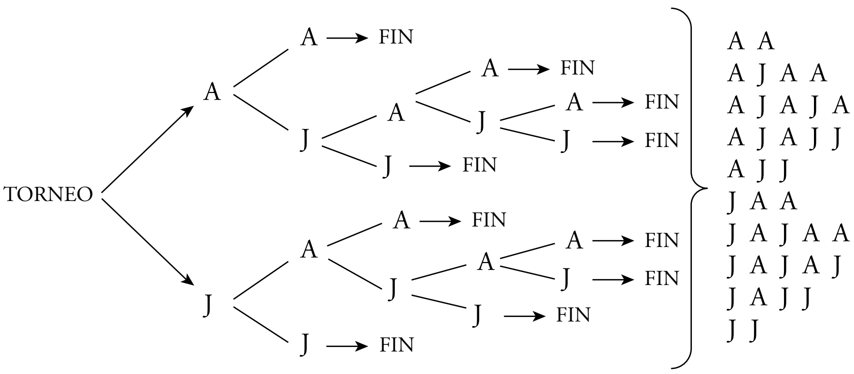
Como hay 10 posibilidades para otorgar la "Pluma de Oro", en total habrá:

10 · 9 = 90 formas distintas de repartirse los dos premios entre los 10 libros.

10. Álvaro y Javier juegan un torneo de billar que ganará el que consiga dos partidas seguidas o tres alternas.

¿Cuáles son los posibles desarrollos del torneo?

Hacemos el diagrama en árbol. En cada ramificación indicamos quién gana una partida [Álvaro (A) o Javier (J)]:



Hay 10 posibles desarrollos del torneo.

2 Variaciones y permutaciones (importa el orden)

Página 239

Resuelve cada enunciado de dos formas:

a) Realizando un diagrama en árbol o razonando como si lo realizaras.

b) Reconociendo el modelo de variaciones con repetición y aplicando la fórmula.

1. ¿Cuántos números de 4 cifras se pueden formar con las cifras impares?

a) Para cada cifra del número hay 5 posibilidades, las cinco cifras impares. Fijada la primera cifra, hay 5 posibles resultados para la segunda; fijadas las dos primeras, hay 5 resultados para la tercera, y así sucesivamente.

En total habrá $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$ posibles números de cuatro cifras.

b) Disponemos de 5 cifras impares (1, 3, 5, 7, 9). Podemos repetirlos y el orden influye.

Son $VR_{5,\,4} = 5^4 = 625$ números de cuatro cifras.

2. Lanzamos un dado 4 veces. Importa el orden en que salen los números.

¿Cuántos resultados distintos pueden darse?

a) Hay 6 posibilidades en cada tirada, lo que significa que, fijado el primer lanzamiento, hay 6 posibilidades para el segundo, y así sucesivamente.

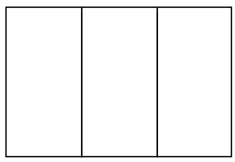
En total habrá $6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1\,296$ resultados.

b) Hay 6 posibilidades en cada tirada. Puede repetirse el resultado e influye el orden. Hemos de hacer grupos de 4.

Son $VR_{6,\,4} = 6^4 = 1\,296$ resultados.

3. Disponemos de 7 colores con los que hemos de pintar las tres franjas adjuntas.

¿Cuántas banderas salen?



NOTAS:

1. Cada franja de la bandera hay que llenarla con un solo color.

2. Dos o las tres franjas se pueden pintar del mismo color.

3. Dos banderas con los mismos colores colocados en distinto orden son distintas.

a) Para cada franja disponemos de 7 colores, es decir, fijado el color de la primera franja, hay 7 colores para la segunda y otros 7 para la tercera.

En total habrá $7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$ banderas.

b) Tenemos 7 elementos (los 7 colores) y hacemos grupos de tres elementos.

Influye el orden y podemos repetirlos, luego son $VR_{7,\,3}$.

Salen: $VR_{7,\,3} = 7^3 = 343$ banderas.

Página 240

4. Enuncia un problema similar al de las banderas de la página anterior que se resuelva mediante variaciones ordinarias y resuélvelo razonadamente (diagrama en árbol) y aplicando la fórmula.

Disponemos de 7 colores y hemos de hacer banderas con tres franjas. ¿Cuántas banderas salen si no podemos repetir colores?

Enumerando los colores del 1 al 7:

$$1 \begin{cases} 2 \longrightarrow 5 \text{ colores distintos} \\ 3 \longrightarrow 5 \text{ colores distintos} \\ 4 \longrightarrow 5 \text{ colores distintos} \\ 5 \longrightarrow 5 \text{ colores distintos} \\ 6 \longrightarrow 5 \text{ colores distintos} \\ 7 \longrightarrow 5 \text{ colores distintos} \end{cases}$$

Empezando por el 1 han salido $6 \cdot 5 = 30$ posibilidades distintas.

Como hay seis más, tendremos $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ posibles banderas.

Otra forma de resolverlo es por variaciones ordinarias:

Disponemos de 7 colores y tres franjas para pintar, pero no podemos repetir colores.

Con la fórmula: $V_{7,\,3} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ banderas distintas.

5. En los ejercicios 4 al 10 del apartado anterior, identifica cuáles responden al modelo de variaciones con repetición, de variaciones ordinarias o de permutaciones, y resuélvelos mediante las fórmulas.

4. No responde a ningún modelo.

5. Son 20 equipos y juegan de dos en dos, importando el orden. No pueden repetirse los equipos en cada partido: $V_{20,\,2} = 20 \cdot 19 = 380$ partidos.

6. No responde a ningún modelo.

7. Hay 3 colores y hacemos elecciones de 3 colores distintos: $P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ formas distintas.

   Si tuviera 6 colores, haría elecciones de 3 colores distintos: $V_{6,\,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ formas de pintar la diana.

8. No responde a ningún modelo.

9. Hay 10 libros y se eligen de dos en dos para dar los premios: $V_{10,\,2} = 10 \cdot 9 = 90$ formas distintas.

10. No responde a ningún modelo.

3 Cuando no influye el orden. Combinaciones

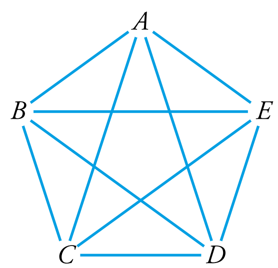
Página 241

1. En un monte hay 5 puestos de vigilancia contra incendios y cada uno de ellos está unido a los demás por un camino. ¿Cuántos caminos habrá en total?

Si hay 5 puestos, de cada uno de ellos saldrán 4 caminos.

Luego habría $5 \cdot 4 = 20$ caminos, pero están contados dos veces (el camino A $\rightarrow$ B es el mismo que el camino B $\rightarrow$ A). Por tanto, el total de caminos será:

$$\frac{5 \cdot 4}{2} = \frac{20}{2} = 10 \text{ caminos}$$



2. Vicente quiere regalar a su amigo Carlos 3 discos, y los quiere elegir entre los 10 que más le gustan. ¿De cuántas formas puede hacerlo?

Si influyera el orden en que él regala los tres discos, sería $V_{10,\,3} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ formas. Como no influye el orden y hay $3 \cdot 2 = 6$ formas distintas de ordenar tres discos, tiene $\frac{720}{3 \cdot 2} = 120$ formas de regalarle los tres discos.

Página 242

3. Tenemos 6 puntos en el espacio de tal modo que no hay tres alineados ni cuatro sobre el mismo plano. ¿Cuántas rectas podemos trazar uniendo dos de estos puntos? ¿Cuántos planos que se apoyen en tres de ellos?

Para trazar una recta se necesitan dos puntos:

NÚMERO DE RECTAS: $C_{6,\,2} = \dfrac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$ rectas.

Para definir un plano se necesitan tres puntos no alineados:

NÚMERO DE PLANOS: $C_{6,\,3} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$ planos.

4. ¿Cuántas posibles mezclas de dos colores, en idénticas cantidades, se pueden hacer con 8 tarros de pintura de distintos colores?

¿Cuántas mezclas de tres colores? ¿Y de cuatro colores?

No importa el orden en que se mezclen los colores:

DOS COLORES: $C_{8,\,2} = \dfrac{8 \cdot 7}{2} = 28$ mezclas.

TRES COLORES: $C_{8,\,3} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$ mezclas.

CUATRO COLORES: $C_{8,\,4} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 70$ mezclas.

Página 243

5. Construye tú las filas 6.ª y 7.ª del triángulo de Tartaglia.

Fila 6 $\rightarrow$ $\binom{6}{0}$ $\binom{6}{1}$ $\binom{6}{2}$ $\binom{6}{3}$ $\binom{6}{4}$ $\binom{6}{5}$ $\binom{6}{6}$

1 6 15 20 15 6 1

Fila 7 $\rightarrow$ $\binom{7}{0}$ $\binom{7}{1}$ $\binom{7}{2}$ $\binom{7}{3}$ $\binom{7}{4}$ $\binom{7}{5}$ $\binom{7}{6}$ $\binom{7}{7}$

1 7 21 35 35 21 7 1

6. Construye la fila 10.ª del triángulo de Tartaglia sin basarte en la anterior.

La fila 10.ª estará formada por los siguientes números combinatorios:

$$\binom{10}{0}\ \binom{10}{1}\ \binom{10}{2}\ \binom{10}{3}\ \binom{10}{4}\ \binom{10}{5}\ \binom{10}{6}\ \binom{10}{7}\ \binom{10}{8}\ \binom{10}{9}\ \binom{10}{10}$$

Sabemos, por las propiedades de los números combinatorios, que:

$$\binom{10}{0} = \binom{10}{10} = 1 \qquad \binom{10}{1} = \binom{10}{9} = 10$$

$$\binom{10}{2} = \binom{10}{8} \qquad \binom{10}{3} = \binom{10}{7} \qquad \binom{10}{4} = \binom{10}{6}$$

Así, calculamos únicamente:

$$\binom{10}{2} = \frac{10!}{2! \cdot (10-2)!} = \frac{10!}{2 \cdot 8!} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$$

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3! \cdot (10-3)!} = \frac{10!}{3 \cdot 2 \cdot 7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 120$$

$$\binom{10}{4} = \frac{10!}{4! \cdot (10-4)!} = \frac{10!}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 210$$

$$\binom{10}{5} = \frac{10!}{5! \cdot (10-5)!} = \frac{10!}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 252$$

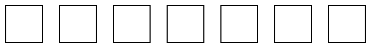
La décima fila será:

1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1

Página 244

Hazlo tú 1. **¿Cuántos números de 7 cifras se pueden formar con 5555333? ¿Cuánto suman todos ellos?**

Para formar un número de 7 cifras, disponemos de 7 lugares:



Decidimos dónde colocamos, por ejemplo, los "cincos".

El número de formas diferentes de colocar los "cincos" será:

$$C_{7,\,4} = \frac{7!}{4! \cdot (7-4)!} = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2} = 35$$

Luego tendremos 35 números diferentes formados por cuatro "cincos" y tres "treses".

$$\begin{array}{ccccccc} 5 & 5 & 5 & 5 & 3 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 5 & 3 & 5 & 3 & 3 \\ 5 & 5 & 5 & 3 & 3 & 5 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 3 & 3 & 3 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{array}$$

En cada una de las 7 columnas hay 35 dígitos, "cincos" y "treses".

Cuatro séptimas partes serán "cincos" y tres séptimas partes serán "treses". Por tanto, la suma de cada columna será:

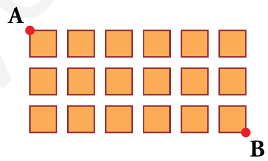
$$\frac{4}{7} \text{ de } 35 \cdot 5 + \frac{3}{7} \text{ de } 35 \cdot 3 = 100 + 45 = 145$$

Hacemos la suma total teniendo en cuenta el valor posicional de los dígitos de cada columna:

$$145 \cdot 1\,000\,000 + 145 \cdot 100\,000 + 145 \cdot 10\,000 + 145 \cdot 1\,000 + 145 \cdot 100 + 145 \cdot 10 + 145 \cdot 1 =$$

$$= 145 \cdot 1\,111\,111 = 161\,111\,095$$

Hazlo tú 2. **Haz lo mismo que en el ejercicio anterior.**



Hazlo paso a paso (número de caminos que nos llevan a cada esquina) y por combinatoria.

De manera análoga al ejercicio resuelto obtendremos:

$$C_{9,\,3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84 = C_{9,\,6}$$

Solución: Tendremos 84 caminos diferentes.

Ejercicios y problemas

Página 245

Practica

Formar agrupaciones

1. **a) En una urna hay una bola blanca, una roja y una negra. Las extraemos de una en una y anotamos ordenadamente los resultados. Escribe todos los posibles resultados que podemos obtener.**

b) Haz lo mismo para cuatro bolas distintas.

c) Lo mismo para ROJA, ROJA, BLANCA, NEGRA.

d) Lo mismo para ROJA, ROJA, NEGRA, NEGRA.

a)

1.ª EXTRAC.	2.ª EXTRAC.	3.ª EXTRAC.	RESULTADO
B	R	N	BRN
	N	R	BNR
R	B	N	RBN
	N	B	RNB
N	B	R	NBR
	R	B	NRB

Tenemos 6 posibles resultados.

b) Añadimos, por ejemplo, una bola azul (A).

B	R	N	A	BRNA
		A	N	BRAN
	N	R	A	BNRA
		A	R	BNAR
	A	R	N	BARN
		N	R	BANR

Hacemos lo mismo empezando con R, con N y con A.

Al final tenemos 6 · 4 = 24 resultados posibles.

c)

R	R	B	N	RRBN
		N	B	RRNB
	B	R	N	RBRN
		N	R	RBNR
	N	R	B	RNRB
		B	R	RNBR

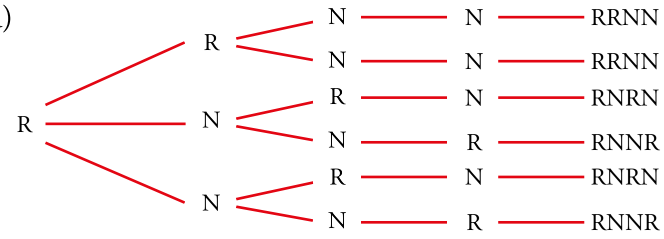
R	R	B	N	RRBN
		N	B	RRNB
	B	R	N	RBRN
		N	R	RBNR
	N	R	B	RNRB
		B	R	RNBR

B	R	R	N	BRRN
		N	R	BRNR
	R	R	N	BRRN
		N	R	BRNR
	N	R	R	BNRR
		R	R	BNRR

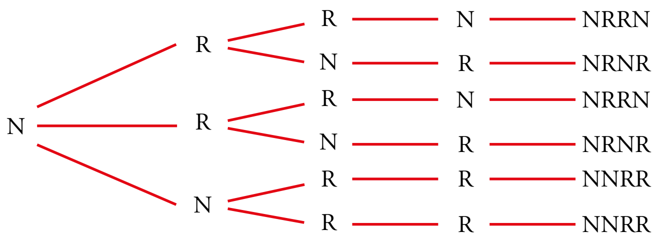
N	R	B	B	NRRB
		B	R	NRBR
	R	R	B	NRRB
		B	R	NRBR
	B	R	R	NBRR
		R	R	NBRR

Como hay dos bolas del mismo color, ahora tenemos menos resultados que en el apartado b). En concreto: 6 + 3 + 3 = 12 resultados.

d)



Para la segunda roja, igual.

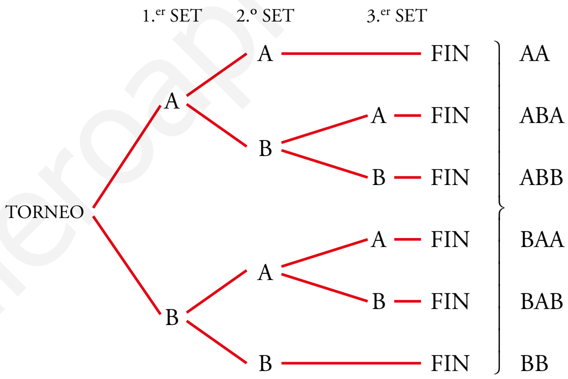


Ahora solo tenemos 3 + 3 = 6 resultados.

2. **Dos amigas juegan al tenis y acuerdan que será vencedora la primera que logre ganar dos sets. Escribe todas las formas en que puede desarrollarse el partido, set a set.**

Hacemos un diagrama en árbol. En cada ramificación indicamos quién gana un set, la jugadora A o la jugadora B.

Hay 6 posibles desarrollos del torneo.

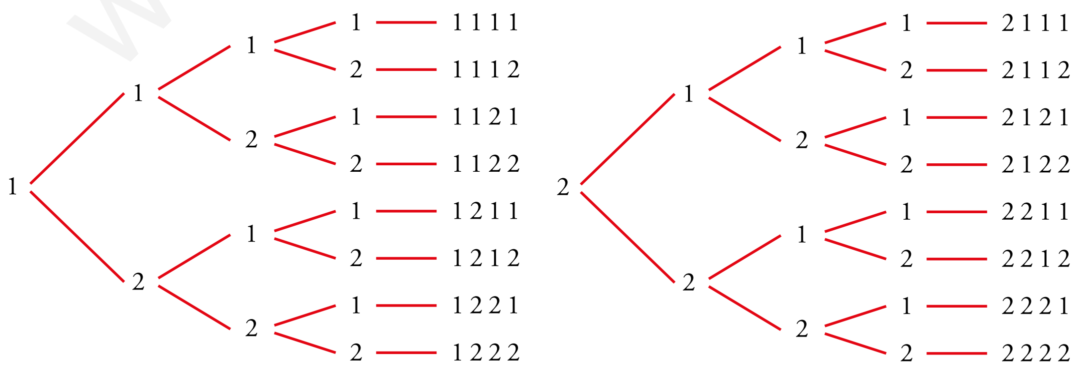


3. **a) Forma todos los números de cuatro cifras que se puedan hacer con los dígitos 1 y 2. ¿Cuántos son?**

b) ¿Cuántos números de 5 cifras se pueden hacer con los dígitos 0 y 1?

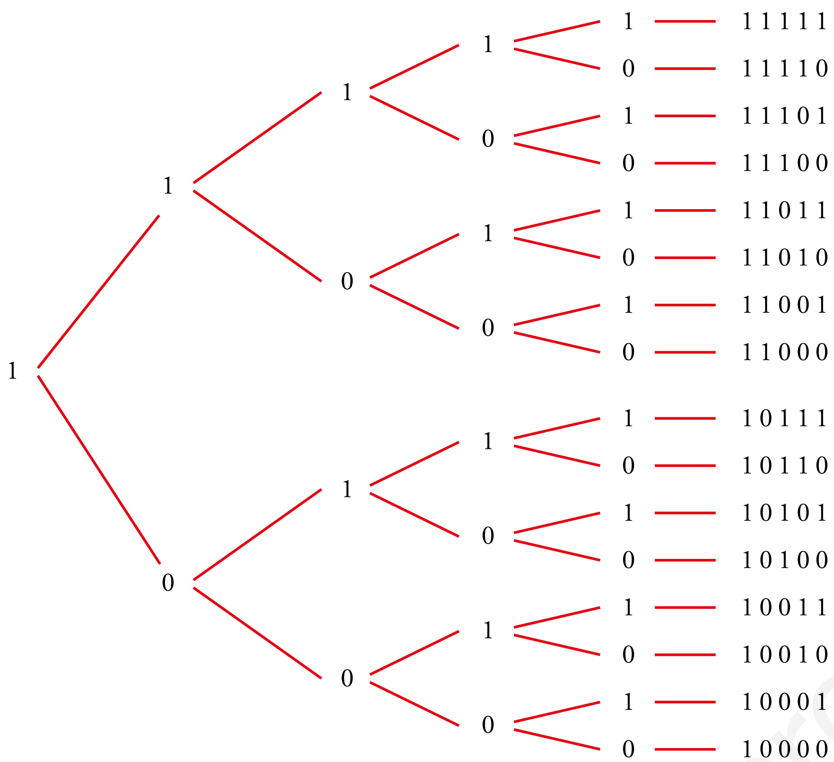
Ten en cuenta que 01101 = 1 101 no es un número de cinco cifras.

a) Hacemos un diagrama de árbol:



En total hay 16 números de cuatro cifras con los dígitos 1 y 2.

b)



Hay 16 números de 5 cifras compuestos solo por 0 y 1.

4. **Si queremos hacer lápices bicolores de doble punta y disponemos de los colores rojo, azul, negro, verde y amarillo, ¿cuántos modelos se pueden formar? Escríbelos todos.**

Llamamos: R - ROJO; A - AZUL; N - NEGRO; V - VERDE; M - AMARILLO

El lápiz bicolor de punta RA, por ejemplo, es el mismo que el de punta AR.

Los modelos de lápices bicolor son:

RA	AN	NV	VM
RN	AV	NM	
RV	AM		
RM			

En total hay 10 modelos.

5. **¿Qué números de dos cifras diferentes se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5?**

Los números son:

12	21	31	41	51
13	23	32	42	52
14	24	34	43	53
15	25	35	45	54

6. **Queremos construir un dominó con los números 1, 2, 3, 4 y 5. Describe sus fichas.**

Cada ficha tiene dos números que podemos repetir, pero el orden no influye:

$$\left.\begin{array}{lllll} 11 & 22 & 33 & 44 & 55 \\ 12 & 23 & 34 & 45 & \\ 13 & 24 & 35 & & \\ 14 & 25 & & & \\ 15 & & & & \end{array}\right\} 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15 \text{ fichas}$$

7. **Describe todos los partidos que han de jugarse en una liguilla con cinco equipos, *A*, *B*, *C*, *D* y *E*.**

Suponemos que juegan a una sola vuelta.

Los partidos serán:

$$\left.\begin{array}{llll} \text{A-B} & \text{A-C} & \text{A-D} & \text{A-E} \\ \text{B-C} & \text{B-D} & \text{B-E} & \\ \text{C-D} & \text{C-E} & & \\ \text{D-E} & & & \end{array}\right\} 10 \text{ partidos.}$$

Si la liguilla fuera a ida y vuelta, el número de partidos sería 20.

8. **Si tienes tres pantalones (AZUL, NEGRO, BLANCO) y cuatro camisetas (AZUL, ROJA, VERDE, BLANCA), describe todas las indumentarias que puedes vestir sin que coincidan el color de las dos prendas.**

Llamamos A, N y B a los pantalones, y A, R, V y B a las camisetas. Las posibles combinaciones son:

$$\left.\begin{array}{llll} \cancel{\text{AA}} & \text{AR} & \text{AV} & \text{AB} \\ \text{NA} & \text{NR} & \text{NV} & \text{NB} \\ \text{BA} & \text{BR} & \text{BV} & \cancel{\text{BB}} \end{array}\right\} \text{Te puedes vestir de 10 formas diferentes.}$$

Utilizar las fórmulas

9. **Calcula.**

a) $VR_{4,3}$ **b)** $VR_{3,4}$ **c)** $V_{7,3}$ **d)** P_7

e) $C_{6,4}$ **f)** $V_{9,5}$ **g)** $\dfrac{P_{10}}{P_8}$ **h)** $C_{10,8}$

a) $VR_{4,3} = 4^3 = 64$

b) $VR_{3,4} = 3^4 = 81$

c) $V_{7,3} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$

d) $P_7 = 7! = 5040$

e) $C_{6,4} = \dfrac{V_{6,4}}{P_4} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 15$

f) $V_{9,5} = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15120$

g) $\dfrac{P_{10}}{P_8} = \dfrac{10!}{8!} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8!}{8!} = 90$

h) $C_{10,8} = \dfrac{V_{10,8}}{P_8} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \dfrac{90}{2} = 45$

10. **Calcula.**

a) $V_{5,\,2} - C_{5,\,3}$

b) $\dfrac{VR_{6,\,2}}{C_{4,\,2}}$

c) $\dfrac{P_4}{V_{4,\,3}}$

d) $\dfrac{P_5}{P_3}$

e) $\dfrac{P_{10}}{P_9}$

f) $\dfrac{P_{12}}{P_9}$

a) $V_{5,\,2} - C_{5,\,3} = 5 \cdot 4 - \dfrac{V_{5,\,3}}{P_3} = 20 - \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20 - 10 = 10$

b) $\dfrac{VR_{6,\,2}}{C_{4,\,2}} = \dfrac{6^2}{\dfrac{V_{4,\,2}}{P_2}} = \dfrac{36}{\dfrac{12}{2}} = \dfrac{36}{6} = 6$

c) $\dfrac{P_4}{V_{4,\,3}} = \dfrac{4!}{4 \cdot 3 \cdot 2} = 1$

d) $\dfrac{P_5}{P_3} = \dfrac{5!}{3!} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 20$

e) $\dfrac{P_{10}}{P_9} = \dfrac{10!}{9!} = 10$

f) $\dfrac{P_{12}}{P_9} = \dfrac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9!}{9!} = 1\,320$

11. **Las expresiones $VR_{8,\,2}$; P_8; $V_{8,\,2}$; $C_{8,\,2}$ son las soluciones de los siguientes apartados a), b), c), d), pero no en ese orden. Asigna a cada apartado su solución:**

a) Palabras de ocho letras, con o sin sentido, que se pueden hacer con las letras de PELÍCANO.

b) Posibles parejas que se pueden formar para jugar un torneo de ajedrez entre 8 personas.

c) Números de dos cifras que se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8.

d) Posibles formas de dar el primer y segundo premios de un concurso literario con 8 participantes.

a) P_8

b) $C_{8,\,2}$

c) $VR_{8,\,2}$

d) $V_{8,\,2}$

12. **Ocho problemas muy parecidos. En cada uno de los siguientes problemas la pregunta es:** ***¿De cuántas formas se puede hacer?***

a) 3 chicos van a comprarse un polo cada uno a una heladería en la que hay 6 clases de polos.

b) 6 chicos van a comprarse un polo cada uno a una heladería en la que hay 3 clases de polos.

c) Repartir 3 polos distintos entre 6 chicos.

d) Repartir 3 polos iguales entre 6 chicos.

e) Un chico escoge 3 polos entre 6 distintos.

f) Un chico escoge 3 polos entre 6 iguales.

g) Repartir 6 polos distintos entre 6 chicos.

h) Repartir 3 polos de fresa y 3 de vainilla entre 6 chicos.

Sus soluciones son: C_6^3, P_6, VR_6^3, 1, VR_3^6, V_6^3. Están dadas en otro orden y se pueden repetir.

a) $VR_6^3 = 6^3 = 216$ formas

b) $VR_3^6 = 3^6 = 729$ formas

c) $V_6^3 = 120$ formas

d) $C_6^3 = 20$ formas

e) $V_6^3 = 120$ formas

f) 1 forma

g) $P_6 = 720$ formas

h) $C_6^3 = 20$ formas

Página 246

13. **¿De cuántas formas pueden repartirse 3 entradas para un concierto de rock entre 6 amigos y amigas sin que ninguno pueda llevarse más de una?**

a) Si las entradas no son numeradas.

b) Si las entradas son numeradas y hay una de la primera fila, otra de la fila 10 y otra de la última fila.

a) $C_{6,\,3} = \dfrac{6!}{3! \cdot (6-3)!} = \dfrac{6!}{3! \cdot 3!} = 20$ formas

Como las entradas no son numeradas, no influye el orden en el reparto.

b) $V_{6,\,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ formas

Al ser numeradas las entradas, sí influye el orden.

14. **Para formar un equipo de baloncesto, hacen falta 5 jugadores y el entrenador dispone de 10.**

a) ¿Cuántos equipos distintos puede formar?

b) Si dos jugadores son indiscutibles, ¿de cuántas formas se puede completar el equipo con los ocho restantes?

a) Con 10 jugadores se quieren formar equipos de 5. El orden no influye y no se pueden repetir.

$C_{10,\,5} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 252$ equipos distintos

b) Si el entrenador decide mantener dos jugadores fijos, habrá:

$C_{8,\,3} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$ equipos distintos

15. **Se van a celebrar elecciones en una comunidad de vecinos y hay que elegir al presidente, al secretario y al tesorero.**

¿De cuántas maneras se pueden elegir estos tres cargos, si se presentan ocho candidatos?

No se pueden repetir y, además, influye el orden porque no es lo mismo ser presidente, que secretario, que tesorero.

Son variaciones ordinarias: $V_{8,\,3} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ formas distintas.

16. **Se van a repartir tres regalos entre seis personas. Calcula de cuántas formas se pueden repartir en cada uno de los siguientes casos:**

a) Los regalos son distintos (una bicicleta, unos patines y un chándal) y no puede tocarle más de un regalo a la misma persona.

b) Los regalos son iguales y no puede tocarle más de un regalo a la misma persona.

c) Los regalos son distintos y puede tocarle más de uno a la misma persona.

a) No se pueden repetir los regalos y sí influye el orden porque no es lo mismo que toque una bicicleta, que unos patines, que un chándal.

Son variaciones ordinarias $V_{6,\,3} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ formas

b) Ahora el orden no influye: $C_{6,\,3} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$ formas

c) Pueden repetirse e influye el orden: $VR_{6,\,3} = 6^3 = 216$ formas

17. **Un participante de un concurso tiene que ordenar a ciegas seis tarjetas en las que están escritas las letras de la palabra PREMIO. Si sale la palabra correcta, gana.**

a) ¿Cuántas ordenaciones distintas pueden salir?

b) Le ofrecen fijar la P en el lugar que le corresponde y reducir el premio a la mitad. ¿Cuántas ordenaciones posibles se pueden obtener con las demás?

a) Disponemos de las 6 letras de la palabra PREMIO para agruparlas; ninguna letra está repetida y el orden influye.

$P_6 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ ordenaciones distintas

b) Como P está fija, ahora se dispone de 5 letras:

$P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ ordenaciones distintas.

18. **¿De cuántas formas pueden sentarse tres personas en un banco de 5 asientos?**

¿Y si el banco es de 3 asientos?

No se pueden repetir y el orden influye:

Si el banco es de 5 asientos: $V_{5,\,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ formas.

Si el banco es de 3 asientos: $P_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ formas.

19. **Estás haciendo la maleta para irte de vacaciones y quieres llevarte cuatro de las ocho camisetas que tienes. ¿De cuántas formas las puedes seleccionar?**

No puedes repetirlas y no influye el orden:

$C_{8,\,4} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 70$ formas distintas.

Aplica lo aprendido

20. **El lenguaje de un ordenador se traduce a secuencias de dígitos formados por ceros y unos. Un *byte* es una de estas secuencias y está formado por 8 dígitos.**

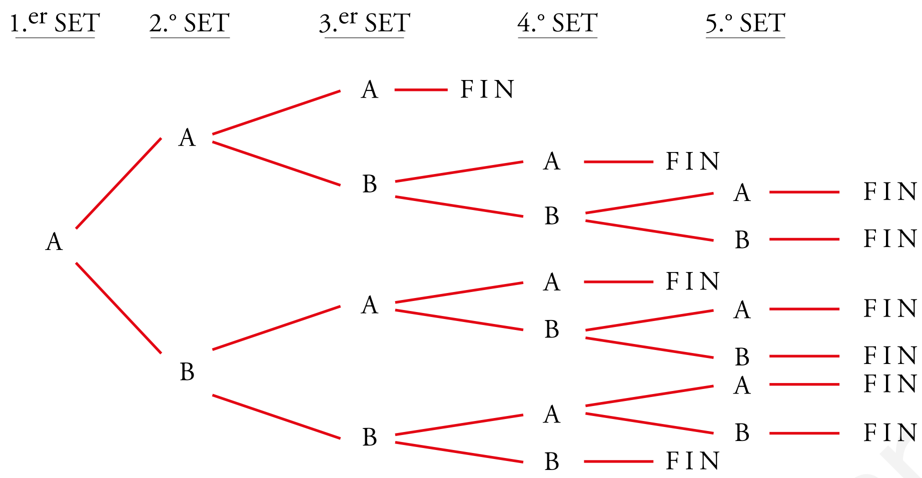
Por ejemplo: $\boxed{0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1}$

¿Cuántos *bytes* diferentes se pueden formar?

Disponemos de dos elementos y los agrupamos de 8 en 8:

Se pueden formar $VR_{2,\,8} = 2^8 = 256$ *bytes* diferentes.

21. **Dos amigos se enfrentan en un torneo de tenis, en el que será vencedor el primero que logre ganar tres sets. ¿De cuántas formas posibles puede desarrollarse el encuentro?**

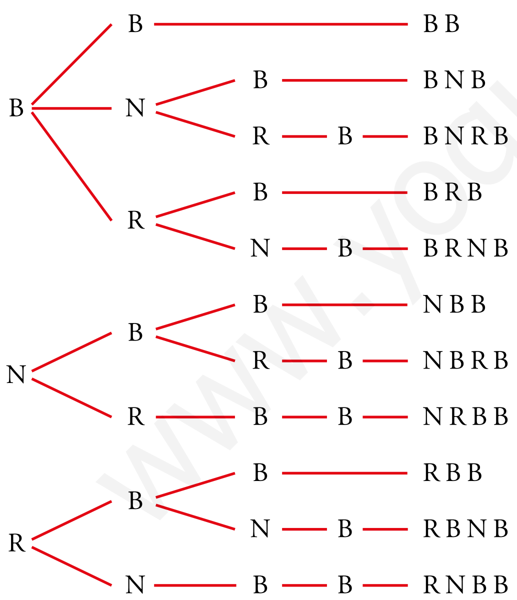


Si el primer set lo gana el jugador B, tenemos un esquema análogo. Por tanto, hay 20 maneras distintas de acabar un partido.

22. **En una urna hay dos bolas blancas, una negra y una roja. Extraemos sucesivamente una bola cada vez y paramos cuando tengamos las dos blancas.**

¿Cuáles son los posibles resultados?

Anotamos en un diagrama en árbol la bola que se saca en cada extracción: blanca (B), negra (N), roja (R).



En total hay 11 posibles resultados.

23. **El número 75775 está formado por dos cincos y tres sietes.**

¿Cuáles son los números que podemos formar con dos cincos y tres sietes? ¿Cuánto vale la suma de todos ellos?

$C_{5,\,3} = \dfrac{5!}{3! \cdot (5-3)!} = \dfrac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$ números diferentes

7	7	7	5	5
7	7	5	7	5
7	7	5	5	7
…	…	…	…	…
5	5	7	7	7

En cada columna, las $\frac{3}{5}$ partes son "sietes" y las $\frac{2}{5}$ partes son "cincos".

Por tanto, la suma de cada columna es:

$\frac{3}{5}$ de $10 \cdot 7 + \frac{2}{5}$ de $10 \cdot 5 = 42 + 20 = 62$

La suma total será (teniendo en cuenta el valor posicional de cada columna):

$62 \cdot 10\,000 + 62 \cdot 1\,000 + 62 \cdot 100 + 62 \cdot 10 + 62 \cdot 1 = 62 \cdot 11\,111 = 688\,882$

24. **Como sabes, una quiniela consta de 14 partidos, en cada uno de los cuales se puede poner 1, X o 2.**

¿Cuántas quinielas distintas se pueden rellenar?

Al hacer una quiniela es importante el orden y podemos repetir resultados. Por tanto:

$VR_{3,\,14} = 3^{14} = 478\,969$ quinielas distintas.

25. **En unos almacenes emplean el siguiente código para marcar los artículos:**

- **La primera cifra indica la sección correspondiente y es un número entre el 1 y el 9.**
- **Después, hay tres cifras, cada una de ellas del 0 al 9, que corresponden al número del proveedor.**

¿Cuántas marcas distintas se pueden hacer?

Por cada cifra correspondiente al proveedor habrá $VR_{10,\,3} = 1\,000$ marcas distintas.

Como hay 9 cifras correspondientes a la sección, en total se podrán hacer $9 \cdot 1\,000 = 9\,000$ marcas distintas.

26. **Las matrículas de los automóviles de cierto país llevan cuatro números y tres letras. Para ello, se utilizan los dígitos del 0 al 9 y 26 letras de nuestro alfabeto.**

¿Cuántas matrículas pueden hacerse de esta forma?

- Con 10 dígitos, agrupados de 4 en 4, y teniendo en cuenta que se pueden repetir y que el orden influye, se pueden formar $VR_{10,\,4} = 10^4 = 10\,000$ agrupaciones distintas.
- Con 26 letras, formando grupos de 3 y considerando que el orden influye y que las letras se pueden repetir, habrá:

  $VR_{26,\,3} = 26^3 = 17\,576$ grupos distintos

Por cada grupo de 4 dígitos habrá 17 576 formas de agrupar las letras.

En total habrá: $VR_{10,\,4} \cdot VR_{26,\,3} = 175\,760\,000$ matrículas.

Página 247

27. **a) Para matricularte en un curso, tienes que elegir dos asignaturas entre las siguientes:**

Música	**Tecnología**	**Teatro**
Dibujo	**Informática**	**Periodismo**

¿De cuántas formas puedes hacer la elección?

b) Si en secretaría te advierten de que las seis asignaturas las escribas por orden de preferencia, ¿de cuántas formas las puedes escribir?

a) No influye el orden y no podemos repetirlas: $C_{6,\,2} = \dfrac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15$ formas distintas

b) $P_6 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ formas diferentes

28. **El profesor de Matemáticas nos ha propuesto diez problemas de los que tenemos que resolver cinco.**

a) ¿Cuántas formas hay de seleccionarlos?

b) De los 10 problemas propuestos hay 2 de los que no tienes "ni idea". Si los descartas, ¿cuántas opciones tienes?

c) Al contrario, dos de los problemas los sabes hacer estupendamente, seguro. Naturalmente los seleccionas. ¿De cuántas formas puedes elegir los demás?

a) No podemos repetirlos y no influye el orden: $C_{10,\,5} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 252$ formas

b) En lugar de elegir entre 10, ahora elegimos entre 8: $C_{8,\,5} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$ formas

c) En lugar de elegir 5 entre 10, ahora elegimos 3 entre 8.

$$C_{8,\,3} = \frac{8!}{3! \cdot (8-3)!} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56 \text{ formas}$$

Resuelve problemas

29. **Las 28 fichas de un dominó se reparten entre cuatro jugadores. ¿Cuántos juegos distintos podrá tener cada jugador?**

Se reparten 7 fichas a cada uno. No se pueden repetir y no influye el orden:

$$C_{28,\,7} = \frac{28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 1\,184\,040$$

30. **a) ¿De cuántas formas se pueden ordenar las letras de la palabra PALOTE?**

b) ¿Cuántas empiezan por P?

c) ¿En cuántas de ellas ocupan las consonantes los lugares impares y las vocales los pares? (Por ejemplo: PATELO).

d) ¿En cuántas están alternadas vocales y consonantes?

Las letras son distintas y el orden influye:

a) $P_6 = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ formas.

b) Si empiezan por P, ahora disponemos de 5 letras y 5 lugares:

$P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ formas

c) Si las consonantes están en los lugares impares: $P_3 = 3 \cdot 2 = 6$ formas.

Las vocales están en los lugares pares: $P_3 = 3 \cdot 2 = 6$ formas.

Por cada forma de las consonantes hay 6 formas de las vocales.

En total hay: $6 \cdot 6 = 36$ formas.

d) Hay 72 formas, porque puede ser C V C V C V (apartado c).

V C V C V C $\rightarrow$ otras 36 formas.

31. **Seis amigos, 3 chicos y 3 chicas, van al cine. ¿De cuántas formas pueden sentarse si quieren estar alternados?**

Este problema es idéntico al apartado d) del ejercicio 30. Por tanto, tienen 72 formas distintas de sentarse.

32. **Señala 8 puntos en una circunferencia. Traza las cuerdas que unen cada punto con todos los demás.**

a) ¿Cuántas cuerdas tendrás que dibujar?

b) ¿Cuántas diagonales tiene un octógono?

a) Tomamos los puntos de dos en dos.

No se pueden repetir y no influye el orden: $C_{8,\,2} = \dfrac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} = 28$ cuerdas

b) El número de diagonales del octógono será el número de cuerdas del apartado a) menos 8 unidades que corresponden a las cuerdas que son los lados del octógono. Por tanto, tendrá $28 - 8 = 20$ diagonales.

33. **Me van a regalar 3 libros y 2 discos por mi cumpleaños. He hecho una lista con los que me gustaría tener, y en ella anoté 5 libros y 8 discos. ¿De cuántas formas distintas pueden elegir mi regalo?**

El número de formas que hay de elegir los tres libros de entre 5 es: $C_{5,\,3} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$

El número de formas que hay de elegir los dos discos de entre 8 es: $C_{8,\,2} = \dfrac{8 \cdot 7}{2} = 28$

Para cada una de las formas que hay de elegir los tres libros tenemos 28 formas de elegir los discos, luego en total hay $28 \cdot 10 = 280$ formas de elegir los tres libros y los dos discos.

34. **Tenemos 5 pesas: de 1 g, 2 g, 4 g, 8 g y 16 g. ¿Cuántas pesadas diferentes se pueden hacer tomando dos de ellas? ¿Y con tres?**

Calcula cuántas pesadas se pueden hacer, en total, tomando 1, 2, 3, 4 o las 5 pesas.

No influye el orden y no se pueden repetir:

$C_{5,\,2} = \dfrac{5 \cdot 4}{2} = 10$ pesadas. $C_{5,\,3} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$ pesadas también.

Tomando 1 pesa, 5 pesadas.

Tomando 2 pesas: $C_{5,\,2} = 10$ pesadas

Tomando 3 pesas: $C_{5,\,3} = 10$ pesadas

Tomando 4 pesas: $C_{5,\,4} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 5$ pesadas

Tomando 5 pesas, 1 pesada.

En total se podrán hacer:

$5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 31$ pesadas

35. **En una pizzería preparan pizzas con, al menos, 4 ingredientes. Si disponen de 6 tipos de ingredientes, ¿cuántos tipos de pizza pueden hacer?**

(Pueden hacerlas de 4, 5 o 6 ingredientes).

Con 4 ingredientes: $C_{6,\,4} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 15$ tipos

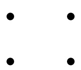
Con 5 ingredientes: $C_{6,\,5} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 6$ tipos

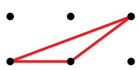
Con 6 ingredientes: $C_{6,\,6} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 1$ tipo

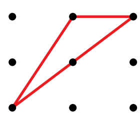
En total se pueden hacer $15 + 6 + 1 = 22$ tipos de pizzas.

Problemas "+"

36. **¿Cuántos triángulos se pueden hacer de modo que tengan los vértices en los puntos de estas redes?**

a) 

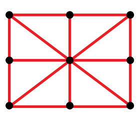
b) 

c) 

a) $C_{4,\,3} = \dfrac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 4$ triángulos

b) $C_{6,\,3} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$. Necesitamos tres puntos no alineados para construir un triángulo. En dos de los 20 casos los puntos están alineados, es decir, se pueden construir $20 - 2 = 18$ triángulos.

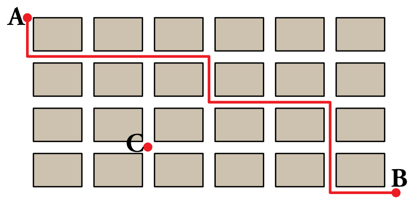
c) $C_{9,\,3} = \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84$



En este caso nos encontramos con 8 casos en los que no es posible construir un triángulo (3 puntos alineados).

En total podemos construir $84 - 8 = 76$ triángulos.

37. **Observa esta cuadrícula:**



a) ¿Cuántos caminos de longitud mínima hay para ir de A a B?

b) ¿Cuántos hay para ir de A a B, pasando por C?

a) Hay que ir seis veces a la derecha (D) y cuatro veces hacia abajo (I).

Los caminos serán de la forma DDDIIDIDID, es decir, se trata de colocar cuatro I en diez lugares.

Para ir de A a B hay: $C_{10,\,4} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$ caminos

b) Para ir de A a C solo puede irse dos veces a la derecha (D) y tres veces hacia abajo (I). Los caminos serán de la forma DDIID, por ejemplo. Se trata de colocar dos I en cinco lugares.

Es decir: $C_{5,\,2} = \dfrac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$ caminos

Análogamente, hay: $C_{5,\,1} = \dfrac{5}{1} = 5$ caminos para ir de C a B.

Para ir de A a B, pasando por C, hay $10 \cdot 5 = 50$ caminos.

38. **Un secretario escribe cinco cartas distintas a cinco personas. También escribe los cinco sobres correspondientes pero mete al azar cada carta en un sobre.**

a) ¿De cuántas formas posibles se pueden meter las cartas en los sobres?

b) ¿En cuántos casos la carta del señor Pérez estará dentro de su sobre?

a) No puede repetirlas y sí influye el orden: $P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ formas posibles.

b) Si fijamos la carta del señor Pérez en el sobre del señor Pérez, nos quedan libres cuatro cartas y cuatro sobres: $P_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ casos.

39. **Calcula cuántos productos distintos se pueden obtener tomando tres factores entre las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7, si:**

a) No se pueden repetir cifras.

b) Sí se pueden repetir cifras.

a) $C_7^3 = \dfrac{7 \cdot 6 \cdot 5}{6} = 35$ posibles expresiones con tres factores distintos.

Pero como en el enunciado nos piden "productos", es decir, los resultados de las multiplicaciones, y $3 \cdot 2 = 6 \cdot 1$, hemos de suprimir algunas posibilidades:

$$3 \cdot 2 \cdot x \begin{cases} x = 4 \\ x = 5 \\ x = 7 \end{cases} \text{ coinciden, respectivamente, con } 6 \cdot 1 \cdot x \begin{cases} x = 4 \\ x = 5 \\ x = 7 \end{cases}$$

Por tanto, el número de posibles productos es $35 - 3 = 32$.

b) Cuando los factores pueden repetirse, la contabilidad de "expresiones con tres factores" es mucho más complicada:

Estas son las posibilidades en las que interviene algún 1:

EXPRESIÓN	$1 \cdot 1 \cdot a$	$1 \cdot 2 \cdot a$	$1 \cdot 3 \cdot a$	$1 \cdot 4 \cdot a$	$1 \cdot 5 \cdot a$	$1 \cdot 6 \cdot a$	$1 \cdot 7 \cdot a$	
a PUEDE VALER	De 1 a 7	De 2 a 7	De 3 a 7	De 4 a 7	De 5 a 7	6 o 7	7	
POSIBILIDADES	7	6	5	4	3	2	1	TOTAL: 28

Posibilidades en las que interviene algún 2:

EXPRESIÓN	$2 \cdot 2 \cdot a$	$2 \cdot 3 \cdot a$	$2 \cdot 4 \cdot a$	$2 \cdot 5 \cdot a$	$2 \cdot 6 \cdot a$	$2 \cdot 7 \cdot a$	
a PUEDE VALER	De 2 a 7	De 3 a 7	De 4 a 7	De 5 a 7	6 o 7	7	
POSIBILIDADES	6	5	4	3	2	1	TOTAL: 21

Posibilidades en las que interviene algún 3:

EXPRESIÓN	$3 \cdot 3 \cdot a$	$3 \cdot 4 \cdot a$	$3 \cdot 5 \cdot a$	$3 \cdot 6 \cdot a$	$3 \cdot 7 \cdot a$	
a PUEDE VALER	De 3 a 7	De 4 a 7	De 5 a 7	6 o 7	7	
POSIBILIDADES	5	4	3	2	1	TOTAL: 15

Continuamos contando, de la misma forma, para el resto de cifras:

ALGÚN 4	$4 \cdot 4 \cdot a$	$4 \cdot 5 \cdot a$	$4 \cdot 6 \cdot a$	$4 \cdot 7 \cdot a$	
a PUEDE VALER	De 4 a 7	De 5 a 7	6 o 7	7	
POSIBILIDADES	4	3	2	1	TOTAL: 10

ALGÚN 5	$5 \cdot 5 \cdot a$	$5 \cdot 6 \cdot a$	$5 \cdot 7 \cdot a$	
a PUEDE VALER	De 5 a 7	6 o 7	7	
POSIBILIDADES	3	2	1	TOTAL: 6

ALGÚN 6	$6 \cdot 6 \cdot a$	$6 \cdot 7 \cdot a$	
a PUEDE VALER	6 o 7	7	
POSIBILIDADES	2	1	TOTAL: 3

ALGÚN 7	$7 \cdot 7 \cdot a$	
a PUEDE VALER	7	
POSIBILIDADES	1	TOTAL: 1

Hay $28 + 21 + 15 + 10 + 6 + 3 + 1 = 84$ posibles expresiones de 3 factores, iguales o distintos.

¿Cuáles se repiten en el momento de efectuar la multiplicación?

Son iguales los siguientes productos: $2 \cdot 2 = 1 \cdot 4$ y $2 \cdot 3 = 1 \cdot 6$

$2 \cdot 2 \cdot a = 1 \cdot 4 \cdot a$, donde $a = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. Hay 7 casos.

$2 \cdot 3 \cdot a = 1 \cdot 6 \cdot a$, donde $a = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. Hay 7 casos.

Por tanto, el número de posibles productos (resultados de las multiplicaciones) es $84 - 7 - 7 = 70$.

40. **Construye, usando las fórmulas, la 9.ª fila del triángulo de Tartaglia y, a partir de ella, la 10.ª.**

$\binom{9}{0} = 1$

$\binom{9}{1} = 9$

$\binom{9}{2} = \frac{9!}{2! \cdot 7!} = \frac{9 \cdot 8}{2 \cdot 1} = 36$

$\binom{9}{3} = \frac{9!}{3! \cdot 6!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84$

$\binom{9}{4} = \frac{9!}{4! \cdot 5!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126$

Aplicamos ahora las propiedades de los números combinatorios:

$\binom{9}{5} = \binom{9}{4} = 126$

$\binom{9}{6} = \binom{9}{3} = 84$

$\binom{9}{7} = \binom{9}{2} = 36$

$\binom{9}{8} = \binom{9}{1} = 9$

$\binom{9}{9} = \binom{9}{0} = 1$

Por tanto, la décima línea es:

$\binom{10}{0} = 1$

$\binom{10}{1} = \binom{9}{0} + \binom{9}{1} = 1 + 9 = 10$

$\binom{10}{2} = \binom{9}{1} + \binom{9}{2} = 9 + 36 = 45$

$\binom{10}{3} = \binom{9}{2} + \binom{9}{3} = 36 + 84 = 120$

$\binom{10}{4} = \binom{9}{3} + \binom{9}{4} = 84 + 126 = 210$

$\binom{10}{5} = \binom{9}{4} + \binom{9}{5} = 126 + 126 = 252$

$\binom{10}{6} = \binom{10}{4} = 210$

$\binom{10}{7} = \binom{10}{3} = 120$

$\binom{10}{8} = \binom{10}{2} = 45$

$\binom{10}{9} = \binom{10}{1} = 10$

$\binom{10}{10} = \binom{10}{0} = 1$

Página 248

Lee e investiga

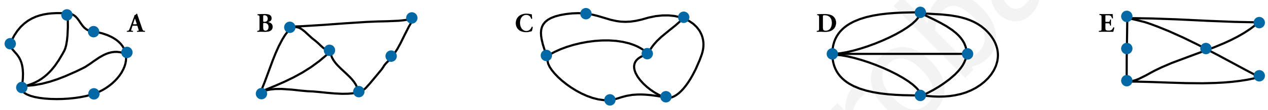
I Ching

- **¿Cuántos mensajes distintos tiene el *I Ching*? Es decir, ¿cuántos mensajes distintos se pueden escribir si cada símbolo es un *Yang* o un *Yin*?**

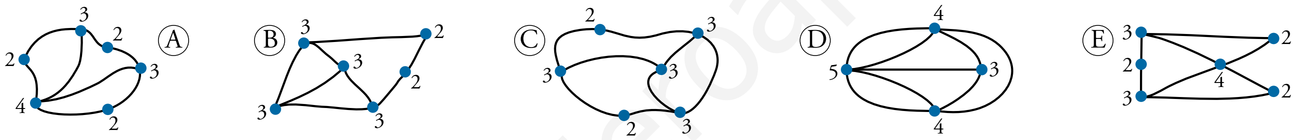
  El número de mensajes coincide con todas las formas de tomar los dos símbolos *Yang* y *Yin* en lotes de 6. Es decir, $VR_{2,\,6} = 2^6 = 64$ mensajes distintos.

Los puentes de Königsberg

- **¿Cuáles de estos gráficos se pueden dibujar sin levantar el lápiz del papel y sin repetir ningún tramo?**



  Se pueden dibujar así el A, el D y el E.



- **Supón que los tramos se pueden deformar, alargar y acortar. ¿Qué dos se pueden transformar, uno en otro?**

  Se pueden transformar, uno en el otro, el A y el E.

Página 249

Entrénate resolviendo problemas

- **¿Cuántos partidos hay que jugar para completar un campeonato de tenis, por eliminatorias, con 16 jugadores? ¿Y con 32? ¿Y con 64?**

  ¿Y con 90 jugadores? (En la primera ronda tendríamos que eliminar a 26 jugadores para que queden 64. Esto se consigue seleccionando a 52 jugadores para que jueguen 26 partidos y clasificando a los restantes directamente a la siguiente ronda).

  ¿Y con 133?

  Mirando las soluciones de los ejercicios anteriores, ingéniatelas para decir cuántos partidos se necesitan para llevar a cabo un torneo por eliminatorias con n jugadores.

  Si echamos bien las cuentas, observamos que:

  16 jugadores → 15 partidos

  32 jugadores → 31 partidos

  64 jugadores → 63 partidos

  90 jugadores → 89 partidos

  133 jugadores → 132 partidos

  Es decir, en cada opción, se juega un partido menos que jugadores participan. ¿Por qué?

  En cada partido de elimina un jugador, y solo uno. Como hay que eliminarlos a todos, excepto al campeón, es necesario jugar tantos partidos como eliminados haya, es decir, un partido menos que competidores haya.

  Si hubiese n jugadores, serían necesarios $n - 1$ partidos.

- **Imagina que tienes en un bolsillo estas cuatro monedas (2 €, 1 €, 0,50 € y 0,20 €):**

  ¿Cuántas cantidades diferentes de dinero puedes formar con ellas?

  Con una moneda se pueden formar 4 cantidades diferentes:

2 €	1 €	0,50 €	0,20 €

  Con dos monedas, 6 cantidades diferentes:

3 €	2,50 €	2,20 €	1,50 €	1,20 €	0,70 €

  Con tres monedas, el mismo número de cantidades que con una, 4. Solo tenemos que pensar en qué moneda no cogemos:

3,50 €	3,20 €	2,70 €	1,70 €

  Con cuatro monedas solo hay 1 forma:

3,70 €

  En total son 4 + 6 + 4 + 1 = 15 formas.

- **Queremos juntar 6 € utilizando solo monedas de 2 €, 1 € y 0,50 €.**
  ¿De cuántas maneras podemos hacerlo?

2 €	1 €	0,50 €	
3	0	0	1 forma
2	2	2	3 formas
2	1	2	
2	0	4	
1	4	0	5 formas
1	3	2	
1	2	4	
1	1	6	
1	0	8	
0	6	0	7 formas
0	5	2	
0	4	4	
0	3	6	
0	2	8	
0	1	10	
0	0	12	

Podemos hacerlo de 16 formas distintas.

- **Supón que dispones, exclusivamente, de sellos cuyos valores son 0,10 € y 0,20 €.**
  Con esos sellos tienes tres formas distintas de franquear una carta de 0,40 €:

  0,10 + 0,10 + 0,10 + 0,10 = 0,40

  0,10 + 0,10 + 0,20 = 0,40

  0,20 + 0,20 = 0,40

  ¿De cuántas formas distintas podrás franquear una carta de 2 €?

  ¿Y una carta de *n* €?

  • Una carta de 2 € se puede franquear con 20 sellos de 0,10 €.

  Podríamos sustituir dos sellos de 0,10 € por uno de 0,20 €, y esto podemos hacerlo con una, dos, tres, …, hasta 10 parejas de sellos de 0,10 €.

  Por tanto, hay 11 formas de franquear la mencionada carta.

  • Una carta de n € se puede franquear con $10n$ sellos de 0,10 €.

  Podríamos sustituir dos sellos de 0,10 € por uno de 0,20 €, y esto podemos hacerlo con una, dos, tres, …, hasta $\frac{n}{2}$ parejas de sellos de 0,10 €.

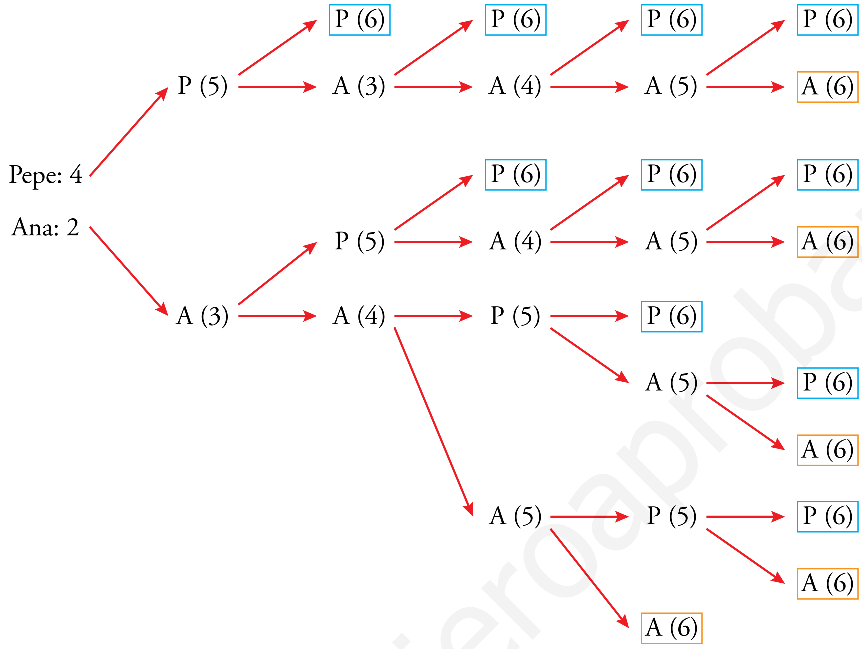
  Por tanto, hay $10\frac{n}{2} + 1 = 5n + 1$ formas de hacerlo.

Autoevaluación

1. Ana y Pepe están jugando un torneo de ajedrez que ganará el primero que venza en 6 partidas. Las tablas (empates) no cuentan.

Pepe va ganando 4 a 2. Haz un diagrama en árbol que describa todas las posibles continuaciones.

Marcamos en cada caso el ganador del torneo con un recuadro:



2. En un examen, el profesor ha puesto 7 problemas, de los que hay que elegir 5.

a) ¿Cuántas elecciones se puede plantear un alumno?

b) Si Carlos tiene claro que elegirá tres de ellos, ¿cuántas posibilidades le quedan para los otros dos?

a) $C_{7,\,5} = \dfrac{V_{7,\,5}}{P_5} = 21$

b) La elección de Carlos se reduce a seleccionar 2 de los 4 problemas restantes.

$C_{4,\,2} = \dfrac{4 \cdot 3}{2} = 6$ posibles elecciones

3. ¿Cuántos números de cuatro cifras se pueden hacer con los dígitos 1, 2 y 3? ¿Cuál es la suma de todos ellos?

$VR_{3,\,4} = 3^4 = 81$ números

En cada columna de la siguiente serie de 81 números habrá $\frac{1}{3}$ de "1", $\frac{1}{3}$ de "2" y $\frac{1}{3}$ de "3":

1	1	1	1
1	1	1	2
1	1	2	1
…	…	…	…
3	3	3	3

Por tanto, la suma de cada columa será:

$$\frac{1}{3} \text{ de } 81 \cdot 1 + \frac{1}{3} \text{ de } 81 \cdot 2 + \frac{1}{3} \text{ de } 81 \cdot 3 = 27 + 54 + 81 = 162$$

Sumando todas las columnas, teniendo en cuenta el valor posicional de cada una de ellas, obtenemos:

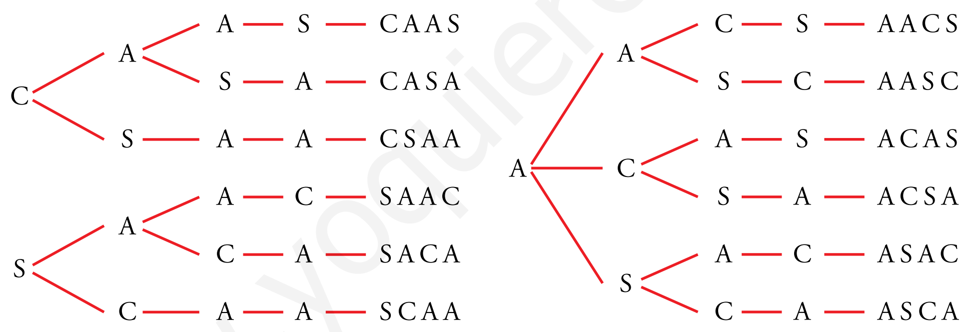
$162 \cdot 1\,000 + 162 \cdot 100 + 162 \cdot 10 + 162 = 162 \cdot 1\,111 = 179\,982$

4. ¿De cuántas formas podemos elegir al delegado y al subdelegado de un curso en el que hay siete candidatos?

$V_{7,\,2} = 7 \cdot 6 = 42$ formas de elección.

5. Con las letras de la palabra CASA, ¿cuántas ordenaciones, con o sin sentido, podemos formar? Escríbelas todas.

Anotamos en un diagrama de árbol las posibilidades de cada letra de la palabra:



En total, podemos formar 12 ordenaciones.

6. ¿Cuántos números capicúas de 5 cifras hay?

Hay diez formas distintas de elegir la cifra central (3.ª).

Hay diez formas distintas de elegir las cifras 2.ª y 4.ª.

Hay nueve formas distintas de elegir las cifras 1.ª y 5.ª.

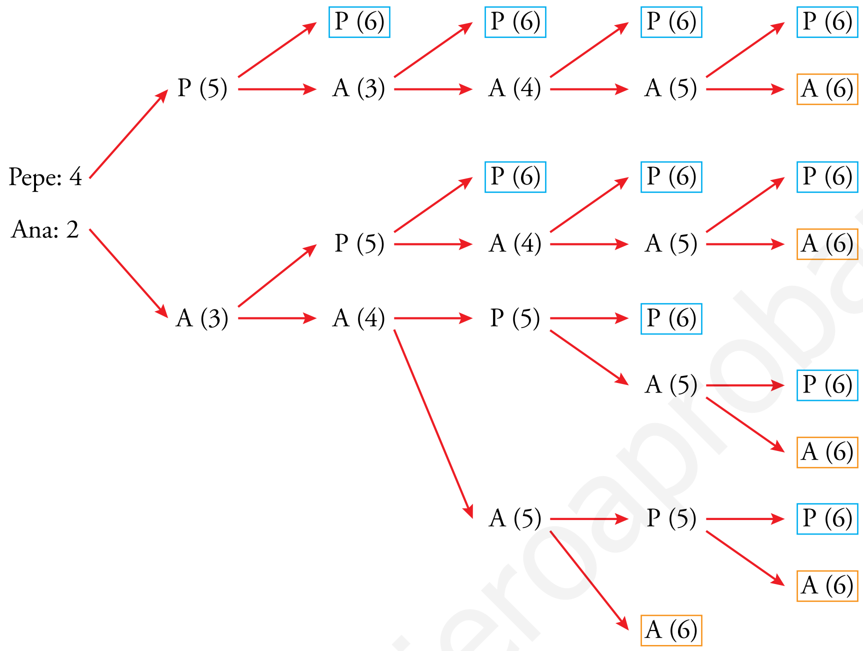
Hay, en total, 900 capicúas de 5 cifras.

Autoevaluación

1. **Ana y Pepe están jugando un torneo de ajedrez que ganará el primero que venza en 6 partidas. Las tablas (empates) no cuentan.**

Pepe va ganando 4 a 2. Haz un diagrama en árbol que describa todas las posibles continuaciones.

Marcamos en cada caso el ganador del torneo con un recuadro:



2. **En un examen, el profesor ha puesto 7 problemas, de los que hay que elegir 5.**

a) ¿Cuántas elecciones se puede plantear un alumno?

b) Si Carlos tiene claro que elegirá tres de ellos, ¿cuántas posibilidades le quedan para los otros dos?

a) $C_{7,\,5} = \dfrac{V_{7,\,5}}{P_5} = 21$

b) La elección de Carlos se reduce a seleccionar 2 de los 4 problemas restantes.

$C_{4,\,2} = \dfrac{4 \cdot 3}{2} = 6$ posibles elecciones

3. **¿Cuántos números de cuatro cifras se pueden hacer con los dígitos 1, 2 y 3? ¿Cuál es la suma de todos ellos?**

$VR_{3,\,4} = 3^4 = 81$ números

En cada columna de la siguiente serie de 81 números habrá $\frac{1}{3}$ de "1", $\frac{1}{3}$ de "2" y $\frac{1}{3}$ de "3":

1	1	1	1
1	1	1	2
1	1	2	1
…	…	…	…
3	3	3	3

Por tanto, la suma de cada columa será:

$$\frac{1}{3} \text{ de } 81 \cdot 1 + \frac{1}{3} \text{ de } 81 \cdot 2 + \frac{1}{3} \text{ de } 81 \cdot 3 = 27 + 54 + 81 = 162$$

Sumando todas las columnas, teniendo en cuenta el valor posicional de cada una de ellas, obtenemos:

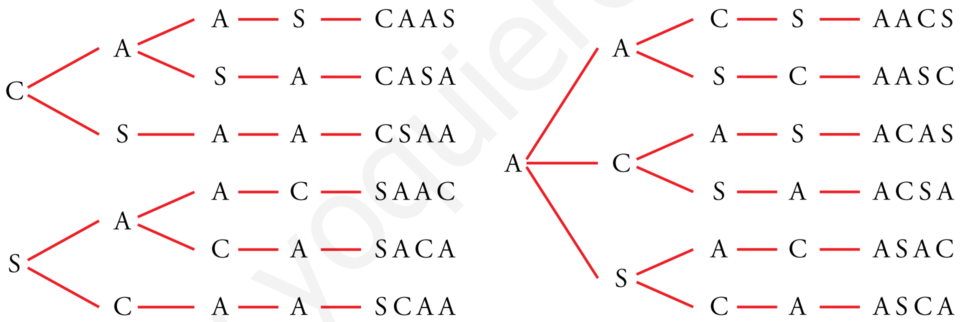
$162 \cdot 1\,000 + 162 \cdot 100 + 162 \cdot 10 + 162 = 162 \cdot 1\,111 = 179\,982$

4. **¿De cuántas formas podemos elegir al delegado y al subdelegado de un curso en el que hay siete candidatos?**

$V_{7,\,2} = 7 \cdot 6 = 42$ formas de elección.

5. **Con las letras de la palabra CASA, ¿cuántas ordenaciones, con o sin sentido, podemos formar? Escríbelas todas.**

Anotamos en un diagrama de árbol las posibilidades de cada letra de la palabra:



En total, podemos formar 12 ordenaciones.

6. **¿Cuántos números capicúas de 5 cifras hay?**

Hay diez formas distintas de elegir la cifra central (3.ª).

Hay diez formas distintas de elegir las cifras 2.ª y 4.ª.

Hay nueve formas distintas de elegir las cifras 1.ª y 5.ª.

Hay, en total, 900 capicúas de 5 cifras.