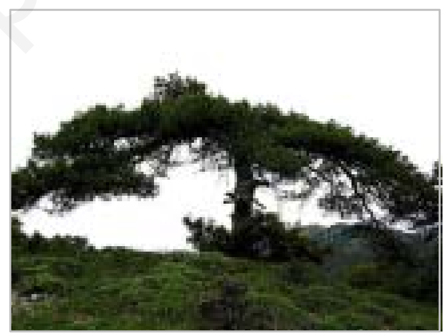
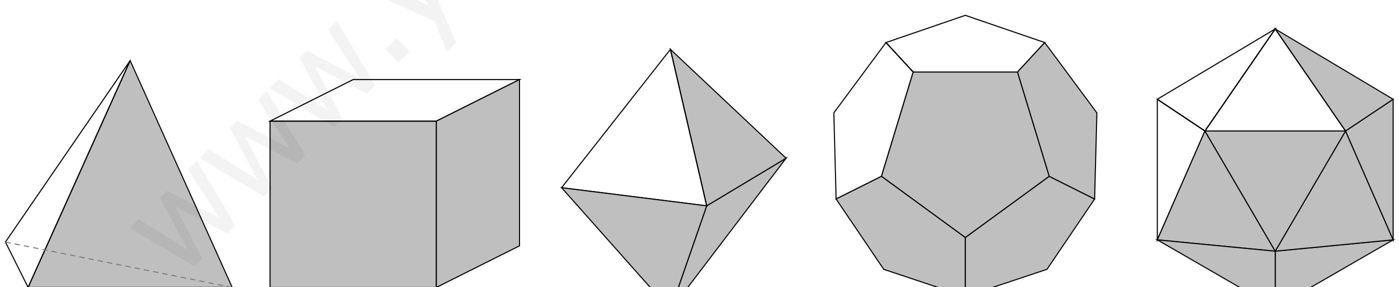
MATEMÁTICAS CCSS

MATEMÁTICAS CCSS

MATEMÁTICAS CCSS

SELECTIVIDAD MURCIA





tetraedro cubo octaedro dodecaedro icosaedro

3 de noviembre de 2010

Germán Ibáñez
http://www.otrapagina.com/matematicas

Septiembre 2010

- CUESTIÓN A.1 En una empresa se producen dos tipos de artículos A y B, en cuya elaboración intervienen tres departamentos: cortado, montaje y embalado. Cada departamento trabaja 8 horas al día y mientras el producto A requiere sólo una hora de montaje y media de embalado, el producto B requiere dos horas de cortado y una de embalado. El beneficio que se obtiene por cada unidad de A es de 40 euros y por cada unidad de B de 35 euros. ¿Cómo debe distribuirse la producción diaria para maximizar el beneficio?

selcs Sep 2010 Solución:

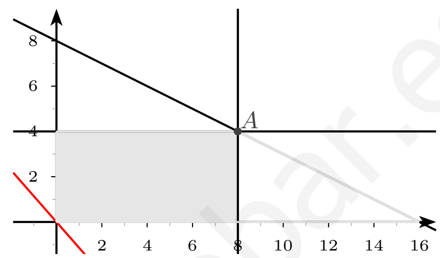
Sean:
x = número de artículos A
y = número de artículos B
Ganancia: $f(x,y) = 40x + 35y$ euros

$$\left.\begin{array}{ll} \text{cortado} & 2y \leq 8 \\ \text{montaje} & x \leq 8 \\ \text{embalado} & \frac{1}{2}x + y \leq 8 \end{array}\right\}$$

Representamos: $\dfrac{1}{2}x + y \leq 8$ $\begin{array}{c|cc} x & 0 & 16 \\ \hline y & 8 & 0 \end{array}$

Ahora la función igualada a 0:

$f(xy) = 40x + 35y = 0$ $\begin{array}{c|cc} x & 0 & -7 \\ \hline y & 0 & 8 \end{array}$



Para maximizar los ingresos tomaríamos la paralela a $f(x,y) = 0$ que pasa por el punto A que sería la más alejada: comprobemos los valores correspondientes a esos puntos:

$A(8,4)$; $\quad f(8,4) = 40 \cdot 8 + 35 \cdot 4 = 460$

Por tanto el máximo beneficio resulta de fabricar 8 artículos A y fabricar 4 artículos B.

- CUESTIÓN A.2 Dada la curva de ecuación: $y = \dfrac{3x^2 - 5x - 6}{x^2 - x - 2}$ calcular:

  a) Dominio

  b) Asíntotas

selcs Sep 2010 Solución:

a) Dominio: Anulamos el denominador:

$$x^2 - x - 2 = 0 \quad \begin{array}{l} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{array}$$

Por tanto: Dominio $= R - \{-1, 2\}$

b) Asíntotas: Rectas tangentes en el infinito

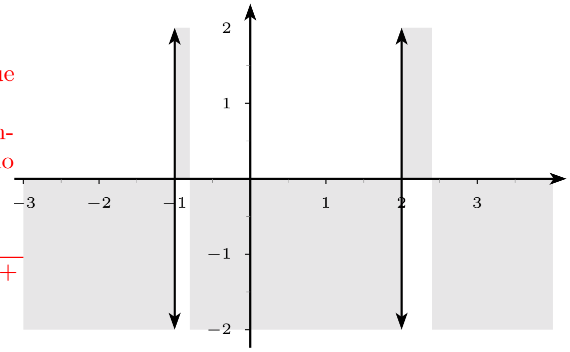
- verticales valores de x en los que la función se va a infinito:
  Asíntotas verticales, valores de x que anulan al denominador: $x = -1, x = 2$. Pero hemos de comprobar que el numerador no tiene alguna raíz común: $3x^2 - 5x - 6 = 0$ $\begin{array}{l} x_1 = \frac{5-\sqrt{97}}{6} = -0'808 \\ x_2 = \frac{5+\sqrt{97}}{6} = 2'47 \end{array}$

  Por tanto son asíntotas verticales $x = -1, x = 2$.

- Asíntota horizontal $y = n$: $\quad n = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2 - 5x - 6}{x^2 - x - 2} = 3$
  Luego la asíntota horizontal es $y = 3$

Con el regionamiento podemos saber el lado por el que la curva se acerca a la asíntota:
Para ello consideramos las raíces del numerador y denominador: resulta que delimitan región de cambio de signo de y : $x=-1, x=-0'808, x=2, x=2'47$

x		-1		$-0'808$		2		$2'47$	
y	$+$		$-$		$+$		$-$		$+$



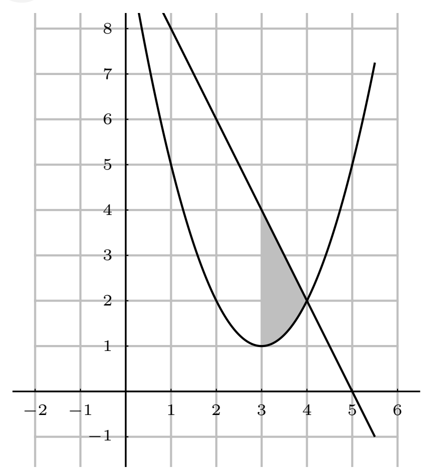
- CUESTIÓN A.3 Calcular el área comprendida entre la curva $y=x^2-6x+10$, el eje OX y las rectas $x=3$ y $y=-2x+10$. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.

  selcs Sep 2010 Solución:

  Buscamos los puntos de corte de las dos funciones:
  $\begin{cases} y=x^2-6x+10 \\ y=-2x+10 \end{cases}$
  $x^2-6x+10=-2x+10; \quad x^2-4x=0; \quad x=0, x=4$

  Área= $\displaystyle\int_3^4$ recta −parábola =

  $dx=\int_3^4(-x^2+4x) \quad dx=\left[-\frac{x^3}{3}+2x\right]_3^4=\frac{5}{3}u^2$



- CUESTIÓN A.4 Una fábrica de jabón recibe de tres proveedores A, B y C agua destilada en botellas en la proporción 80 %, 15 % y 5 % respectivamente. El control de calidad de la fábrica estima que debido a la mayor o menor impureza del agua deja pasar los tipos A, B y C con una probabilidad de 1, 0.4 y 0.03 respectivamente. ¿Qué probabilidad hay de que el control de calidad deje pasar una botella cualquiera?

  selcs Sep 2010 Solución:

  Teorema de la probabilidad total:

  Sea A el suceso botella que proviene de A: "botella de tipo A", $p(A)=0'80$

  Sea B el suceso botella que proviene de B:"botella de tipo B", $p(B)=0'15$

Sea C el suceso botella que proviene de C:"botella de tipo C", $p(C) = 0'05$

$\{A, B, C\}$ forman sistema completo de sucesos.

Sea D el suceso "pasar el control de calidad"

$p(D) = p(D/A) \cdot p(A) + p(D/B) \cdot p(B) + (D/C) \cdot p(C) = 1 \cdot 0'80 + 0'4 \cdot 0'15 + 0'03 \cdot 0'05 = 0'8615$

- CUESTIÓN A.5 Se sabe que el precio de los libros de bachiller es una variable aleatoria normal con media 38.2 euros y desviación típica de 5.25 euros. Una muestra aleatoria simple de 16 libros de Química de distintas editoriales tiene un precio medio de 42.3 euros. Se quiere decidir si existe diferencia significativa entre la media del precio de los libros de Química y la media del precio de los libros de bachiller en general con un nivel de significación $\alpha = 0{,}05$.

  selcs Sep 2010 Solución:

  Contrastamos $H_0 : \mu = 38'2$ frente a $H_1 : \mu \neq 38'2$,

  La desviación típica es $\sigma = 5'25$

  El nivel de significación $\alpha = 0'05$, corresponde con $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$.

  El intervalo de aceptación es $\mu \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu \pm 1'96 \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 38'2 \pm 1'96 \dfrac{5'25}{\sqrt{16}} = 38'2 \pm 0'3726 = \begin{cases} 40'7725 \\ 35'6275 \end{cases}$

  que da el intervalo $(35'6275, 40'7725)$.

  Como $\bar{x} = 42'3$ queda fuera del intervalo, se rechaza la hipótesis nula de que $\mu = 38'2$ € , cabe pensar que hay una diferencia significativa entre el precio medio de los libros de Química y el de los libros de bachiller en general.

- CUESTIÓN B.1 Calcular la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

  selcs Sep 2010 Solución:

  Ejercicio ya propuesto en junio 2007 cuestión 1.A

- CUESTIÓN B.2 ¿Cuál es el número que al sumarlo con 25 veces su inverso se obtiene un valor mínimo?

  selcs Sep 2010 Solución:

Sea x el número

La función a minimizar es: $S(x) = x + 25 \cdot \dfrac{1}{x}$ mínimo

Derivamos: $S'(x) = 1 - \dfrac{25}{x^2} = \dfrac{x^2 - 25}{x^2}$

Anulamos la derivada: $\dfrac{x^2 - 25}{x^2} = 0; \quad x^2 - 25 = 0; \quad x = \pm 5$

La solución es $x = 5$ comprobemos que es mínimo viendo el crecimiento:

x		5	
y'	$-$		$+$
y	$\searrow$		$\nearrow$
		MÍNIMO	

- CUESTIÓN B.3 Calcular el área del recinto limitado por la parábola de ecuación $y = 4x - x^2$ e $y = x$. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.

selcs Sep 2010 Solución:

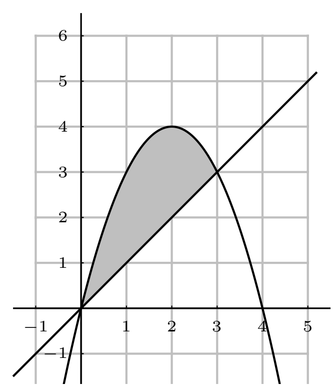
Al ser una parábola para representar hallamos los puntos de corte con OX se hace $y = 0$ y resulta: $\quad 4x - x^2 = 0 \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4 \end{cases}$

Los puntos de corte entre la recta y la parábola son:

$4x - x^2 = 0 \quad \begin{cases} y = 4x - x^2 \\ y = x \end{cases} \qquad 4x - x^2 = x; \quad 3x - x^2 = 0; \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 3 \end{cases}$

$$S = \int_0^3 \text{parábola} - \text{recta} \; = \int_0^3 3x - x^2 dx = \left[\frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{9}{2} = 4'5u^2$$

El área total encerrada es por tanto $4'5u^2$



- CUESTIÓN B.4 Una comisión delegada de cierto ayuntamiento está formado por 10 concejales de los cuáles 5 pertenecen al partido A, 4 al B y 1 al C. Se eligen 3 personas al azar y sucesivamente de dicha comisión.

  a) Calcular la probabilidad de que las tres pertenezcan al partido A.

  b) Calcular la probabilidad de que las tres pertenezcan al partido C.

selcs Sep 2010 Solución:

Se puede entender el planteamiento de dos maneras "sucesivamente con devolución" y "sucesivamente sin devolución":

I) Sucesivamente con devolución: entonces las probabilidades permanecen inalteradas en las sucesivas elecciones: $p(A) = \dfrac{5}{10}, p(A) = \dfrac{4}{10}, p(A) = \dfrac{1}{10}$. La probabilidades de los sucesos que pide son:

a) $p($ "tres del partido A" $) = \dfrac{5}{10} \cdot \dfrac{5}{10} \cdot \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{8}$

b) $p($ "tres del partido C" $) = \dfrac{1}{10} \cdot \dfrac{1}{10} \cdot \dfrac{1}{10} = \dfrac{1}{1000}$

II) Sucesivamente sin devolución: entonces las probabilidades varían en las sucesivas elecciones: La probabilidades de los sucesos que pide son:

a) $p($ "tres del partido A" $) = \dfrac{5}{10} \cdot \dfrac{4}{9} \cdot \dfrac{3}{8} = \dfrac{1}{12}$

b) $p($ "tres del partido C" $)$ es suceso imposible, luego su probabilidad es 0.

- CUESTIÓN B.5 Se está observando la asistencia anual a congresos de los profesionales de la medicina. Se sabe que la variable aleatoria es normal con desviación típica igual a 4 veces por año. Se toma una muestra de 70 profesionales de la medicina cuya asistencia media es de 3 veces por año. Dar un intervalo de confianza al 98 % para la media de la asistencia anual a congresos de todos los profesionales de medicina.

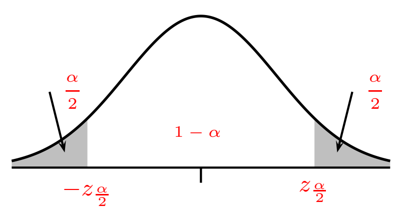
selcs Sep 2010 Solución:

Los datos son: $\bar{x} = 3, \sigma = 4, n = 70$.
El nivel de confianza es 98 %, como no es usual, tenemos que buscar en las tablas de la normal el valor crítico que corresponde. Para el 98 %, corresponde buscar en las tablas una probabilidad 0'9900, el valor que más se aproxima es 2'33: $p(X \leq x_0) = 0'9900, \quad x_0 = 2'33$
El valor crítico es por tanto $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'33$.

Entonces el intervalo de confianza tiene de extremos: $\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} =$

$3 \pm 2'33 \cdot \dfrac{4}{\sqrt{70}} = 3 \pm 1'1139 \begin{cases} 1{,}8861 \\ 4'1139 \end{cases}$

El intervalo de confianza para la media de asistencias anuales a congresos es $(1{,}8861, 4'1139)$



Junio 2010

- CUESTIÓN A.1 En una encuesta realizada por una televisión local se ha detectado que un programa con 20 min. de variedades y un minuto de publicidad capta 30.000 espectadores, mientras que otro programa con 10 min. de variedades y un minuto de publicidad capta 10.000 espectadores. Para un determinado período, la dirección de la red decide dedicar como máximo 80 min. de variedades y 6 min. de publicidad. ¿Cuántas veces deberá aparecer cada programa con objeto de captar el máximo número de espectadores?

  selcs Jun 2010 Solución:

  Sean:
  $x =$ número de veces que aparece el programa de 20 min. de variedades y un minuto de publicidad
  $y =$ número de veces que aparece el programa de 10 min. de variedades y un minuto de publicidad
  Número de espectadores en miles: $f(x,y) = 30x + 10y$

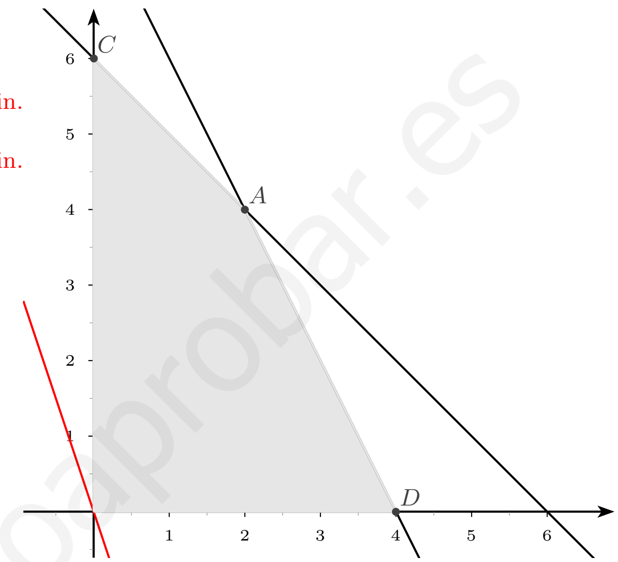
  $$\begin{cases} \text{variedades} & 20x + 10y \leq 80 \\ \text{publicidad} & x + y \leq 6 \end{cases}$$

  Representamos: $20x + 10y \leq 80$ $\quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & 4 \\ \hline y & 8 & 0 \end{array}$

  $x + y \leq 6$ $\quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & 6 \\ \hline y & 6 & 0 \end{array}$

  Ahora la función igualada a 0:

  $f(xy) = 30x + 10y = 0$ $\quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & -1 \\ \hline y & 0 & 3 \end{array}$

  Para maximizar el número de espectadores tomaríamos la paralela a $f(x,y) = 0$ que pasa por el punto A o D que sería la más alejada: comprobemos los valores correspondientes a esos puntos:

  $A(2,4)$; $\quad f(2,4) = 30 \cdot 2 + 10 \cdot 4 = 100$

  $D(4,0)$; $\quad f(4,0) = 30 \cdot 4 + 6 \cdot 00 = 120$

  Por tanto el máximo número de espectadores se produce emitiendo 4 veces el programa de 20 min. de variedades y un minuto de publicidad y ninguna el otro.

- CUESTIÓN A.2 Dada la curva de ecuación $y = \dfrac{x-2}{x^2+2x-3}$ calcular:

  a) Dominio

  b) Asíntotas

  selcs Jun 2010 Solución:

  a) Dominio: Anulamos el denominador:

  $x^2 + 2x - 3 = 0 \quad \begin{array}{l} x_1 = -3 \\ x_2 = 1 \end{array}$

  Por tanto: Dominio $= R - \{-3, 1\}$

  b) Asíntotas: Rectas tangentes en el infinito

  - verticales valores de x en los que la función se va a infinito:
    Asíntotas verticales, valores de x que anulan al denominador: $x = -3, x = 1$

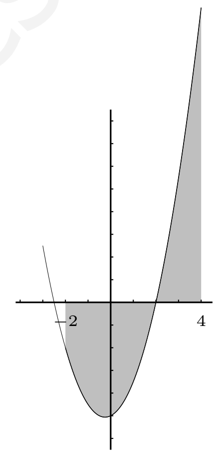
  - Asíntota horizontal $y = n$: $\quad n = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-2}{x^2+2x-3} = 0$
    Luego la asíntota horizontal es $y = 0$

Con el regionamiento podemos saber el lado por el que la curva se acerca a la asíntota:
Para ello consideramos las raíces del numerador y denominador: resulta que delimitan región de cambio de signo de y : $x=-3, x=1, x=2$

x		-3		1		2	
y	$-$		$+$		$-$		$+$

- CUESTIÓN A.3 Calcular el área comprendida entre la curva $y=3x^2+2x-16$, el eje OX y las rectas $x=-2$ y $x=4$. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.

  selcs Jun 2010 Solución:

  Al ser una parábola para representar hallamos los puntos de corte con OX se hace $y=0$ y resulta: $3x^2+2x-16=0$;

  $x=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+4\cdot 3\cdot 16}}{6}=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+192}}{6}=\dfrac{-2\pm\sqrt{196}}{6}\quad \begin{cases} x_1=\frac{-2+14}{6}=2 \\ x_2=\frac{-2-14}{6}=-\frac{8}{3}\end{cases}$

  $S_1:\quad \displaystyle\int_{-2}^{2} 3x^2+2x-16dx=\left[x^3+x^2-16\,x\right]_{-2}^{2}=-48u^2$

  $S_2=\displaystyle\int_{2}^{4} 3x^2+2x-16dx=\left[x^3+x^2-16\,x\right]_{2}^{4}=36u^2$

  El área total encerrada es por tanto $84u^2$

- CUESTIÓN A.4 Una fábrica de coches tiene tres cadenas de producción A, B y C. La cadena A fabrica el 50 % del total de coches producidos, la B el 25 % y la C el resto. La probabilidad de que un coche resulte defectuoso es: 1/2 en la cadena A, 1/4 en la cadena B y 1/6 en la cadena C. Calcular la probabilidad de que un coche elegido al azar sea defectuoso.

  selcs Jun 2010 Solución:

  Llamamos D al suceso " ser defectuoso".

  Llamamos A al suceso "coche fabricado en la cadena A"; $p(A)=\dfrac{50}{100}$

  Llamamos B al suceso "coche fabricado en la cadena B" ; $p(A)=\dfrac{25}{100}$

  Llamamos C al suceso "coche fabricado en la cadena C"; $p(A)=\dfrac{25}{100}$

  $\{A,B,C\}$ forman sistema completo de sucesos.

  Por el Teorema de la probabilidad total

  $p(D)=p(D/A)\cdot p(A)+p(D/B)\cdot p(B)++(D/C)\cdot p(C)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{50}{100}+\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{25}{100}+\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{25}{100}=\dfrac{17}{48}=0'35416$

- CUESTIÓN A.5 A una muestra aleatoria de 100 alumnos de segundo de bachillerato se les hizo una prueba de madurez, obteniendo una media muestral de 205 puntos. Suponiendo que la puntuación obtenida en la prueba de madurez es una variable aleatoria normal, ¿entre qué límites se encuentra la madurez media de los alumnos de segundo de bachillerato con un nivel de confianza de 0.99 si la varianza de la población es de 576?

selcs Jun 2010 Solución:

Los datos son: $\bar{x} = 205, \sigma^2 = 576, n = 100$.

Para el nivel de confianza del 99 % corresponde el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'58$.

Entonces el intervalo de confianza tiene de extremos:

$\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 205 \pm 2'58 \cdot \dfrac{\sqrt{576}}{\sqrt{100}} = 205 \pm \dfrac{12}{5} = 205 + 2'4 \begin{cases} 202'6 \\ 207'4 \end{cases}$

El intervalo de confianza para la madurez media es $(202'6, 207'4)$

- CUESTIÓN B.1 Dado el sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} x + 2z = 0 \\ x + y + 2z = -\lambda \\ 2x + 3y = \lambda \end{cases}$$

a) Resolverlo para $\lambda = 3$

b) Estudiarlo para cualquier valor de λ.

selcs Jun 2010 Solución:

a)

Para $\lambda = 3$ resulta $\begin{cases} x + 2z = 0 \\ x + y + 2z = -3 \\ 2x + 3y = 3 \end{cases}$

que tiene como matriz asociada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

y triangulando por Gauss resulta:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 12 \end{pmatrix}$$

que sustituyendo hacia arriba da como soluciones: $z = -3, \quad y = -3, \quad x = 6$.

b)

Tiene como matriz asociada:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -\lambda \\ 2 & 3 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

y triangulando por Gauss resulta:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -\lambda \\ 2 & 3 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{array}{l} 2^a - 1^a \\ 3^a + 1^a \times (-2) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda \\ 0 & 3 & -4 & \lambda \end{pmatrix} \; 3^a + 2^a \times (-3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda \\ 0 & 0 & -4 & 4\lambda \end{pmatrix}$$

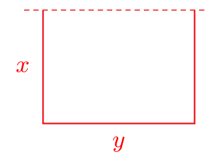
que sustituyendo hacia arriba da como soluciones:

$z = -\lambda, y = -\lambda, x = 2\lambda$ que sirve para cualquier valor de λ

- CUESTIÓN B.2 Un terrateniente posee unos terrenos al borde de un río. Allí desea cercar una parcela y montar una playa privada con todo tipo de servicios. Para ello dispone de 4000 metros de alambrada. ¿Cuál es la superficie máxima, de forma rectangular, que puede cercar y cuál la longitud de ribera apta para el baño?

selcs Jun 2010 Solución:

Superficie: $S = x \cdot y$ máxima
Longitud: $2x + y = 4000$. Despejamos y:
$y = 4000 - 2x$
Sustituyendo en S: $S(x) = x(4000 - 2x) = 4000x - 2x^2$ máxima



Ahora anulamos la derivada:

$S'(x) = 4000 - 4x = 0; \quad x = 1000$

Por las condiciones del enunciado la solución es 1000, hagamos no obstante el estudio del crecimiento en ese punto:

x		1000	
$S'(x)$	$+$		$-$
$S(x)$	$\nearrow$	MAX	$\searrow$

la longitud de ribera apta para el baño es $y = 4000 - 2 \cdot 1000 = 2000$ m

la superficie máxima rectangular que puede cercar es $S = 1000 \cdot 2000 = 2000000$ m^2

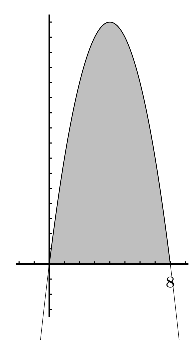
- CUESTIÓN B.3 Calcular el área del recinto limitado por la parábola de ecuación $y = -x^2 + 8x$ y el eje OX. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.

selcs Jun 2010 Solución:

Para representar hallamos los puntos de corte con OX se hace $y = 0$ y resulta:
$-x^2 + 8x = 0$;

$$x(-x + 8) = 0 \quad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 8 \end{cases}$$

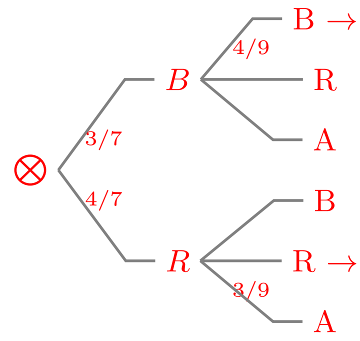
$$S = \int_0^8 -x^2 + 8x dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 8\frac{x^2}{2} \right]_0^8 = \frac{256}{3} u^2$$



- CUESTIÓN B.4 En un cajón de un armario, Juan guarda desordenadamente 3 pares de calcetines blancos y 4 pares de calcetines rojos; en otro cajón guarda 4 corbatas blancas, 3 rojas y 2 azules. Para vestirse saca al azar del primer cajón un par de calcetines y del segundo una corbata. Hallar la probabilidad de que los calcetines y la corbata sean del mismo color.

selcs Jun 2010 Solución:

A partir del diagrama en árbol, sumando las probabilidades correspondientes a las dos ramas:
$p($ el mismo color$) = \frac{3}{7}.\frac{4}{9} + \frac{4}{7}.\frac{3}{9} = \frac{8}{21} = 0'38095$



- CUESTIÓN B.5 Se sabe que las calificaciones de los alumnos de segundo de bachiller en matemáticas es una variable aleatoria normal de media 5.5 y varianza 1.69. Se extrae una muestra aleatoria de 81 alumnos que cursan el bachiller bilingüe obteniéndose una media muestral de 6.8 puntos en las calificaciones de dichos alumnos en la asignatura de matemáticas. Se quiere decidir si existe una diferencia significativa entre la media de las calificaciones en matemáticas de los alumnos del bachiller bilingüe y la media de las calificaciones en matemáticas de los alumnos de segundo de bachiller en general con un nivel de significación $\alpha = 0'01$

selcs Jun 2010 Solución:

Contrastamos $H_0 : \mu = 5'5$ frente a $H_1 : \mu \neq 5'5$,

La desviación típica es $\sigma = \sqrt{1'69} = 1'3$

El nivel de significación $\alpha = 0'01$, corresponde con $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'58$.

El intervalo de aceptación es $\mu \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu \pm 2'58 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 5'5 \pm 2'58 \frac{1'3}{\sqrt{81}} = 5'5 \pm 0'3726 = \left\{ \begin{array}{l} 5'8726 \\ 5'1274 \end{array} \right.$

que da el intervalo $(5'127, 5'872)$.

Como $\bar{x} = 6'8$ queda fuera del intervalo, se rechaza la hipótesis nula de que $\mu = 5'5$ gr., cabe pensar que hay una diferencia significativa entre la media de las calificaciones en matemáticas de los alumnos del bachiller bilingüe y la media de las calificaciones en matemáticas de los alumnos de segundo de bachiller en general.

Septiembre 2009

- CUESTIÓN 1.A. Un señor acertó cinco números en la lotería primitiva, dos de los cuales eran el 23 y el 30. Propuso a sus hijos que si averiguaban los otros tres, se podrían quedar con el premio. La suma del primero con el segundo excedía en dos unidades al tercero; el segundo menos el doble del primero era diez unidades menor que el tercero y la suma de los tres era 24. ¿Cuáles son los tres números que faltan?

  selcs Sept 2009 Solución:

  Sean de los tres números que faltan:

  x un número

  y otro número

  z el número restante

  las condiciones se pueden expresar:

  $\left\{\begin{array}{l} x+y=z+2 \\ y-2x=z-10 \\ x+y+z=24 \end{array}\right.$ reordenando $\left\{\begin{array}{l} x+y-z=2 \\ -2x+y-z=-10 \\ x+y+z=24 \end{array}\right.$

  Tiene como matriz asociada:

  $$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & -1 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & -24 \end{array}$$

  Que triangulando por Gauss resulta:

  $$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & -66 \end{array}$$

  que sustituyendo hacia arriba da como soluciones: $z=11, \quad y=9, \quad x=4$.

  Estos son los tres números que faltan.

- CUESTIÓN 1.B. Una escuela prepara una excursión para cuatrocientos alumnos. La empresa de transportes dispone de ocho autocares de cuarenta plazas y diez de cincuenta plazas, pero sólo dispone de nueve conductores. El alquiler de un autocar grande es de ochenta euros y el de uno pequeño de sesenta euros.

  a) Calcular cuántos autocares de cada tipo hay que utilizar para que la excursión resulte lo más económica posible para la escuela.

  b) ¿Cuántas plazas sobrarán?

  Identificar en el planteamiento las variables, las restricciones y la función a optimizar.

  selcs Sept 2009 Solución:

$x =$ número de autobuses de 40 plazas
$y =$ número de autobuses de 50 plazas
Precio total: $f(x,y) = 60x + 80y$ € buscamos el mínimo

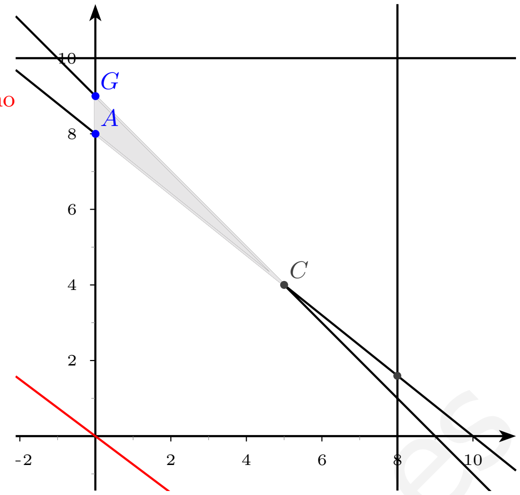
$$\begin{cases} 40x + 50y \geq 400 \\ x \leq 8 \\ y \leq 10 \\ x + y \leq 9 \end{cases}$$

Representamos:

$$\begin{cases} 40x + 50y \geq 400 & \begin{array}{c|cc} x & 0 & 10 \\ \hline y & 8 & 0 \end{array} \\ x + y \leq 9 & \begin{array}{c|cc} x & 0 & 9 \\ \hline y & 9 & 0 \end{array} \end{cases}$$

Ahora la función igualada a 0:

$$f(xy) = 60x + 80y = 0 \quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & -4 \\ \hline y & 0 & 3 \end{array}$$



Para minimizar el precio tomaríamos la paralela a $f(x,y) = 0$ que pasa por el punto $C(5,4)$, o sea 5 autobuses de 40 plazas y 4 de 50 plazas, entonces el importe sería: $f(5,4) = 60 \cdot 5 + 80 \cdot 4 = 620$ € .

Con ello el total de plazas contratadas sería de : $5 \cdot 40 + 4 \cdot 50 = 400$, no sobra ninguna.

- CUESTIÓN 2.A. Dada la curva de ecuación $y = \dfrac{3x^2}{x^2+1}$ determinar:

a) Dominio

b) Máximos y mínimos

c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento

d) Asíntotas

selcs Sept 2009 Solución:

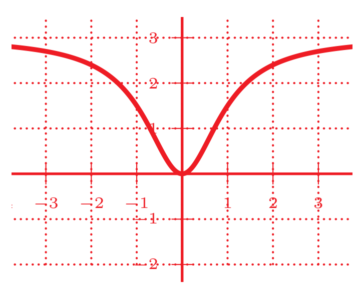
a) Dominio y regionamiento: El denominador no se anula nunca luego el dominio es R
El numerador y el denominador son siempre positivos luego la función es siempre positiva.

b) Puntos de corte con los ejes: Anulamos cada variable:
con $OY : x = 0$, resulta $y = 0$

con $OX : y = 0$, resulta el mismo

c) Asíntotas: Rectas tangentes en el infinito
verticales valores de x en los que la función se va a infinito:
Asíntotas verticales, no podemos anular el denominador, no hay.

Asíntota horizontal $y = n$: $n = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \dfrac{3x^2}{x^2+1} = 3; \quad y = 3$



d) Extremos y crecimiento: $f'(x) = \dfrac{6x}{(x^2+1)^2}$ Se anula para $x = 0$

$$\begin{array}{c|c|c} x & & 0 & \\ \hline y' & - & & + \\ \hline y & \searrow & & \nearrow \end{array}$$

MÍNIMO

- CUESTIÓN 2.B.

Dada la parábola de ecuación $y = x^2 - 8x + 12$ hallar el punto en el que la recta tangente es paralela al eje de abscisas.

selcs Sept 2009 Solución:

Que la recta tangente a la parábola sea paralela al eje de abcisas supone que su pendiente es cero, por tanto buscamos el punto de la parábola en que se anula su derivada:

$f'(x) = 2x - 8 = 0; \quad x = 4$ la ordenada del punto es $f(4) = 16 - 32 + 12 = -4$

El punto buscado es $(4, -4)$

- CUESTIÓN 3.A.

Hallar dos números cuya suma sea 20, sabiendo que su producto es máximo. Razonar el método utilizado.

selcs Sept 2009 Solución:

Sean los números $x, \quad 20 - x$

El producto $f(x) = x \cdot (20 - x) = 20x - x^2$ ha de ser máximo.

Derivamos y anulamos la derivada: $f'(x) = 20 - 2x = 0$ Tiene de solución $x = 10$, comprobemos que es máximo con el crecimiento:

x		10	
y'	$+$		$-$
y	$\nearrow$	MÁXIMO	$\searrow$

- CUESTIÓN 3.B.

Calcular el área de la región del plano comprendida entre las curvas $y = 4 - x^2$ e $y = 3x^2$. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.

selcs Sept 2009 Solución:

Buscamos los puntos de corte de las dos funciones, $f: \quad y = 4 - x^2; \quad g: \quad y = 3x^2$:

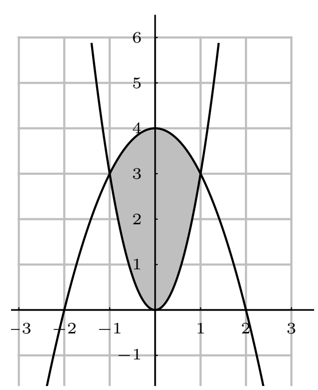
$$\begin{cases} y = 4 - x^2 \\ y = 3x^2 \end{cases}$$

$3x^2 = 4 - x^2; \quad 4x^2 = 4; \quad x = \pm 1$

Área $= 2 \cdot S_1$ $S_1 = \int_0^1$ f - g =

$S_1 = \int_0^1 (4 - 4x^2) \quad dx = \left[4x - \frac{4x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{8}{3}$

Área $= \frac{16}{3} u^2$

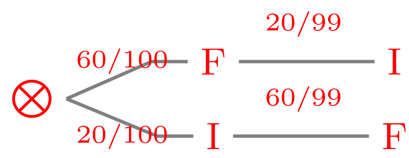


- CUESTIÓN 4.A.

A un congreso de científicos asisten cien congresistas, de ellos ochenta hablan francés y cuarenta hablan inglés. ¿Cuál es la probabilidad de que dos congresistas elegidos al azar no puedan entenderse sin intérpretes?

selcs Sept 2009 Solución:

Como todos hablan algún idioma por tanto hay 20 que hablan los dos idiomas:
Llamamos I al suceso "saber sólo inglés" son 20 de los cien
Llamamos F al suceso "saber sólo francés" son 60 de los cien
Llamamos B al suceso "saber los dos idiomas" son 20 de los cien



Sumando las probabilidades de las dos ramas: $p($ no entenderse $) = \frac{60}{100}.\frac{20}{99} + \frac{20}{100}.\frac{60}{99} = 0'24$

- CUESTIÓN 4.B.

En un I.E.S. se realizan dos competiciones deportivas: baloncesto y fútbol. El 20 % de los alumnos participan en la de baloncesto, de los cuáles el 40 % son de primero de bachillerato y el 30 % participan en la de fútbol, de los cuáles el 25 % son de primer curso de bachillerato. Ningún alumno puede participar en dos competiciones.

Elegido al azar un alumno, ¿cuál es la probabilidad de que sea de segundo de bachillerato?

selcs Sept 2009 Solución:

Teorema de la Probabilidad Total

Sea I ser de 1º de Bachiller, sea II ser de 2º de Bachiller.

Sea B participar en baloncesto, dicen que $p(B) = 0'2$ y F participar en fútbol, dicen que $p(F) = 0'3$.

Como $p(I/B) = 0'4$ en consecuencia: $p(II/B) = 0'6$

Como $p(I/F) = 0'25$ en consecuencia: $p(II/F) = 0'75$

Entonces por el teorema mencionado:

$p(II) = p(II/B) \cdot p(B) + p(II/F) \cdot p(F) = 0'6 \cdot 0'2 + 0'75 \cdot 0'3 = 0'27$

- CUESTIÓN 5.A.

El promedio de las puntuaciones obtenidas en historia por un número elevado de alumnos es de 6,50 puntos. Un determinado curso se examinaron cincuenta alumnos obteniendo una puntuación promedio de 7,25 puntos. Suponiendo que la variable puntuación obtenida en historia es una normal con desviación típica igual a uno, ¿podemos afirmar con un nivel de significación de 0,05 que variaron las calificaciones?

selcs Sept 2009 Solución:

Test bilateral

El nivel de significación $\alpha = 0'05$, corresponde con $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$.

El intervalo de aceptación es $\mu \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu \pm 1'96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 6'5 \pm 1'96 \frac{1}{\sqrt{50}} = 6'5 \pm 0'277 = \left\{ \begin{array}{l} 6'7771 \\ 6'2229 \end{array} \right.$

que da el intervalo $(6'222, 6'777)$.

Como $\bar{x} = 7'25$ queda fuera del intervalo, se rechaza la hipótesis nula de que $\mu = 6'5$, hay motivo para pensar que han cambiado las calificaciones.

- CUESTIÓN 5.B.

Una muestra aleatoria simple de veinticinco estudiantes responden a una prueba de inteligencia espacial, obteniendo una media de cien puntos. Se sabe que la variable inteligencia espacial de todos los alumnos es una variable normal con una desviación típica igual a diez, pero se desconoce la media. ¿Entre qué límites se hallará la verdadera inteligencia espacial media de todos los alumnos, con un nivel de confianza de 0,99?

selcs Sept 2009 Solución:

Los datos son: $\bar{x} = 100, \sigma = 10, n = 25$.

Para el nivel de confianza del 99 % corresponde el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'58$.

Entonces el intervalo de confianza tiene de extremos: $\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 100 \pm 2'58 \cdot \dfrac{10}{\sqrt{25}} = 100 \pm 5'16 \begin{cases} 105'16 \\ 94'84 \end{cases}$

El intervalo de confianza para la media μ es $(94'84, 105'16)$

Junio 2009

- CUESTIÓN 1.A.

  Estudiar el siguiente sistema para los distintos valores de λ y resolverlo para el valor $\lambda = 1$

  $$\begin{cases} x + y - z = \lambda \\ x - y + 2z = 1 \\ 2x + y + \lambda z = 0 \end{cases}$$

  selcs Jun 2009 Solución:

  La matriz asociada al sistema es:

  $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & k \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & k & 0 \end{pmatrix}$$

  Iniciamos Gauus triangulando:

  $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & k \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & k & 0 \end{pmatrix} \{2^a - 1^a; 3^a + 1^a \times (-2)\} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & k \\ 0 & -2 & 3 & 1-k \\ 0 & -1 & k+2 & -2k \end{pmatrix} \{3^a \times (-2) + 2^a\} =$$

  $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & -3 & 1-k \\ 0 & 0 & -2k-1 & 1+3k \end{pmatrix}$$

  una vez triangulada volvemos a sistema

  $$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2y - 3z = 1 - k \\ (-2k-1)z = 1 + 3k \end{cases} \quad \text{resulta despejando y sustituyendo de abajo hacia arriba}$$

  $(-2k-1)z = 1 + 3k; \quad z = \dfrac{1+3k}{-2k-1}$ que solo no se puede efectuar si se anula el denominador, por tanto:

  Si $k \neq \dfrac{-1}{2}$ el sistema tiene solución única, es compatible determinado

  Si $k = \dfrac{-1}{2}$, el sistema no tiene solución, el sistema es incompatible.

  Resolvemos para $k = 1$ $\quad \begin{cases} x - y + z = -1 \\ 2y - 3z = 0 \\ -3z = 4 \end{cases}$

  Luego $z = \dfrac{-4}{3}$ sustituyendo de abajo hacia arriba y despejando

  $y = \dfrac{3z}{2} = \dfrac{3\frac{-4}{3}}{2} = -2; \quad x = 1 + y - z = 1 - 2 + \dfrac{4}{3} = \dfrac{5}{3}$

- CUESTIÓN 1.B.

  Un atleta debe tomar por lo menos 4 unidades de vitamina A, 6 unidades de vitamina B y 23 de vitamina C cada día. Existen en el mercado dos productos, P_1 y P_2, que en cada bote contienen las siguientes unidades de esas vitaminas:

	A	B	C
P_1	4	1	6
P_2	1	6	10

  Si el precio de un bote del producto P_1 es de 100 euros y el de un bote del producto P_2 es de 160 euros, averiguar:

a) ¿Como deben mezclarse ambos productos para obtener la dieta deseada con el mínimo precio?

b) ¿Que cantidad tomara de cada vitamina si decide gastar lo menos posible?

selcs Jun 2009 Solución:

$x =$ número de botes del producto P_1
$y =$ número de botes del producto P_2

$$\begin{cases} 4x + y \geq 4 \\ x + 6y \geq 6 \\ 6x + 10y \geq 23 \end{cases}$$

Coste: $f(x, y) = 100x + 160y$

Representamos:

$4x + y \geq 4$

x	0	1
y	4	0

$x + 6y \geq 6$

x	0	6
y	1	0

$6x + 10y \geq 23$

x	0	$3'8$
y	$2'3$	0

Ahora la función igualada a 0:

$f(xy) = 100x + 160y = 0$

x	0	$-1'6$
y	0	1

Para minimizar hallamos y probamos los puntos B y C

$$\begin{cases} 4x + y = 4 \\ 6x + 10y = 23 \end{cases} \quad B = (0'5, 2) \quad f(0'5, 2) = 100 \cdot 0'5 + 160 \cdot 2 = 370$$

$$\begin{cases} x + 6y = 6 \\ 6x + 10y = 23 \end{cases} \quad C = (3, 0'5) \quad f(3, 0'5) = 100 \cdot 3 + 160 \cdot 0'5 = 380$$

a) Por tanto para minimizar el coste debe mezclar medio bote de P_1con 2 botes de P_2.

b) Vitamina A: $0'5 \cdot 4 + 2 \cdot 1 = 4$ unidades

Vitamina A: $0'5 \cdot 1 + 2 \cdot 6 = 12'5$ unidades

Vitamina A: $0'5 \cdot 6 + 2 \cdot 10 = 23$ unidades

- CUESTIÓN 2.A.

La función $f(x) = x^3 + px^2 + q$ tiene un valor mínimo relativo igual a 3 en el punto de abscisa $x = 2$. Hallar los valores de los parámetros p y q .

selcs Jun 2009 Solución:

Que la función $f(x) = x^3 + px^2 + q$ tenga un mínimo en el punto $(2, 3)$ se desdobla en dos condiciones:

Pasa por el punto $(2, 3)$ luego $f(2) = 3$ por tanto $2^3 + p \cdot 2 + q = 3, \quad 8 + 4p + q = 3 \quad 4p + q = -5$

La derivada $f'(x) = 3x^2 + 2px$ se anula en $x = 2$, luego $f'(2) = 0, \quad 12 + 4p = 0$ despejando $p = \dfrac{-12}{4} = -3$

Sustituyendo en la ecuación anterior: $4(-3) + q = -5, \quad q = 7$

La función es: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7$

- CUESTIÓN 2.B.

Dada la curva $y = \dfrac{x + 1}{x^2 + x - 2}$ calcular:

a) El dominio.

b) Las asíntotas.

c) Hacer una representación gráfica de la misma.

selcs Jun 2009 Solución:

a) Dominio y regionamiento: $y = \dfrac{x+1}{x^2+x-2}$

Anulamos el denominador:

$x^2+x-2=0 \quad \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = -2 \end{array}$

Por tanto: Dominio $= R - \{1, -2\}$

b) Puntos de corte con los ejes: Anulamos cada variable:

con $OY : x = 0$, resulta $y = -\dfrac{1}{2}$

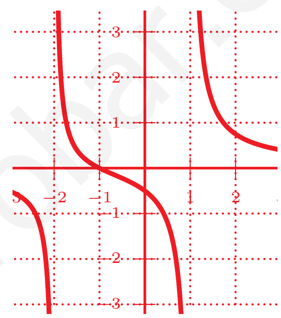
con $OX : y = 0$, resulta $x + 1 = 0, \quad x = -1$

c) Asíntotas: Rectas tangentes en el infinito

verticales valores de x en los que la función se va a infinito: Asíntotas verticales, valores de x que anulan al denominador: $x = -1, x = 2$

Asíntota horizontal $y = n$: $n = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x+1}{x^2+x-2} = 0; \quad y = 0$

d) Extremos y crecimiento: $f'(x) = \dfrac{x^2+2x+3}{(x^2+x-2)^2}$ Anulamos: $x^2+2x+3=0$ no tiene solución, luego la derivada es siempre positiva y por tanto la función es siempre creciente



- CUESTIÓN 3.A.

Hallar las dimensiones de un campo rectangular de 3600 metros cuadrados de superficie para poderlo cercar con una valla de longitud minima.

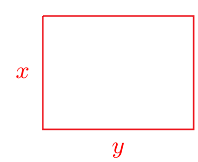
selcs Jun 2009 Solución:

Longitud: $L = 2x + 2y$ mínima

Área: $x \cdot y = 3600$. Despejamos y:

$y = \dfrac{3600}{x}$

Sustituyendo en L: $L(x) = 2x + 2\dfrac{3600}{x}$ mínima



Ahora anulamos la derivada:

$L'(x) = 2 - 2\dfrac{3600}{x^2} = \dfrac{2x^2 - 2\cdot 3600}{x^2} = 0; \quad x^2 = 3600, \quad x = \pm 60$

Por las condiciones del enunciado la solución es 60, hagamos no obstante el estudio del crecimiento en ese punto:

x		60	
$L'(x)$	$+$		$-$
$L(x)$	$\nearrow$	MIN	$\searrow$

- CUESTIÓN 3.B.

Calcular el área del recinto limitado por la parábola de ecuación $y = 4 - x^2$ y la recta $y = x + 2$. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.

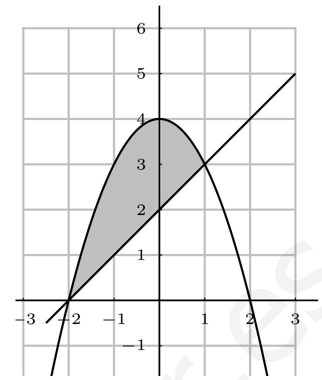
selcs Jun 2009 Solución:

Buscamos los puntos de corte de las dos funciones: $\left\{ \begin{array}{l} y = 4 - x^2 \\ y = x + 2 \end{array} \right.$

$4 - x^2 = x + 2; \quad x^2 + x - 2 = 0; \quad x = 1, x = -2$

Área= $\displaystyle\int_{-2}^{1}$ parábola −recta =

$dx = \int_{-2}^{1} (-x^2 - x + 2) \quad dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-2}^{1} = \frac{9}{2} u^2$



- CUESTIÓN 4.A.

  En un centro escolar los alumnos pueden optar por cursar como lengua extranjera ingles o francés. En un determinado curso el 90 % de los alumnos estudia inglés y el resto francés. El 30 % de los alumnos que estudian inglés son varones. De los que estudian francés, el 40 % son chicos. Elegido un alumno al azar, ¿cual es la probabilidad de que sea chica?

  selcs Jun 2009 Solución:

  Teorema de la Probabilidad Total

  Sea I ser de Inglés,dicen que $p(I) = 0'9$, sea F ser de Francés, en consecuencia: $p(F) = 0'1$.

  Sea V ser varón, y M ser mujer.

  Como $p(V/I) = 0'3$ en consecuencia: $p(M/I) = 0'7$

  Como $p(V/F) = 0'4$ en consecuencia: $p(M/F) = 0'6$

  Entonces por el teorema mencionado:

  $p(M) = p(M/I) \cdot p(I) + p(M/F) \cdot p(F) = 0'7 \cdot 0'9 + 0'6 \cdot 0'1 = 0'55$

- CUESTIÓN 4.B.

  Se estima que la probabilidad de que un jugador de balonmano marque un gol al lanzar un tiro de siete metros es del 75 %. Si en un partido le corresponde lanzar tres de estos tiros, calcular:

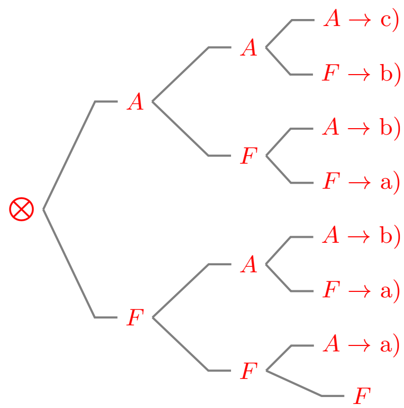
  a) la probabilidad de marcar un gol tras realizar los tres lanzamientos

  b) la probabilidad de marcar dos goles tras realizar los tres lanzamientos

  c) la probabilidad de marcar tres goles tras realizar los tres lanzamientos

  d) la probabilidad de marcar solo en el primer lanzamiento

  selcs Jun 2009 Solución:



a) Entendemos exactamente 1 acierto entre los tres lanzamientos: hay tres ramas que lo cumplen: $p($ un acierto $= 3 \cdot 0'75 \cdot 0'25^2 = 0'140625$

b) Entendemos exactamente 2 acierto entre los tres lanzamientos: hay tres ramas que lo cumplen: $p($ dos acierto $= 3 \cdot 0'75^2 \cdot 0'25 = 0'421875$

c) Es la primera rama: $p($ tres acierto $= 0'75^3 = 0'421875$

d) Es la rama $\otimes \quad A \quad \to \quad F \quad \to \quad F$, luego $p($ solo un acierto en el primero $= 3 \cdot 0'75 \cdot 0'25^2 = 0'046875$

- CUESTIÓN 5.A.

  El numero de accidentes mortales en una ciudad es, en promedio, de doce mensuales. Tras una campaña de señalización y adecentamiento de las vías urbanas, se contabilizaron en seis meses sucesivos 8, 11, 9, 7, 10 y 9 accidentes mortales. Suponiendo que el numero de accidentes mortales en dicha ciudad tiene una distribución normal con una desviación típica igual a 1,3 ¿podemos afirmar que la campana fue efectiva con un nivel de significación de 0,01?

  selcs Jun 2009 Solución:

  Para test bilateral:

  El nivel de significación $\alpha = 0'01$, corresponde con $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'58$.

  El intervalo de aceptación es $\mu \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu \pm 2'58 \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 12 \pm 2'58 \dfrac{1'3}{\sqrt{6}} = 12 \pm 1'3692 = \begin{cases} 13'3692 \\ 10'6308 \end{cases}$

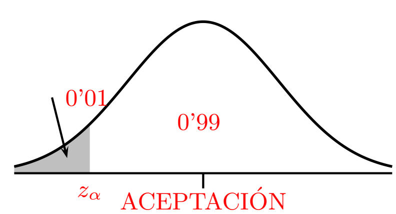
  que da el intervalo $(10'6308, 13'3692)$.

  Como $\bar{x} = \frac{8+11+9+7+10+9}{6} = 9$ queda fuera del intervalo, se rechaza la hipótesis nula de que $\mu = 12$, cabe pensar que la campaña ha sido efectiva.

  Como debemos suponer que la campaña es para disminuir el número de accidentes, el test más adecuado sería el unilateral izquierdo;

  Contrastamos $H_0 : \mu = 12\,\%$ frente a $H_1 : \mu < 12\,\%$,
  En test unilateral el nivel significación $\alpha = 0'01$ corresponde con $z_\alpha = 2'33$.

  El extremo de la región de aceptación es $\mu - z_\alpha \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu - 2'33 \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 12 - 2'33 \dfrac{1'3}{\sqrt{6}} = 12 - 1'2365 = 10'7635$.
  que da el intervalo $(10'7635, \infty)$.
  Como $\bar{x} = \frac{8+11+9+7+10+9}{6} = 9$ queda fuera del intervalo, se rechaza la hipótesis nula de que la media de accidentes siga igual $\mu = 12$, cabe pensar que la campaña ha sido efectiva.



- CUESTIÓN 5.B.

  Se sabe que el peso de los recién nacidos sigue una distribución normal con media desconocida y desviación típica igual a 0,75 kilogramos. Si en una muestra aleatoria simple de cien de ellos se obtiene una media muestral de 3 kilogramos, calcular un intervalo de confianza para la media poblacional que presente una confianza del 95 %.

  selcs Jun 2009 Solución:

Los datos son: $\bar{x} = 3, \sigma = 0'75, n = 100.$

Para el nivel de confianza del 95 % corresponde el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$

Entonces el intervalo de confianza tiene de extremos: $\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 3 \pm 1'96 \cdot \dfrac{0'75}{\sqrt{100}} = 3 \pm 0'075 \begin{cases} 2'925 \\ 3'075 \end{cases}$

El intervalo de confianza para la media de la nueva producción de lámparas es $(2'925, 3'075)$

Septiembre 2008

- CUESTIÓN 1.A.

  Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, encontrar una matriz B tal que $A.B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

  selcs Sept 2008 Solución:

  Primero resolvemos la ecuación matricial:

  $A.B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}; \qquad B = A^{-1}.\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

  Calculemos ahora la inversa de A:

  $|A| = -3; \quad , adj(A) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}; \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$

  Luego

  $B = A^{-1}.\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

- CUESTIÓN 1.B.

  Un fabricante de coches lanza una oferta especial en dos de sus modelos, ofreciendo el modelo A a un precio de 15000 euros y el modelo B a un precio de 20000 euros. La oferta está limitada por las existencias que son 20 coches del modelo A y 10 del modelo B, queriendo vender al menos, tantas unidades del modelo A como del modelo B. Por otra parte, para cubrir gastos de esta campaña, los ingresos obtenidos en ella deben ser, al menos, de 60000 euros.

  a) Plantear el problema y representar gráficamente su conjunto de soluciones.

  b) ¿Cuántos coches deberá vender de cada modelo para maximizar sus ingresos? ¿Cuál es su importe?

  selcs Sept 2008 Solución:

  $x =$ número de coches de modelo A
  $y =$ número de coches de modelo B
  Ingresos: $f(x, y) = 15x + 20y$ en miles de euros

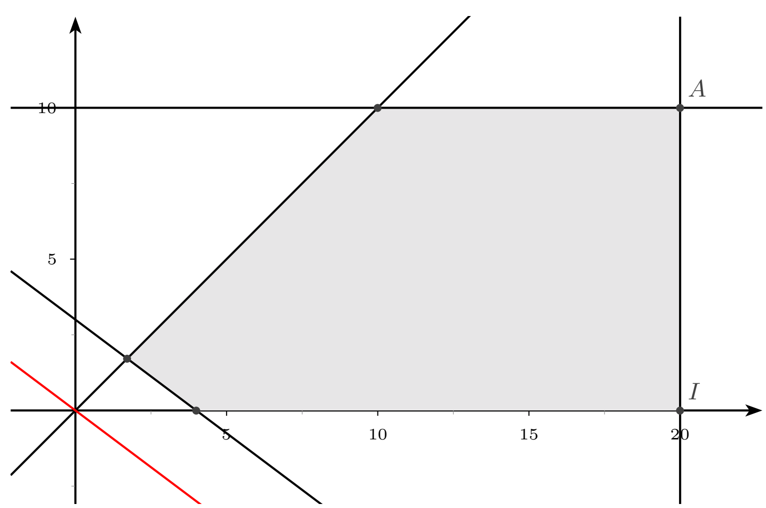
  $$\begin{cases} x \leq 20 \\ y \leq 10 \\ x \geq y \\ 15x + 20y \geq 60 \end{cases}$$

  Representamos (trabajaremos en miles):

  $$\begin{cases} x \geq y & \begin{array}{c|cc} x & 0 & 10 \\ \hline y & 0 & 10 \end{array} \\ 15x + 20y > 60 & \begin{array}{c|cc} x & 0 & 4 \\ \hline y & 3 & 0 \end{array} \end{cases}$$

  Ahora la función igualada a 0:

  $$f(xy) = 15x + 20y = 0 \quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & 20 \\ \hline y & 0 & -15 \end{array}$$



  Para maximizar los ingresos tomaríamos la paralela a $f(x, y) = 0$ que pasa por el punto A, o sea vender 20 coches del A y 10 del B, entonces el importe de los ingresos sería: $f(20, 10) = 500$, es decir 500.000 € .

- CUESTIÓN 2.A.

  Considérense las funciones siguientes: $f(x) = x - 2; \quad g(x) = x^2$

  a) Hallar los máximos y los mínimos de la función $y = f(x).g(x)$.

  b) Hallar dos primitivas diferentes de la función $y = f(x).g(x)$

  selcs Sept 2008 Solución:

  a) Llamemos $h(x)$ a la función producto: $h(x) = x^2(x-2) = x^3 - 2x^2$

  Para hallar los máximos y los mínimos estudiaremos el crecimiento de la función, lo que viene dado por el signo de la derivada y para ello empezamos anulando la derivada:

  $h'(x) = 3x^2 - 4x; \quad 3x^2 - 4x = 0; \quad x(x^{-}4) = 0$ que tiene como soluciones $x = 0, x = \dfrac{4}{3}$

x		0		$\frac{4}{3}$	
y'	$+$		$-$		$+$
y	$\nearrow$	MÁXIMO	$\searrow$	MÍNIMO	$\nearrow$

  b) $\displaystyle\int h(x)\,dx = \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + C$ Por tanto dando dos valores a la constante de integración C obtenemos dos primitivas: $F_1(x) = \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{2x^3}{3} + 1$, $F_2(x) = \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{2x^3}{3} + 2$

- CUESTIÓN 2.B.

  Dada la curva de ecuación $y = \dfrac{1}{2(x+1)}$ determinar:

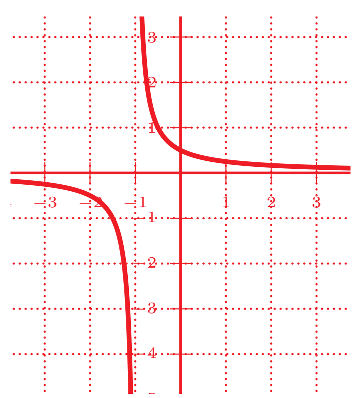
  a) Los puntos de corte con los ejes coordenados.

  b) Las asíntotas.

  c) Hacer una representación gráfica aproximada de la curva.

  selcs Sept 2008 Solución:

  Se trata de una hipérbola por tanto para representarla veremos los puntos de corte y las asíntotas:



  a) Puntos de corte con los ejes: Anulamos cada variable:

  con $OY : x = 0$, resulta $y = \dfrac{1}{2}$

  con $OX : y = 0$, resulta que no hay solución

  b) Asíntotas: Rectas tangentes en el infinito

  verticales valores de x en los que la función se va a infinito:

  Asíntotas verticales, anulamos el denominador $2(x+1) = 0, \quad x = -1$ pues $\displaystyle\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{1}{2(x+1)} = \pm\infty$

  Asíntota horizontal $y = n : \quad n = \displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2(x+1)} = 0; \quad y = 0$

- CUESTIÓN 3.A.

Descomponer el número 25 en dos sumandos tales que el doble del cuadrado del primero más el triple del cuadrado del segundo sea mínimo.

selcs Sept 2008 Solución:

Los números son $x, \quad 25-x$

La función a minimizar es: $f(x) = 2x^2 + 3(25-x)^2 = 5x^2 - 150x + 1875$

Derivamos y anulamos la derivada: $f'(x) = 10x - 150 = 0; \quad x = 15$

Estudiamos el crecimiento:

x		15	
y'	$-$		$+$
y	$\searrow$		$\nearrow$
		MÍNIMO	

- CUESTIÓN 3.B.

Calcular el área de la región del primer cuadrante limitada por la parábola $y = x^2$, la recta $y = -x + 2$ y el eje OX. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.

selcs Sept 2008 Solución:

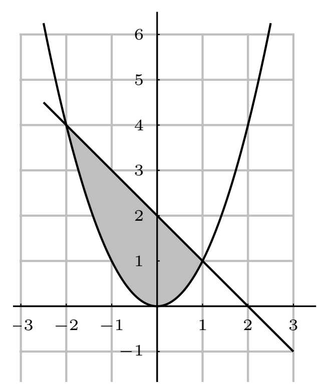
Buscamos los puntos de corte de las dos funciones:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = -x + 2 \end{cases}$$

$x^2 = -x + 2; \quad x^2 + x - 2 = 0; \quad x = 1, x = -2$

Área= $\displaystyle\int_{-2}^{1}$ recta $-$ parábola $=$

$dx = \int_{-2}^{1}(-x^2 - x + 2) \quad dx = \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{1} = \frac{9}{2}u^2$



- CUESTIÓN 4.A.

El 70 % de los estudiantes aprueba una asignatura A y un 60 % aprueba otra asignatura B. Sabemos, además, que un 35 % del total aprueba ambas.

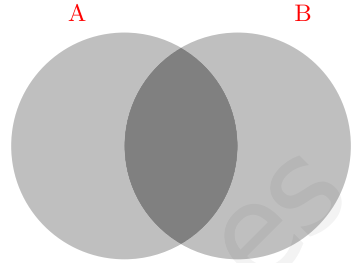
a) Calcular la probabilidad de que un estudiante elegido al azar apruebe la asignatura B, supuesto que ha aprobado la A.

b) Calcular la probabilidad de que dicho estudiante apruebe la asignatura B, supuesto que no ha aprobado la A.

selcs Sept 2008 Solución:

Llamamos A al suceso "aprobar A"; $p(A) = 0'7$
Llamamos B al suceso "aprobar B"; $p(B) = 0'6$
Por tanto aprobar ambas: $p(A \cap B) = 0'35$

a) Aprobar B supuesto aprobado A: $p(B/A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)} = \dfrac{0'35}{0'7} = 0'5$



b) Piden calcular la probabilidad de aprobar B supuesto no aprobado A: $p(B/A^c) = \dfrac{p(B \cap A^c)}{p(A^c)}$, busquemos estas probabilidades:

Tenemos que $p(A^c) = 1 - p(A) = 0'3$
Además tenemos la igualdad de conjuntos: $(B \cap A^c) \cup (B \cap A) = B$ siendo los sucesos incompatibles (unión disjunta), por tanto: $p(B \cap A^c) + p(B \cap A) = p(B)$; $\quad p(B \cap A^c) + 0'35 = 0'6$, luego $p(B \cap A^c) = 0'25$.
Sustituyendo.
$p(B/A^c) = \dfrac{p(B \cap A^c)}{p(A^c)} = \dfrac{0'25}{0'3} = 0'833$

- CUESTIÓN 4.B.

  Una fábrica produce tornillos niquelados y dorados, siendo el 75 % de los tornillos que produce niquelados. El porcentaje de tornillos defectuosos producidos es del 4 % para los tornillos niquelados y del 5 % para los dorados. Se elige al azar un tornillo y resulta no ser defectuoso. ¿Cuál es la probabilidad de que sea niquelado?

  selcs Sept 2008 Solución:

  Llamamos B al suceso "no ser defectuoso".

  Llamamos N al suceso "ser niquelado "; $p(N) = 0'75$; $\quad p(B/N) = 0'96$

  Llamamos D al suceso "ser dorado "; $p(D) = 0'25$; $\quad p(B/D) = 0'95$

  $\{D, N\}$ forman sistema completo de sucesos. Por el teorema de Bayes:

  $p(N/B) = \dfrac{p(B/N) \cdot p(N)}{p(B/N) \cdot p(N) + p(B/D) \cdot p(D)} = \dfrac{0'96 \cdot 0'75}{0'96 \cdot 0'75 + 0'95 \cdot 0'25} = 0'75$

- CUESTIÓN 5.A.

  Supongamos que un fabricante de lámparas eléctricas de duración media igual a 2000 horas, y desviación típica igual a 300 horas, trata de compararlas con otras de un nuevo método de fabricación, para ver si éstas son de mayor duración. Para ello, examina una muestra aleatoria de 100 lámparas cuya vida media es de 2380 horas. Suponiendo que el nuevo método no cambia la variabilidad en duración de lámpara a lámpara y por tanto la desviación típica en duración es la misma que en el proceso anterior, construir un intervalo de confianza para la media de la población de lámparas que se fabricarán por el nuevo método con una confianza del 95 %.

selcs Sept 2008 Solución:

Los datos son: $\bar{x} = 2380, \sigma = 300, n = 100$.

Para el nivel de confianza del 95 % corresponde el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$

Entonces el intervalo de confianza tiene de extremos: $\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2380 \pm 1'96 \cdot \dfrac{300}{\sqrt{100}} = 2380 \pm 58'8 \begin{cases} 2321'2 \\ 2438'8 \end{cases}$

El intervalo de confianza para la media de la nueva producción de lámparas es $[2321'2, 2438'8]$

- CUESTIÓN 5.B.

  Se está calibrando una balanza. Para ello se pesa una "pesa de prueba" de 1000 gramos 60 veces, obteniéndose un peso medio de 1000,6 gramos. Si la desviación típica de la población es de 2 gramos ¿podemos aceptar la hipótesis nula 0 $H_0 : \mu = 1000$ frente a la alternativa $H_1 : \mu \neq 1000$ con una confianza del 99 %?

  selcs Sept 2008 Solución:

  Contrastamos $H_0 : \mu = 1000$ gr frente a $H_1 : \mu \neq 1000$ gr, consideramos test bilateral.

  Los datos son: $\bar{x} = 1000'6, \sigma = 2, n = 60$.

  El nivel de confianza del 99 %, $\alpha = 0'01$, corresponde con $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'58$.

  El intervalo de aceptación es $\mu \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu \pm 2'58 \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1000 \pm 2'58 \dfrac{2}{\sqrt{60}} = 1000 \pm 0{,}6661 = \begin{cases} 1000'6661 \\ 999{,}3339 \end{cases}$

  que da el intervalo $(999{,}3339, 1000'6661)$.

  Como $\bar{x} = 1000'6$ queda dentro del intervalo, se acepta la hipótesis nula de que $\mu = 1000$ gr.

Junio 2008

- CUESTIÓN 1.A.

  Un grupo de personas se reúne para ir de excursión, juntándose un total de 20 entre hombres, mujeres y niños. Contando hombres y mujeres juntos, su número resulta ser el triple que el número de niños. Además, si hubiera acudido una mujer más, su número igualaría al de hombres.

  a) Plantear un sistema para averiguar cuántos hombres, mujeres y niños han ido de excursión.

  b) Resolver el problema.

  selcs Jun 2008 Solución:

  Sea:

  x el número de hombres

  y el número de mujeres

  z el número de niños

  las condiciones se pueden expresar:

  $$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=20 \\ x+y=3z \\ y+1=x \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} x+y+z=20 \\ x+y-3z=0 \\ -x+y=1 \end{array}\right.$$

  Tiene como matriz asociada:

  $$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 20 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \end{array}$$

  Que triangulando por Gauss resulta:

  $$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & 40 \end{array}$$

  que sustituyendo hacia arriba da como soluciones: $z=5, \quad y=7, \quad x=8.$

  Hay por tanto 8 hombres, 7 mujeres y 5 niños.

- CUESTIÓN 1.B.

  Un taller de bisutería produce sortijas sencillas a 4,5 euros y sortijas adornadas a 6 euros. Las máquinas condicionan la producción de modo que no pueden salir al día más de 400 sortijas sencillas, ni más de 300 adornadas, ni más de 500 en total.

  a) ¿Cuántas unidades de cada modelo se pueden vender? Plantear el problema y representar gráficamente su conjunto de soluciones.

  b) Suponiendo que se vende toda la producción ¿cuántas unidades de cada clase interesará fabricar para obtener los máximos ingresos?

  selcs Jun 2008 Solución:

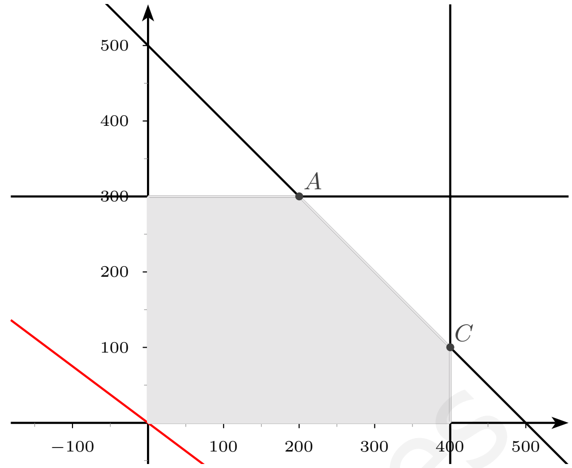
Sean:
$x=$ número de sortijas sencillas
$y=$ número de sortijas adornadas
Ganancia: $f(x,y)=4'5x+6y$ euros

$$\begin{cases} x\le 400\\ y\le 300\\ x+y\ge 500\end{cases}$$

Representamos: $x+y\ge 500$ $\begin{array}{c|cc} x & 0 & 500\\ \hline y & 500 & 0\end{array}$

Ahora la función igualada a 0:

$f(xy)=4'5x+6y=0$ $\begin{array}{c|cc} x & 0 & -60\\ \hline y & 0 & 45\end{array}$



Para maximizar los ingresos tomaríamos la paralela a $f(x,y)=0$ que pasa por el punto A o C que sería la más alejada: comprobemos los valores correspondientes a esos puntos:

$A(300,200)$; $f(300,200)=4'5\cdot 300+6\cdot 200=2550$

$C(400,100)$; $f(400,100)=4'5\cdot 400+6\cdot 100=2400$

Por tanto el máximo beneficio resulta de vender 300 sortijas sencillas y 200 sortijas adornadas.

- CUESTIÓN 2.A.

  En una región, un río tiene la forma de la curva $y=\dfrac{1}{4}x^3-x^2+x$ y es cortada por un camino según el eje OX.

  Hacer un esquema de la posición del río y del camino, calculando para la curva el corte con los ejes coordenados, extremos relativos e intervalos de crecimiento.

  selcs Junio 2008 Solución:
  Se trata de una función polinómica por tanto para representarla veremos los puntos de corte y el crecimiento:

  a) Puntos de corte con los ejes: Anulamos cada variable:

  con $OY: x=0$, resulta $y=0$

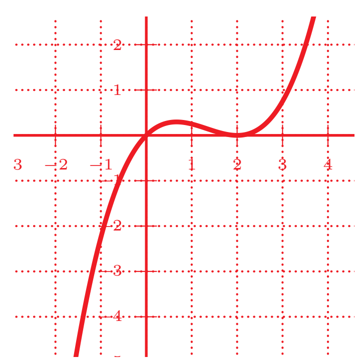
  con $OX: y=0$, resulta $\dfrac{1}{4}x^3-x^2+x=0$; $x(\dfrac{1}{4}x^2-x+1)=0$; $x^2-4x+4=0$; que da como solución $x=2$ doble.

  b) Crecimiento: Viene dado por el signo de la derivada, para ello anulamos la derivada:

  $f'(x)=\dfrac{3}{4}x^2+2x+1=0$

  Asíntotas verticales, anulamos el denominador $2(x+1)=0$, $x=-1$ pues $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{2(x+1)}=\pm\infty$

  Asíntota horizontal $y=n$: $n=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{2(x+1)}==0$; $y=0$



- CUESTIÓN 2.B.

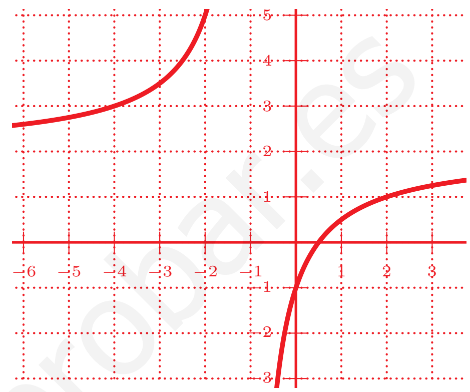
  Dada la curva $y = \dfrac{2x-1}{x+1}$

  a) Los puntos de corte con los ejes coordenados.

  b) Las asíntotas.

  c) Hacer una representación gráfica de la misma.

  selcs Junio 2008 Solución:
  Se trata de una hipérbola por tanto para representarla veremos los puntos de corte y las asíntotas:

  a) Puntos de corte con los ejes: Anulamos cada variable:

  con $OY: x = 0$, resulta $y = \dfrac{-1}{1} = 1$

  con $OX: y = 0$, resulta $2x - 1 = 0, \quad x = \dfrac{1}{2}$

  b) Asíntotas: Rectas tangentes en el infinito

  verticales valores de x en los que la función se va a infinito:
  Asíntotas verticales, anulamos el denominador $x + 1 = 0, \quad x = -1$ pues $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} \dfrac{2x-1}{x+1} = \pm\infty$

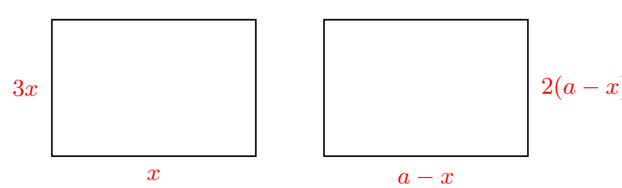
  Asíntota horizontal $y = n : \quad n = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x-1}{x+1} = 2; \quad y = 2$

- CUESTIÓN 3.A.

  Supongamos que tenemos un alambre de longitud a y lo queremos dividir en dos partes que van a servir de base a sendos rectángulos. En uno de los rectángulos su altura es el doble de su base y en el otro su altura es el triple de su base. Determinar el punto por el cuál debemos cortar el alambre para que la suma de las áreas de los dos rectángulos sea mínima.

  selcs Junio 2008 Solución:

  Suma de áreas: $f(x) = x \cdot 3x + (a-x)(2(a-x)) = 3x^2 + 2a^2 + 2x^2 - 4ax = 5x^2 - 4ax + 2a^2$ mínima
  Derivamos $f'(x) = 10x - 4a$. Anulamos la derivada $10x - 4a = 0$
  Resulta $x = \dfrac{4a}{10} = \dfrac{2a}{5}$

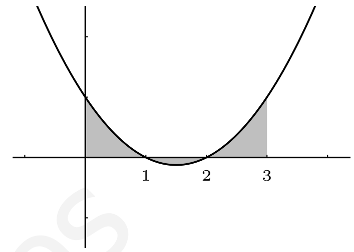
  

x	$\frac{a}{5}$	$\frac{2a}{5}$	
y'	$-$		$+$
y	$\searrow$	MÍNIMO	$\nearrow$

- CUESTIÓN 3.B.

  Calcular el área limitada por la curva $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1$, el eje OX y las rectas de ecuaciones $x = 0, x = 3$. Hacer una representación gráfica aproximada de dicha área.

  selcs Junio 2008 Solución:



$S = S_1 + S_2 + S_3$

$S_1 = \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1\right) dx = \left[\frac{x^3}{6} - \frac{3x^2}{4} + x\right]_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{3}{4} + 1 - 0 = \frac{5}{12}$

$S_2 : \int_1^2 \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1\right) dx = \left[\frac{x^3}{6} - \frac{3x^2}{4} + x\right]_1^2 = \frac{8}{6} - \frac{12}{4} + 2 - (\frac{1}{6} - \frac{3}{4} + 1) = \frac{-1}{12} \quad S_1 = \frac{1}{12}$

$S_3 = \int_2^3 \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1\right) dx = \left[\frac{x^3}{6} - \frac{3x^2}{4} + x\right]_2^3 = \frac{27}{6} - \frac{27}{4} + 3 - (\frac{8}{6} - \frac{12}{4} + 2) = \frac{5}{12}$

$S = \frac{11}{2}\ u^2$

- CUESTIÓN 4.A.

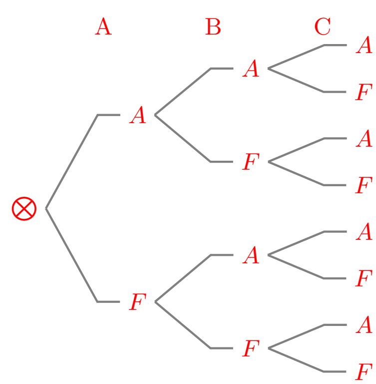
  Tres hombres A, B y C disparan a un objetivo. Las probabilidades de que cada uno de ellos alcance el objetivo son $\frac{1}{6}, \frac{1}{4}$ y $\frac{1}{3}$ respectivamente. Calcular:

  a) La probabilidad de que todos alcancen el objetivo.

  b) La probabilidad de que ninguno alcance el objetivo.

  c) La probabilidad de que al menos uno de ellos alcance el objetivo.

  selcs Junio 2008 Solución:



Representamos por A acertar, F fallar.

a) $p($ "todos aciertan" $) = p(A_A A_B A_C) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{72}$

b) $p($"todos fallan"$) = p(F_A F_B F_C) = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{12}$

c) " al menos uno acierta" es el complementarios de "todos fallan" por tanto:

$p($ " al menos uno acierta" $) = 1 - p($"todos fallan"$) = 1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$

- CUESTIÓN 4.B.

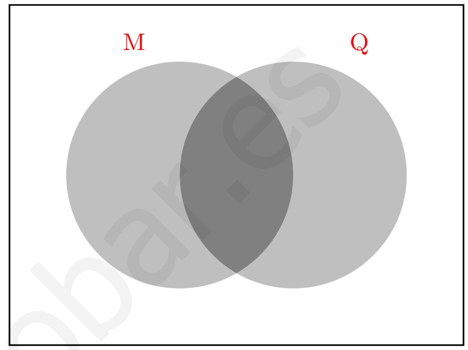
En una cierta facultad se sabe que el 25 % de los estudiantes suspenden matemáticas, el 15 % suspenden química y el 10 % suspenden matemáticas y química. Se selecciona un estudiante al azar.

a) Calcular la probabilidad de que el estudiante no suspenda química ni matemáticas.

b) Si sabemos que el estudiante ha suspendido química, ¿cuál es la probabilidad de que suspenda también matemáticas?

selcs Junio 2008 Solución:

Llamamos M al suceso "suspender M"; $p(M) = 0'25$
Llamamos Q al suceso "suspender Q"; $p(Q) = 0'15$
Suspender $p(M \cap Q) = 0'10$



a) " No suspenda química ni matemáticas" equivale a "aprobar las dos" que es el complementario de "suspender alguna" : $p(M^c \cap Q^c) = 1 - p(M \cup Q) =$
Calcula primero la probabilidad de la unión: $p(M \cup Q) = p(M) + p(Q) - p(M \cap Q) = 0'25 + 0'15 - 0'10 = 0'30$
Por tanto: $p($ " No suspenda química ni matemáticas" $) = 1 - 0'30 = 0'70$

b) Piden calcular la probabilidad de suspender matemáticas supuesto que ha suspendido química:
$p(M/Q) = \dfrac{p(M \cap Q)}{p(Q)} = \dfrac{0'10}{0'15} = 0'666$

- CUESTIÓN 5.A.

El peso medio de los paquetes de café puestos a la venta por cierta casa comercial es supuestamente de 1 kg. Para comprobar esta suposición, elegimos una muestra aleatoria simple de 100 paquetes y encontramos que su peso medio es de 0,978 kg. Suponiendo que la distribución del peso de los paquetes de café es normal y la desviación típica de la población es de 0,10 kg. ¿Es compatible este resultado con la hipótesis nula $H_0 : \mu = 1$ con un nivel de significación de 0,05 ? ¿Y con un nivel de significación de 0,01?

selcs Junio 2008 Solución:

Contrastamos $H_0 : \mu = 1000$ gr frente a $H_1 : \mu \neq 1000$ gr, consideramos test bilateral.

Los datos son: $\bar{x} = 978, \sigma = 100, n = 100.$

- El nivel de significación $\alpha = 0'05$, corresponde con $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$.

  El intervalo de aceptación es $\mu \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu \pm 1'96 \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1000 \pm 1'96 \dfrac{100}{\sqrt{100}} = 1000 \pm 19'6 = \begin{cases} 1019'6 \\ 980'4 \end{cases}$

  que da el intervalo $(980'4, 1019'6)$.
  Como $\bar{x} = 978$ queda fuera del intervalo, se rechaza la hipótesis nula de que $\mu = 1000$ gr.

- El nivel de significación $\alpha = 0'01$, corresponde con $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'58$.

  El intervalo de aceptación es $\mu \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu \pm 2'58 \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1000 \pm 2'58 \dfrac{100}{\sqrt{100}} = 1000 \pm 25'8 = \begin{cases} 1025'8 \\ 974'2 \end{cases}$

  que da el intervalo $(974'2, 1025'8)$.
  Como $\bar{x} = 978$ queda dentro del intervalo, se acepta la hipótesis nula de que $\mu = 1000$ gr.

- CUESTIÓN 5.B.

  La puntuación media obtenida por una muestra aleatoria simple de 81 alumnos de secundaria en el examen de cierta asignatura ha sido 25 puntos. Suponiendo que la distribución de las puntuaciones de la población es normal con desviación típica igual a 20,25 puntos, calcular el intervalo de confianza para la media de la población con un nivel de significación de 0,01.

  selcs Junio 2008 Solución:

  Los datos son: $\bar{x} = 25, \sigma = 20'25, n = 81$.

  Para el nivel de confianza de 99 %,corresponde $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'58$.

  Entonces el intervalo de confianza tiene de extremos: $\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 25 \pm 2'58 \cdot \dfrac{20'25}{\sqrt{81}} = 25 \pm 5'805 \left\{ \begin{array}{l} 30'805 \\ 19'195 \end{array} \right.$

  El intervalo de confianza para la media de la nueva producción de lámparas es $(19'195, 30'805)$

Septiembre 2007

- CUESTIÓN 1.A. [3 PUNTOS]

  Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, calcular dos números reales x e y tales que se verifique $A + xA + yI = 0$, siendo I la matriz unidad de orden 2 y 0 la matriz nula de orden 2.

  selcs Sep 2007 Solución:

  $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

  $x\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

  $\begin{pmatrix} 2x & x \\ 2x & 3x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$

  $\begin{cases} 2x + y = -2 \\ x = -1 \\ 2x = -2 \\ 3x + y = -3 \end{cases}$ sistema de soluciones $x = -1, y = 0$, como se comprueba sustituyendo en todas las ecuaciones.

- CUESTIÓN 1.B. [3 PUNTOS]

  En un taller de chapa se pueden fabricar dos tipos de carrocerías A y B. Cada carrocería de tipo A necesita 4 horas de pintura y cada carrocería de tipo B necesita 6 horas de pintura, disponiéndose de un máximo de 500 horas mensuales para la pintura de las carrocerías. Si los beneficios de cada carrocería son de 2000 euros y 3500 euros para los tipos A y B respectivamente:

  a) Calcular el número de carrocerías de cada tipo que deben producirse para obtener el máximo beneficio si tienen que fabricar un mínimo de 80 y un máximo de 100 carrocerías de tipo A.

  b) ¿Cuál es el beneficio máximo obtenido?

  selcs Sept 2007 Solución:

  Las variables serían:

  x número de carrocerías de tipo A

  y número de carrocerías de tipo B

  La función a maximizar es $f(x,y) = 2000x + 3500y$

  Queda el sistema de inecuaciones con x, y positivas:

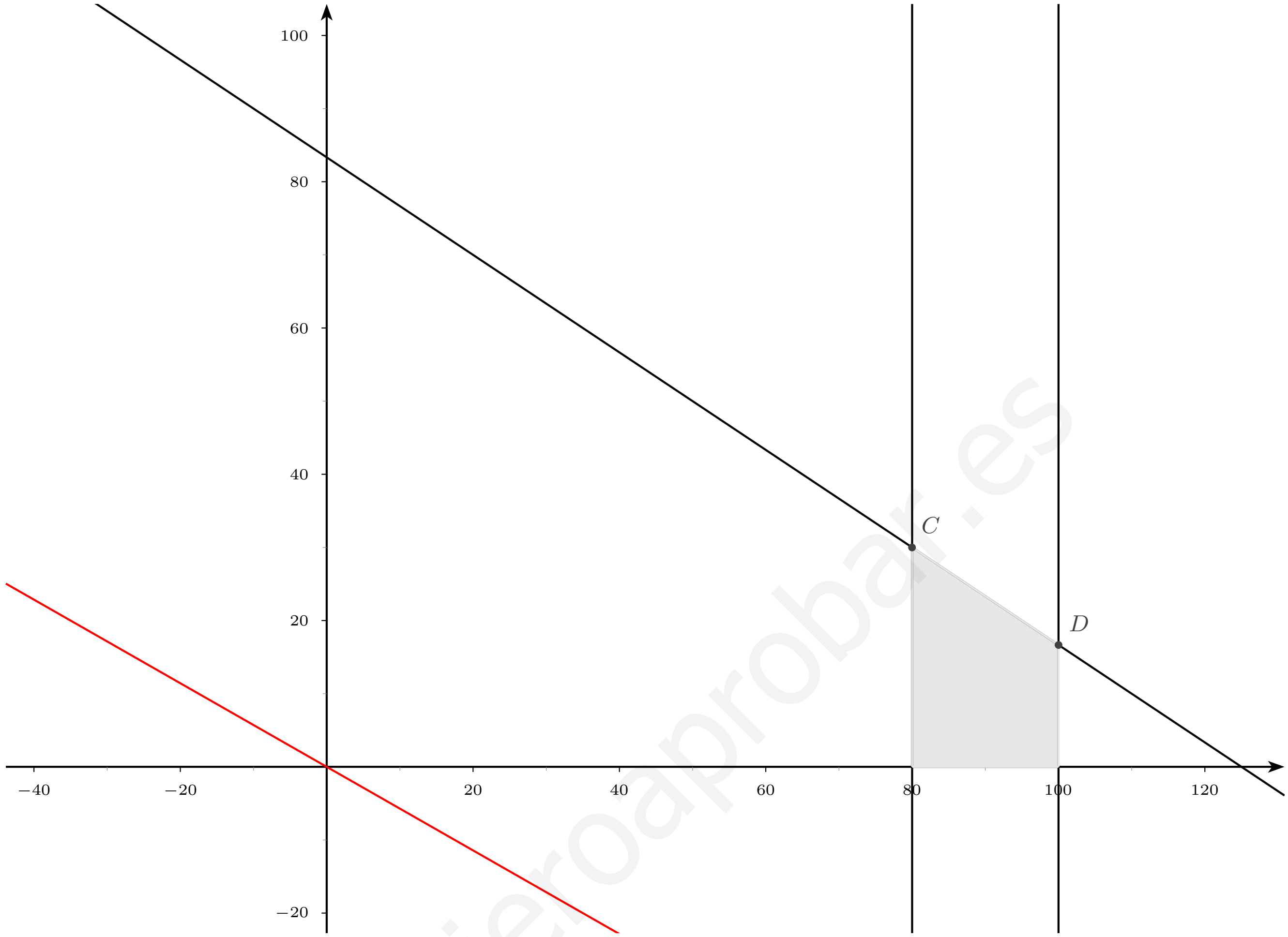
  $\begin{cases} 4x + 6y \leq 500 \\ x > 80 \\ x < 100 \end{cases}$

  Representamos:

  $4x + 6y \leq 500$ $\begin{array}{c|cc} x & 0 & 125 \\ \hline y & 80'33 & 0 \end{array}$

  Ahora la función igualada a 0:

  $f(x,y) = 2000x + 3500y = 0$ $\begin{array}{c|cc} x & 0 & -35 \\ \hline y & 0 & 20 \end{array}$



Como no se ve claro probamos los dos puntos $C(80, 30)$ y $D(100, 16'66)$

$C:\quad f((80, 30) = 2000 \cdot 80 + 3500 \cdot 30 = 265000$

$D:\quad f((100, 16'66) = 2000 \cdot 100 + 3500 \cdot 16'66 = 258100$

El máximo se produce para el punto C, hay que fabricar 80 de tipo A y 30 de tipo B, así se tendrá la máxima ganancia de 265.000 € .

- CUESTIÓN 2.A. [2 PUNTOS]

  Dada la función $f(x) = \dfrac{x+1}{2-x}$, se pide:

  a) Calcular su dominio.

  b) Calcular sus asíntotas.

  c) Determinar los máximos, mínimos e intervalos de crecimiento y decrecimiento.

  d) Hacer su representación gráfica aproximada.

  selcs Sept 2007 Solución:

a) Dominio: La función existe siempre salvo en $x = 2$ que anula al denominador.

Puntos de corte con los ejes: Anulamos cada variable:

con $OY : x = 0$, resulta $y = \frac{1}{2}$

con $OX : y = 0$, resulta $x = -1$

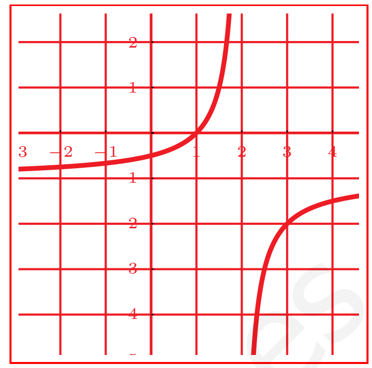
b) Asíntotas: Rectas tangentes en el infinito

verticales valores de x en los que la función se va a infinito: Asíntotas verticales $2 - x = 0, \quad x = 2$ pues $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x+1}{2-x} = \pm\infty$

Asíntota horizontal $y = n : \quad n = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{2-x} = -1; \quad y = -1$

c) Crecimiento: se estudia el signo de la derivada:

$f'(x) = \frac{3}{(2-x)^2}$ que al ser siempre positiva nos dice que la función es siempre creciente.



- CUESTIÓN 2.B. [2 PUNTOS]

Dada la función $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si} \quad x < 2 \\ x+3 & \text{si} \quad x > 2 \\ 3 & \text{si} \quad x = 2 \end{cases}$

a) Representarla gráficamente.

b) Estudiar su continuidad y en caso de que exista algún tipo de discontinuidad, decir de qué tipo de discontinuidad se trata.

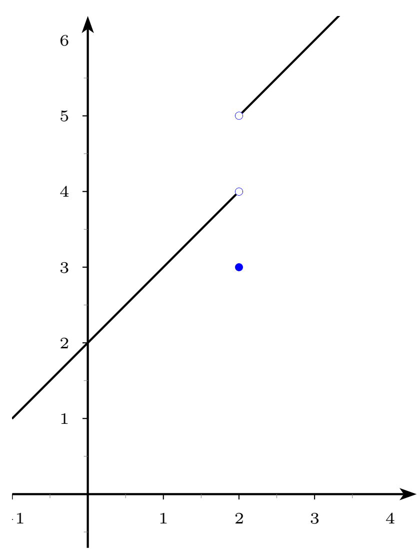
selcs Sept 2007 Solución:

a)

$f(x) = \begin{cases} x+2 & si \quad x < 2 \\ x+3 & si \quad x > 2 \\ 3 & si \quad x = 2 \end{cases}$

x	0	2
y	2	4

x	2	3
y	5	6



b)

Es continua siempre excepto en $x = 2$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (x+2) = 4$

$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (x+3) = 5$

$f(2) = 3$

En $x = 2$ hay discontinuidad de salto finito.

- CUESTIÓN 3.A. [1.5 PUNTOS]

Encontrar un número tal que al restarle su cuadrado la diferencia sea máxima.

selcs Sept 2007 Solución:

número $= x$

$f(x) = x - x^2$ máximo

$f'(x) = 1 - 2x$

anulando la derivada:

$1 - 2x = 0; \quad x = \frac{1}{2}$

Con el estudio del crecimiento comprobamos que es máximo:

x		$\frac{1}{2}$	
y'	$+$		$-$
y	$\nearrow$	MÁXIMO	$\searrow$

- CUESTIÓN 3.B. [1.5 PUNTOS]

  Hallar el área limitada por las curvas $y = -x^2 + x + 2$ e $y = -x + 2$.

  selcs Sept 2007 Solución:

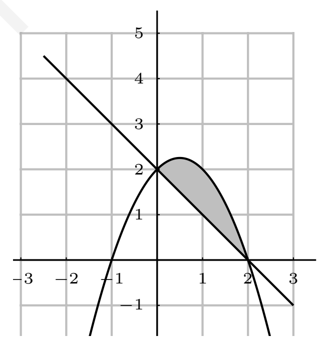
  Buscamos los puntos de corte de las dos funciones:

  $$\begin{cases} y = -x^2 + x + 2 \\ y = -x + 2 \end{cases}$$

  $-x^2 + x + 2 = -x + 2; \quad -x^2 + 2x = 0; \quad x(-x+2) = 0; \quad x = 0, x = 2$

  Área$= \int_0^2$ parábola $-$ recta $=$

  $dx = \int_0^2 (-x^2 + 2x) \quad dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2\right]_0^2 = \frac{8}{3} + 4 = \frac{4}{3}u^2$



- CUESTIÓN 4.A. [2 PUNTOS]

  Se propone a Juan y a Pedro la resolución de un problema. Se estima, en función de sus evaluaciones, que la probabilidad de que resuelvan el problema de forma independiente es de 1/3 para Juan y de 1/4 para Pedro.

  a) ¿Cuál es la probabilidad de que el problema sea resuelto por alguno de los dos?

  b) ¿Cuál es la probabilidad de que no sea resuelto por ninguno?

  selcs Sept 2007 Solución:

  Llamamos J al suceso "Juan resuleve el problema"; $p(J) = \frac{1}{3}$

  Llamamos P al suceso "Pedro resuleve el problema"; $p(P) = \frac{1}{4}$

  Consideramos que los dos son independientes, por tanto $p(J \cap P) = p(J) \cdot p(P) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

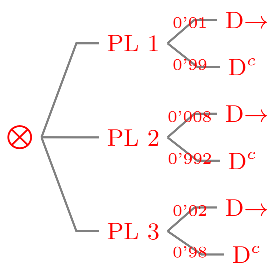
  a) Que lo resuelva alguno es la unión: $p(J \cup P) = p(J) + p(P) - p(J \cap P) = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12} = \frac{1}{2}$

  b) Que no lo resuelva ninguno es contrario de que lo resuelva alguno: $p(J \cup P)^c = 1 - p(J \cup P) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

- CUESTIÓN 4.B. [2 PUNTOS]

  El volumen diario de producción en tres plantas diferentes de una fábrica es de 500 unidades en la primera, 1000 unidades en la segunda y 2000 unidades en la tercera. Sabiendo que el porcentaje de unidades defectuosas producidas en cada planta es del 1 %, 0'8 % y 2 % respectivamente. Calcular la probabilidad de que al seleccionar una unidad al azar sea defectuosa.

  selcs Sept 2007 Solución:



La probabilidad de que venga de cada planta es :

$$p(PL1) = \frac{500}{3500} = \frac{1}{7}$$
$$p(PL2) = \frac{1000}{3500} = \frac{2}{7}$$
$$p(PL3) = \frac{2000}{3500} = \frac{4}{7}$$

Sea D el suceso seleccionar unidad defectuosa

Sumando las ramas que terminan seleccionando defectuosa: $p(D) = \frac{1}{7}{,}0'01 + \frac{2}{7}{,}0'008 + \frac{4}{7}{,}0'02 = 1'514$

Hemos hecho el problema sirviéndonos de un árbol con las probabilidades respectivas. Vamos a hacer el problema utilizando el Teorema de la probabilidad total.

Los sucesos: $\{PL1, PL2, PL3\}$ constituyen un sistema completo de sucesos.

$$p(PL1) = \frac{500}{3500} = \frac{1}{7}; \quad p(D/PL1) = 0'01$$
$$p(PL2) = \frac{1000}{3500} = \frac{2}{7}; \quad p(D/PL2) = 0'008$$
$$p(PL3) = \frac{2000}{3500} = \frac{4}{7}; \quad p(D/PL3) = 0'02$$

Entonces por el Teorema de la probabilidad total:

$$p(D) = p(PL1).p(D/PL1) + p(PL2).p(D/PL2) + p(PL3).p(D/PL3) = \frac{1}{7}{,}0'01 + \frac{2}{7}{,}0'008 + \frac{4}{7}{,}0'02 = 1'514$$

- CUESTIÓN 5.A. [1.5 PUNTOS]

  Un directivo de cierta empresa de material eléctrico afirma que la vida media de cierto tipo de bombillas es de 1500 horas. Otro directivo de la misma empresa afirma que la vida media de dichas bombillas es igual o menor de 1500 horas. Elegida una muestra aleatoria simple de 81 bombillas de dicho tipo, vemos que su vida media ha sido de 1450 horas. Suponiendo que la vida de las bombillas sigue una distribución normal con desviación típica igual a 180 horas:

  a) ¿Es compatible la hipótesis $H_0 : \mu = 1500$, frente a la hipótesis $H_1 : \mu \neq 1500$ con una confianza del 99 %, con el resultado experimental $\bar{x} = 1450$

  b) ¿Es compatible la hipótesis $H_0 : \mu = 1500$, frente a la hipótesis $H_1 : \mu < 1500$ con una confianza del 99 %, con el resultado experimental $\bar{x} = 1450$.

  selcs Sept 2007 Solución:

  Los datos son: $\bar{x} = 1450, \sigma = 180, n = 81$.

  a) Contrastamos $H_0 : \mu = 1500$ años frente a $H_1 : \mu \neq 1500$ años, test bilateral.

  El nivel de confianza del 99 %, $\alpha = 0'01$, corresponde con $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'58$.

  El intervalo de aceptación es $\mu \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu \pm 2'58 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1500 \pm 2'58 \frac{180}{\sqrt{81}} = 1500 \pm 51'6$ que da el intervalo $(1448'4, 1551'6)$.

Como $\bar{x} = 1450$ queda dentro del intervalo, se acepta la hipótesis nula de que $\mu = 1500$ años.

b) Contrastamos $H_0 : \mu = 1500$ años frente a $H_1 : \mu < 1500$ años, unilateral.

El nivel de confianza del 99 %, $\alpha = 0'01$, corresponde con $z_\alpha = 2'33$.

El intervalo de aceptación tiene de extremo inferior $\mu - z_\alpha \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu - 2'33 \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1500 - 2'33 \dfrac{180}{\sqrt{81}} = 1500 - 46'6 = 1453'4$.

Como $\bar{x} = 1450$ es menor queda fuera de la zona de aceptación, se rechaza la hipótesis nula de que $\mu = 1500$ años.

- CUESTIÓN 5.B. [1.5 PUNTOS]

  Supongamos una población $N(\mu, \sigma = 8)$. Se extrae de ella una muestra aleatoria simple. Si se sabe que la probabilidad de cometer un error de 3.92 o más al estimar la media μ mediante la media muestral es de 0.05, ¿qué tamaño ha de tener la muestra?

  selcs Sept 2007 Solución:

  Los datos son: $\sigma = 8$, error $= 3'92$, nivel de significación $= 0'05$.

  Para el nivel de significación $= 0'05$ corresponde el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$

  Entonces el error viene dado por:

  error $= z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1'96 \cdot \dfrac{8}{\sqrt{n}} \leq 3'92$

  $1'96 \cdot \dfrac{8}{3'92} \leq \sqrt{n}; \quad n \geq 16$

Junio 2007

- CUESTIÓN 1.A. [3 PUNTOS]

  Calcular la matriz inversa de la matriz

  $$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

  selcs Jun 2007 Solución:

  Adjuntamos a la derecha la matriz unidad y para evitar el cero en la esquina le sumamos a la primera fila la segunda:

  $$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} 2^a + 1^a(-2) \\ 3^a + 1^a(-3) \end{array} \left(\begin{array}{rrrrrr} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 6 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) 3^a - 2^a$$

  $$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) 1^a \cdot 6 + 3^a \left(\begin{array}{rrrrrr} 6 & 18 & 0 & -5 & -1 & 1 \\ 0 & -7 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) 1^a \cdot 7 + 12^a \cdot 18$$

  $$\left(\begin{array}{rrrrrr} 42 & 0 & 0 & -1 & 11 & 7 \\ 0 & -7 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

  dividiendo cada fila por su elemento de la diagonal principal:

  $$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & -1/42 & 11/42 & 1/6 \\ 0 & 1 & 0 & 2/7 & -1/7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/6 & 1/6 & -1/6 \end{array}\right)$$ las últimas tres columnas es la matriz inversa.

- CUESTIÓN 1.B. [3 PUNTOS]

  Una fábrica de bombones tiene almacenados 500 kg. de chocolate, 100kg. de almendras y 85kg. de frutas. Produce dos tipos de cajas de bombones: tipo A y tipo B. Cada caja de tipo A contiene 3kg. de chocolate, 1kg. de almendras y 1kg. de frutas, mientras que cada caja de tipo B contiene 2kg. de chocolate, 1.5kg. de almendras y 1kg. de frutas. Los precios de las cajas de tipo A y B son 130 euros y 135 euros respectivamente.

  a) ¿Cuántas cajas debe fabricar de cada tipo para maximizar su ganancia?

  b) ¿Cuál es el beneficio máximo obtenido?

  selcs Jun 2007 Solución:

Disponemos los datos en una tabla:

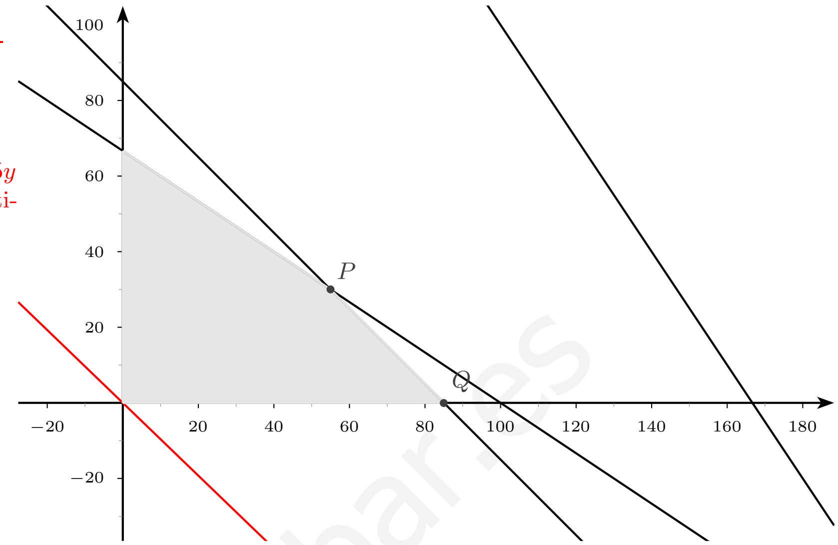
	chocolate	almendras	frutas	precio
A	3	1	1	130
B	2	1'5	1	135
	≤ 500	≤ 100	≤ 85	

Las variables serían:
x número de cajas de tipo A
y número de cajas de tipo B
La función a maximizar es $f(x,y) = 130x + 135y$
Queda el sistema de inecuaciones con x, y positivas:

$$\begin{cases} 3x + 2y \leq 500 \\ x + 1'5y \leq 100 \\ x + y \leq 85 \end{cases}$$

Representamos:

$$\begin{cases} 3x + 2y \leq 500 & \begin{array}{c|cc} x & 100 & 166'6 \\ \hline y & 100 & 0 \end{array} \\ x + 1'5y \leq 100 & \begin{array}{c|cc} x & 0 & 166'6 \\ \hline y & 66'6 & 0 \end{array} \\ x + y \leq 85 & \begin{array}{c|cc} x & 0 & 85 \\ \hline y & 85 & 0 \end{array} \end{cases}$$



Ahora la función igualada a 0:

$$f(xy) = 130x + 135y = 0 \qquad \begin{array}{c|cc} x & 0 & -13'5 \\ \hline y & 0 & 13 \end{array}$$

Hallemos el punto de corte P resolviendo el sistema $\begin{cases} x + 1'5y = 100 \\ x + y = 85 \end{cases}$, $P(55, 30)$

El otro punto posible es $Q(85, 0)$ queda: $f(85, 0) = 130 \cdot 85 + 0 = 11050$

El máximo se produce para $P(55, 30)$ y $f(55, 30) = 130 \cdot 55 + 135 \cdot 30 = 11200$, es el beneficio máximo.

- CUESTIÓN 2.A. [2 PUNTOS]

  Dada la función $f(x) = \dfrac{2-x}{x+1}$, se pide:

  a) Calcular su dominio.

  b) Calcular sus asíntotas.

  c) Determinar los máximos, mínimos e intervalos de crecimiento y decrecimiento.

  d) Hacer su representación gráfica aproximada.

- CUESTIÓN 2.B. [2 PUNTOS]

  Cierto artículo se vende a un precio u otro según la cantidad comprada, de acuerdo con los siguientes datos:

  A 10 euros el kilo, si $0 \leq x < 5$

  A 9 euros el kilo, si $5 \leq x < 10$

  A 7 euros el kilo, si $10 \leq x < 20$

  A 5 euros el kilo, si $20 \leq x$,

  donde x es el peso en kg. de la cantidad comprada.

  a) Escribir la función que representa el precio del artículo.

  b) Hacer su representación gráfica.

c) Estudiar su continuidad.

selcs Jun 2007 casi literal de sept 04

a)

$$f(x)=\begin{cases} 10x & si \quad 0\le x<5 \\ 9x & si \quad 5\le x<10 \\ 7x & si \quad 10\le x<20 \\ 5x & si \quad 20\le x \end{cases}$$

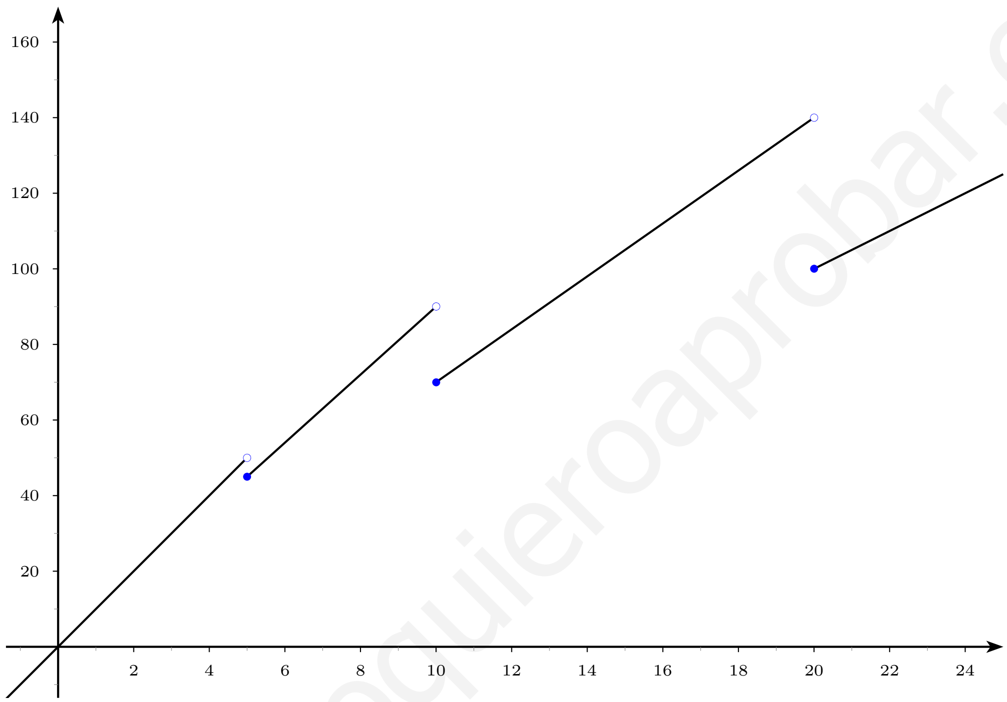
x	0	5
y	0	50

x	5	10
y	45	90

x	10	20
y	70	140

x	20	22
y	100	110

b)



c) La gráfica presenta discontinuidades de salto finito en $x=5$, $\quad x=10$, $\quad x=20$

Veamos los límites laterales por ejemplo para $x=5$, $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 5^-} 10x = 50 \\ \lim\limits_{x\to 5^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 5^+} 9x = 45 \end{cases}$ $\qquad f(5)=45$

- CUESTIÓN 3.A. [1.5 PUNTOS]

  Hallar dos números cuya suma sea 20 sabiendo que su producto es máximo.

  selcs Jun 2007 Solución:

  Sean x, y los números.

  $x+y=20; \qquad y=20-x$

  $P=x.y$ máximo

  $P(x)=x(20-x)=20x-x^2$

  Derivando: $P'(x)=20-2x$, en el máximo se anula la derivada $20-2x=0; \quad x=10$

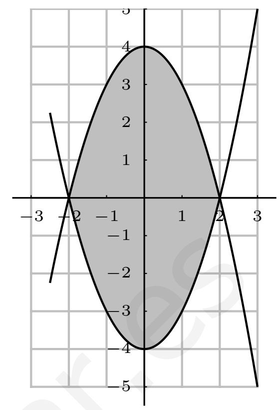
  Con el estudio del crecimiento comprobamos que es máximo:

x		10	
y'	$+$		$-$
y	$\nearrow$		$\searrow$

- CUESTIÓN 3.B. [1.5 PUNTOS]

Hallar el área limitada por las curvas $y = x^2 - 4$ e $y = 4 - x^2$.

selcs Jun 2007 Solución:



Buscamos los puntos de corte de las dos funciones:

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 4 \\ g(x) = 4 - x^2 \end{cases}, x^2 - 4 = 4 - x^2; \quad 2x^2 - 8 = 0; x^2 = 4; \quad x = \pm 2$$

Como la región es simétrica respecto al eje de ordenadas, el área sera el doble de la integral entre 0 y . La función g es mayor en el intervalo de integración, luego $g(x) - f(x) = 4 - x^2 - (x^2 - 4) = 8 - 2x^2$

$$S = 2\int_0^2 (g - f)$$

$$\int_0^2 (8 - 2x^2) \quad dx = \left[8x - \frac{2x^3}{3}\right]_0^2 = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3}$$

Luego el área es $\frac{64}{3}u^2$.

- CUESTIÓN 4.A. [2 PUNTOS]

Un ordenador personal está contaminado por un virus y tiene cargado dos programas antivirus que actúan independientemente el uno del otro. El programa P_1 detecta la presencia del virus con una probabilidad de 0.9 y el programa P_2 detecta el virus con una probabilidad de 0.8.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que el virus no sea detectado por ninguno de los dos programas antivirus?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que un virus que ha sido detectado por el programa P_1 sea detectado también por el programa P_2?

selcs Jun 2007 Solución:

Sea A "el programa P_1 detecta la presencia de virus "

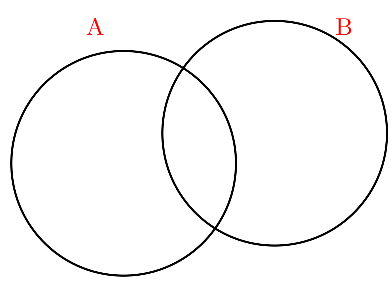
Sea B "el programa P_2 detecta la presencia de virus"

Sabemos: $p(A) = 0'9, p(B) = 0'8$

a) "ninguno detecta virus" es el complementario de "alguno detecta virus", o sea de la unión:

Hallemos primero la probabilidad de la intersección, consideramos que los dos antivirus actúan con independencia: $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B) = 0'9 \cdot 0'8 = 0'72$
Por tanto la probabilidad de la unión es: $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0'9 + 0'8 - 0'72 = 0'98$

Entonces: $p(\text{ ninguno detecta }) = p(\text{ alguno detecta})^c = 1 - p(A \cup B) = 1 - 0'98 = 0'02$



b) "detecta el virus P_2 habiéndolo detectado P_1 ", es B condicionado a A: $p(B/A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)} = \dfrac{0'72}{0'9} = 0'8$, resultado esperado por ser independientes A y B, podríamos haber puesto directamente $p(B/A) = p(B)$.

- CUESTIÓN 4.B. [2 PUNTOS]

  Los gerentes de unos grandes almacenes han comprobado que el 40 % de los clientes paga sus compras con tarjeta de crédito y el 60 % restante lo hace en efectivo. Ahora bien, si el importe de la compra es superior a 100 euros, la probabilidad de pagar con tarjeta pasa a ser 0.6. Si además sabemos que en el 30 % de las compras el importe es superior a 100 euros, calcular:

  a) Probabilidad de que un importe sea superior a 100 euros y sea abonado con tarjeta.

  b) Probabilidad de que un importe sea superior a 100 euros, sabiendo que fue abonado en efectivo.

  selcs Jun 2007 Solución:

  Consideramos los sucesos:

  - S, compra superior a 100 €
  - I, compra inferior o igual a 100 €
  - T, paga con tarjeta de crédito
  - T, paga en efectivo

  Nos dan las probabilidades: $p(T) = 0'4, \quad p(E) = 0'6, \quad p(T/S) = 0'6, \quad p(S) = 0'3$

  a) Es la probabilidad de la intersección: $p(T \cap S) = p(S) \cdot p(T/S) = 0'3 \cdot 0'6 = 0'18$

  b) $\{S, I\}$ forman sistema completo de sucesos. Por el teorema de Bayes:

  $$p(S/E) = \frac{p(E/S) \cdot p(S)}{p(E/S) \cdot p(S) + p(E/I) \cdot p(I)} = \frac{0'3 \cdot 0'4}{0'3 \cdot 0'4 + 0'6 \cdot 0'7} = 0'22$$

  tablas de contingencia: datos iniciales

	S	I	
$T/$	0'6		0'4
$E/$			0'6
	0'3		

  datos deducidos:

	S	I	
$T/$	0'6		0'4
$E/$	0'4		0'6
	0'3	0'7	

- CUESTIÓN 5.A. [1.5 PUNTOS]

  El nivel medio de protombina en una población normal es de 20 mg./100 ml. de plasma con una desviación típica de 4 mg./100 ml. Se toma una muestra de 40 individuos en los que la media es de 18.5 mg./100 ml. ¿Es la muestra comparable con la población, con un nivel de significación de 0.05?

  selcs Jun 2007 Solución:

  Contrastamos $H_0 : \mu = 20$ mg./100 ml. frente a $H_1 : \mu \neq 20$ mg./100 ml., consideramos test bilateral.

  Los datos son: $\bar{x} = 18'5, \sigma = 4, n = 40$.

  El nivel de significación del 5 %, $\alpha = 0'05$, corresponde con $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$.

  El intervalo de aceptación es $\mu \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu \pm 1'96 \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 20 \pm 1'96 \dfrac{4}{\sqrt{400}} = 20 \pm 1'23$ que da el intervalo $(18'77, 21'23)$.

  Como $\bar{x} = 18'5$ queda fuera del intervalo, se rechaza la hipótesis nula de que $\mu = 20$ mg./100 ml., la muestra puede venir de otra población.

- CUESTIÓN 5.B. [1.5 PUNTOS]

El peso de los niños varones a las 10 semanas de vida se distribuye según una normal con desviación típica de 87 gr. ¿Cuántos datos son suficientes para estimar, con una confianza del 95 %, el peso medio de esa población con un error no superior a 15 gr.?

selcs Jun 2007 Solución:

Los datos son: $\sigma = 87$;

El error $= z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ha de ser ≤ 15

El nivel de confianza del 95 % equivalente a nivel de significación del $\alpha = 0'05$ se corresponde con $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$.

Sustituyendo: $1'96 \cdot \dfrac{87}{\sqrt{n}} \leq 15$; $\quad 1'96 \cdot \dfrac{87}{15} \leq \sqrt{n}$; $\quad (11'36)^2 \leq n$; $\quad 129'23 \leq n$

La muestra debe tener un tamaño igual o mayor que 130 para que al nivel de confianza sea del 95 % el error sea menor que 15 gr.

Septiembre 2006

- CUESTIÓN 1.A. [3 PUNTOS]

  Estudiar para los diferentes valores del parámetro a, la existencia de soluciones del sistema:

  $$\left\{\begin{array}{l} x+y+z=a-1 \\ 2x+y+az=a \\ x+ay+z=1 \end{array}\right.$$

  y resolverlo cuando sea compatible indeterminado.

  selcs Sep 2006 Solución: Aplicando el método de Gauss empezamos a triangular la matriz ampliada, como hay un parámetro habrá que considerar los valores de éste que anulen un denominador:

  $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \left\{\begin{array}{l} 2^a+1^a.(-2) \\ 3^a-1^a \end{array}\right\} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 0 & -1 & a-2 & 2-a \\ 0 & a-1 & 0 & 2-a \end{pmatrix}$$

  Podemos detener aquí Gauss pues la y ha quedado aislada: Pasamos a sistema:

  $$\left\{\begin{array}{r} x+y+z=a-1 \\ -y+(a+2)z=2-a \\ (a-1)=2-a \end{array}\right. \qquad \text{queda } y=\frac{2-a}{a-1} \text{ para } a\neq 1$$

  Sustituyendo en la 2^a ecuación para despejar z:

  $$-\frac{2-a}{a-1}+(a-2)z=2-a; \quad (a-2)z=2-a+\frac{2-a}{a-1}; \quad z=\frac{2-a+\frac{2-a}{a-1}}{a-2} \text{ para } a\neq 2$$

  Tenemos entonces:

  - Si $a\neq 1$ y $a\neq 2$, el sistema es compatible determinado.
  - Si $a=1$ queda el sistema:

    $$\left\{\begin{array}{r} x+y+z=0 \\ -y-z=1 \\ 0y=1 \end{array}\right.$$

    Cuya tercera ecuación nos dice que es incompatible.
  - Si $a=2$ queda el sistema:

    $$\left\{\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ -y=0 \\ y=0 \end{array}\right. \qquad \text{equivalente a: } \left\{\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ y=0 \end{array}\right. \qquad \text{el sistema es compatible indeterminado.}$$

    Lo resolvemos pasando una incógnita al 2^0 miembro para que quede como parámetro, por ejemplo la z:

    $$\begin{array}{r} y=0 \\ x=1-z \end{array} \qquad z\in R$$

- CUESTIÓN 1.B. [3 PUNTOS]

  Para la elaboración de dos tipos de refrescos R1 y R2 se utilizan (además de agua) dos tipos de productos A y B. Cada refresco del tipo R1 contiene 3 gramos del producto A y 3 gramos del producto B y cada refresco del tipo R2 contiene 3 gramos del producto A y 6 gramos del producto B. Se dispone en total de 120 gramos de producto A y 180 gramos de producto B. ¿Cuántos refrescos de cada clase se han de elaborar para obtener un beneficio máximo sabiendo que con los refrescos R1 la ganancia es de 3 euros y con los refrescos R2 la ganancia es de 4 euros?

  selcs Sep 2006 Solución:

  Disponemos los datos en una tabla:

	R1	R2	
A	3	3	≤ 120
B	3	6	≤ 180

Las variables serían:

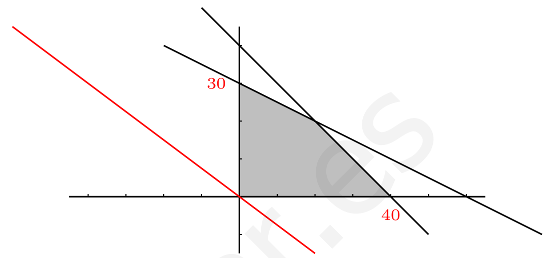
x número de refrescos de tipo A

y número de refrescos de tipo B

La función a maximizar es $f(x, y) = 3x + 4y$

Queda el sistema de inecuaciones con x, y positivas:

$$\begin{cases} 3x + 3y \leq 120 \\ 3x + 6y \leq 180 \end{cases}$$



Representamos:

$3x + 3y \leq 120$

x	0	40
y	40	0

$3x + 6y \leq 180$

x	0	60
y	30	0

Ahora la función igualada a 0:

$f(xy) = 3x + 4y = 0$

x	0	-40
y	0	30

El máximo se produce para: $f(20, 20) = 3{,}20 + 4{,}20 = 140$

- CUESTIÓN 2.A. [1.5 PUNTOS]

Descomponer el número 45 en dos sumandos tales que la suma del doble del cuadrado del primero más siete veces el cuadrado del segundo, sea mínima.

selcs Sep 2006 Solución:

primer sumando: x

segundo sumando: $45 - x$

Escribimos la función cuyo mínimo buscamos:

$f(x) = 2x^2 + 7(45 - x)^2 = 9x^2 - 630x + 14175$

Derivando: $f'(x) = 18x - 630$. Anulamos la derivada: $18x - 630 = 0$, resulta: $x = 35$

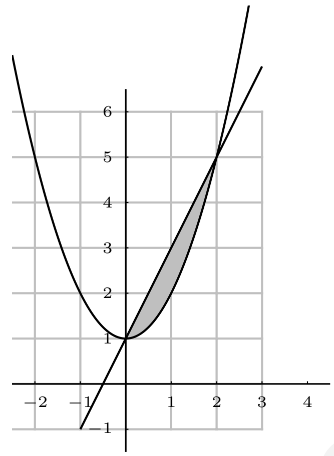
Con el estudio del crecimiento comprobamos que es mínimo:

x		35	
y'	$-$		$+$
y	$\searrow$		$\nearrow$

- CUESTIÓN 2.B. [1.5 PUNTOS]

Calcular el área limitada por la gráfica de las funciones $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = 2x + 1$.

selcs Sep 2006 Solución:



Buscamos los puntos de corte de las dos funciones: $\begin{cases} f(x) = x^2+1 \\ g(x) = 2x+1 \end{cases}$ $x^2+1 = 2x+1;$ $x^2-2x = 0;$ $x(x-2) = 0;$ $x = 0, x = 2$

Área$= \displaystyle\int_0^2$ recta $-$ parábola $=$

$dx = \int_0^2 (2x - x^2) \quad dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}u^2$

- CUESTIÓN 3.A. [2 PUNTOS]

  Dada la función $f(x) = \dfrac{6x^2 - x^4}{8}$, se pide:

  (a) Calcular su dominio

  (b) Determinar las asíntotas y los cortes con los ejes

  (c) Determinar máximos, mínimos e intervalos de crecimiento y decrecimiento

  (d) Hacer su representación gráfica aproximada

selcs Sep 2006 Solución:

Como es una función polinómica basta para representarla estudiar los puntos de corte y el crecimiento. Después contestaremos a los restantes apartados.

Puntos de corte

Puntos de corte con OX,

$y = 0: \quad \dfrac{6x^2 - x^4}{8} = 0, \quad 6x^2 - x^4 = 0, \quad x^2(6 - x^2) = 0, \quad x = 0 \text{ doble}, x = \pm\sqrt{6}$

Puntos de corte con OY, $x = 0: \quad y = \frac{0}{8} = 0$, ya considerado.

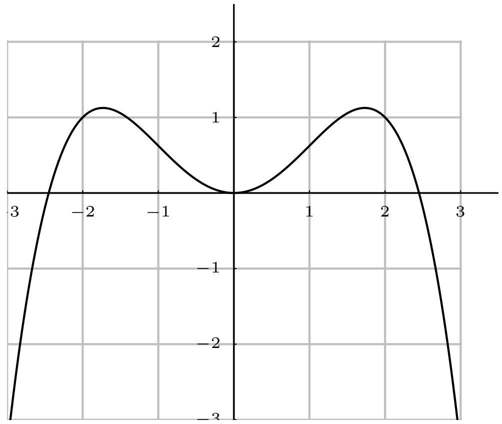
Crecimiento: se estudia el signo de la derivada:

$f'(x) = \dfrac{12x - 4x^3}{8} = \dfrac{3x - x^3)}{2} = \dfrac{x(3 - x^2)}{2}$

los factores se anulan para $x = 0, x = \pm\sqrt{3}$

x		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	
y'	$+$		$-$		$+$		$-$
y	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

Encajando la forma dada por el crecimiento con los puntos de corte podemos representar:



Ahora responderemos a los puntos del enunciado:

a) Dominio:
   El dominio es todo R pues es una función polinómica.

b) Asíntotas y cortes con los ejes:
   Asíntotas: no tiene por ser una función polinómica.
   Por ejemplo para la horizontal $y = n$:
   $n = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{6x^2 - x^4}{8} = \infty$

   Cortes con los ejes ya hallados.

c) Crecimiento y máximos y mínimos
   Como se ve en el estudio del crecimiento, como la función es continua y derivable siempre por ser polinómica, hay MÁXIMOS en $x = \pm\sqrt{3}$ y MÍNIMO en $x = 0$

- CUESTIÓN 3.B. [2 PUNTOS]

  Determinar a y b para que la función $f(x) = x^2 + 2ax + b$ tenga un mínimo en el punto $(-1, 2)$.

  selcs Sep 2006 Solución:

  Que tenga un mínimo en $(-1, 2)$, supone dos cosas: a) que pasa por ese punto: $f(-1) = 2$, b) que su derivada se anula en $x = -1$

  $f(-1) = 2: \qquad (-1)^2 + 2a(-1) + b = 2, \qquad 1 - 2a + b = 2, \qquad -2a + b = 1$

  $f'(-1) = 0: \qquad f'(x) = 2x + 2a, \qquad 2(-1) + 2a = 0, \qquad -2 + 2a = 0$, luego $a = 1$

  Sustituyendo en la ecuación anterior: $-2 \cdot 1 + b = 1, \qquad b = 3$

  Resulta: $f(x) = x^2 + 2x + 3$

- CUESTIÓN 4.A. [2 PUNTOS]

  En una ciudad se publican dos periódicos, el periódico A y el periódico B. La probabilidad de que una persona lea el periódico A es 0.1, la probabilidad de que una persona lea el periódico B es 0.1 y la probabilidad de que lea ambos es 0.02.

(a) Calcular la probabilidad de que una persona no lea ningún periódico

(b) Calcular la probabilidad de que una persona lea sólo un periódico

selcs Sep 2006 Solución:

Sabemos: $p(A) = 0'1, p(B) = 0'1, p(A \cap B) = 0'02$

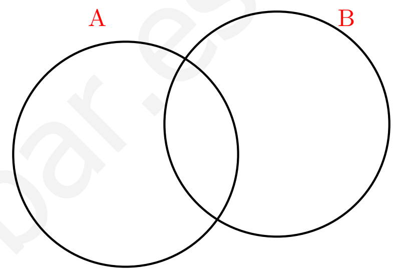
Hallemos primero la probabilidad de la unión que usaremos en los dos apartados:

$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0'1 + 0'1 - 0'02 = 0'18$

a) "ningún periódico" es el complementario de "algún periódico", o sea de la unión:

$p(\text{no lea ninguno}) = p(\text{ lea alguno})^c = 1 - p(A \cup B) = 1 - 0'18 = 0'82$

b)"solo uno" es decir "alguno pero no los dos":



$A \cup B = (\text{solo lea uno}) \underbrace{\cup}_{disjunta} (A \cap B)$, por tanto

$p(a \cup B) = p(\text{solo lea uno}) + p(A \cap B); \quad 0'18 = p(\text{solo lea uno}) + 0'02,$
despejando $p(\text{solo lea uno}) = 0'18 - 0'02 = 0'16$

- CUESTIÓN 4.B. [2 PUNTOS]

Tres máquinas A_1, A_2 y A_3 producen, respectivamente el 50 %, 30 % y 20 % de los artículos de una fábrica. A_1 produce el 3 % de artículos defectuosos, A_2 el 4 % y A_3 el 5 %. Elegido un artículo al azar resulta defectuoso, ¿qué probabilidad hay de que proceda de cada máquina?

selcs Sep 2006 Solución:

A_1 produce el 50 % y son defectuosos el 3 %
A_2 produce el 30 % y son defectuosos el 4 %
A_1 produce el 50 % y son defectuosos el 3 %

$\{A_1, A_2, A_3\}$ forman sistema completo de sucesos; por el teorema de Bayes:

$$p(A_1/D) = \frac{p(D/A_1) \cdot p(A_1)}{\sum_1^3 p(A_i).p(B/A_i)} = \frac{0'03 \cdot 0'5}{0'03 \cdot 0'5 + 0'04 \cdot 0'3 + 0'05 \cdot 0'2} = 0'4$$

De la misma forma:

$p(A_2/D) = 0'32; \qquad p(A_3/D) = 0'27$

- CUESTIÓN 5.A. [1.5 PUNTOS]

Tras múltiples observaciones se ha comprobado que el número de pulsaciones de los varones de 20 a 25 años se distribuye normalmente con una media de 72 pulsaciones y una desviación típica igual a 4. Si una muestra de 100 deportistas varones de esa edad da una media de 64 pulsaciones.

(a) ¿Queda el valor de 72 pulsaciones dentro del intervalo de confianza para la media muestral al 95 % de confianza?

(b) ¿Debemos aceptar la hipótesis de que hay diferencia significativa entre el número de pulsaciones de los deportistas y el número de pulsaciones de los varones en general, con un nivel de significación de 0.05?

selcs Sep 2006 Solución:

(a) Los datos son: $\bar{x} = 64, \sigma = 4, n = 100$.

Para el nivel de confianza del 95 % corresponde el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$

Entonces el intervalo de confianza tiene de extremos: $\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 64 \pm 1'96 \cdot \dfrac{4}{\sqrt{100}} = 64 \pm 0'784$

Luego el valor de 72 pulsaciones queda fuera del intervalo de confianza

(b) Contrastamos $H_0 : \mu = 72$ pulsaciones frente a $H_1 : \mu \neq 72$ pulsaciones, consideramos test bilateral.

Los datos son: $\sigma = 4; \quad n = 100$

nivel significación $\alpha = 0'05$ corresponde con $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$.

El intervalo de aceptación es $\mu \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu \pm 1'96 \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 72 \pm 1'96 \dfrac{4}{\sqrt{100}} = 72 \pm 0'784$ que da el intervalo $(71'216, 72'784)$.

Como $\bar{x} = 64$ queda fuera del intervalo, se rechaza la hipótesis nula de que $\mu = 72$ pulsaciones, concluimos que sí hay diferencia significativa para la muestra recogida entre los deportistas

- CUESTIÓN 5.B. [1.5 PUNTOS]

  Un fabricante de bombillas sabe que la desviación típica de la duración de esas bombillas es 100 horas. Calcula el tamaño de la muestra que se ha de someter a prueba para tener una confianza del 95 % de que el error de la duración media que se calcula sea menor que 10 horas.

  selcs Sep 2006 Solución:

  Los datos son: $\sigma = 100$ h;

  El error $= z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ha de ser ≤ 10 h

  El nivel de confianza del 95 % equivalente a nivel de significación del $\alpha = 0'05$ se corresponde con $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$.

  Sustituyendo: $1'96 \cdot \dfrac{100}{\sqrt{n}} \leq 10; \qquad 1'96 \cdot \dfrac{100}{10} \leq \sqrt{n}; \qquad (1'96)^2 \leq n; \qquad 384'16 \leq n$

  La muestra debe tener un tamaño igual o mayor que 385 para que el nivel de confianza sea del 95 %

Junio2006

- CUESTIÓN 1.A. [3 PUNTOS]

  La suma de las tres cifras de un número es 6 y si se intercambian la primera y la segunda, el número aumenta en 90 unidades. Finalmente si se intercambian la segunda y la tercera, el número aumenta en 9 unidades. Calcular dicho número.

  selcs Jun 2006 Solución:

  Sea el número de tres cifras "xyz", las condiciones se pueden expresar:

  $x+y+z=6$
  y x z = x y z + 90
  x z y = x y z + 9

  expresando los números en su descomposición polinómica:

  $$\begin{cases} x+y+z=6 \\ 100y+10x+z=100x+10y+z+90 \\ 100x+10z+x=100x+10y+z+9 \end{cases}$$

  $$\begin{cases} x+y+z=6 \\ -90x+90y=90 \\ 9z-9y=9 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z=6 \\ -x+y=1 \\ -y+z=1 \end{cases}$$

  que resuelto por Gauss da $z=3, y=2, x=1$. El número es el 123.

- CUESTIÓN 1.B. [3 PUNTOS] Una persona tiene 500000 euros para invertir en dos tipos de acciones A y B. Las acciones de tipo A tienen bastante riesgo con un interés anual del 10 % y las acciones del tipo B son bastante seguras con un interés anual del 7 %. Decide invertir como máximo 300000 euros en las de tipo A y como mínimo 100000 euros en las de tipo B e invertir en las de tipo A por lo menos tanto como en las de tipo B. ¿Cómo debería invertir sus 500000 euros para maximizar sus intereses anuales?

  selcs Jun 2006 Solución:

  x = número de euros invertido en acciones tipo A
  y = número de euros invertido en acciones tipo B

  $$\begin{cases} x+y\leq 500000 \\ x\leq 300000 \\ y\geq 100000 \\ x\leq y \end{cases}$$

  Ganancia: $f(x,y)=0'1x+0'07y$

  Representamos (trabajaremos en miles):

  $x+y\leq 500$

x	0	500
y	500	0

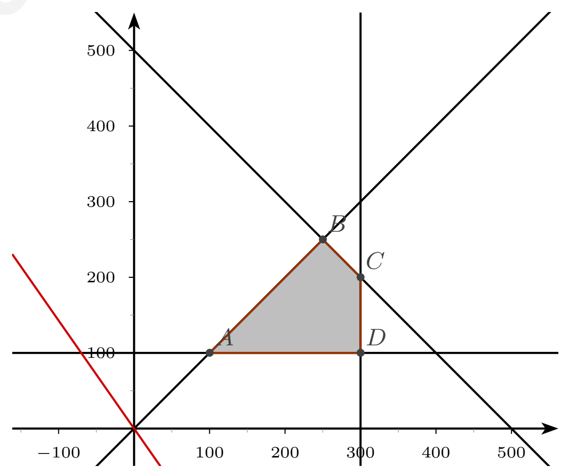
  $x\leq y$

x	0	200
y	0	200

  Ahora la función igualada a 0:

  $f(xy)=0'1x+0'07y=0$

x	0	-70
y	0	100

  Para maximizar hallamos y probamos los puntos B y C

  $$\begin{cases} x+y=500 \\ x=y \end{cases} \quad B=(250,250,) \quad f(250,250)=0'1\cdot 250+0'07\cdot 250=42'5$$

  $$\begin{cases} x+y=500 \\ x=300 \end{cases} \quad C=(300,200,) \quad f(300,200)=0'1\cdot 300+0'07\cdot 200=44$$

  Por tanto para maximizar los beneficios ha de invertir 300.000 € en las acciones de tipo A y 200.000 € en las acciones de tipo B que le producirían 44000 € .

- CUESTIÓN 2.A. [1.5 PUNTOS]

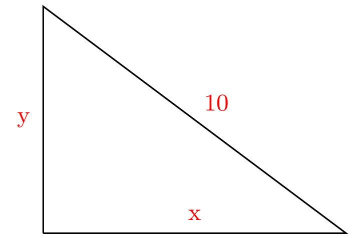
  Hallar las dimensiones de los lados de un triángulo rectángulo, de 10 metros de hipotenusa, para que su área sea máxima. ¿Cuál será dicha área?

selcs Jun 2006 Solución:

$S = \dfrac{x \cdot y}{2}$ máxima

Por Pitágoras: $x^2 + y^2 = 10^2$; $\quad y = \sqrt{100 - x^2}$ sustituyendo:

$S(x) = \dfrac{1}{2} x \sqrt{100 - x^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{100x^2 - x^4}$



Derivando y anulando la derivada:

$s'(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{200x - 4x^3}{2\sqrt{100x^2 - x^4}} = 0$

Basta anular el numerador:

$200x - 4x^3 = 0$; $\quad x(200 - x^2) = 0$; $\quad 200 - 4x^2 = 0$; $\quad x2 = 50$; $\quad x = \pm\sqrt{50}$

Con el estudio del crecimiento comprobamos que es máximo:

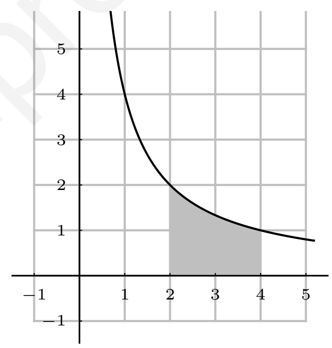
x		$\sqrt{50}$	
y'	$-$		$+$
y	$\nearrow$		$\searrow$

Hallamos el otro cateto $y = \sqrt{100 - \sqrt{50}^2} = \sqrt{50}$ y el área máxima: $S = \dfrac{\sqrt{50} \cdot \sqrt{50}}{2} = 25$

- CUESTIÓN 2.B. [1.5 PUNTOS]

  Hallar el área encerrada por la curva $x.y = 4$, el eje OX y las rectas $x = 2$ y $x = 4$.

  selcs Jun 2006 Solución:

  Buscamos los puntos de corte de las dos funciones:

  Área$= \displaystyle\int_2^4 \frac{4}{x}dx = 4\int_2^4 \frac{1}{x}dx = 4\left[\ln|x|\right]_2^4 =$
  $4(\ln 4 - \ln 2) = 4\ln 2 = 2'7722u^2$

- CUESTIÓN 3.A. [2 PUNTOS]

  Dada la función $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$, se pide:

  (a) Calcular su dominio

  (b) Calcular sus asíntotas

  (c) Estudiar la monotonía y los extremos

  (d) Hacer su representación gráfica aproximada.

  selcn Junio 2006 Solución: Primero representaremos y después responderemos a los apartados que falten:

  1) Dominio y regionamiento Estudiamos el signo de la función.

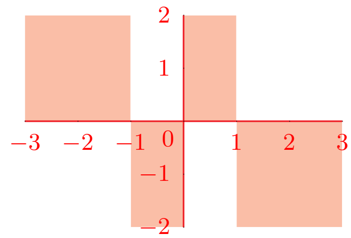
  Para ello escribimos la función en la forma:

$f(x) = \dfrac{x^3}{(x+1)(x-1)}$

Hallando las raíces de numerador y denominador resulta que delimitan región de cambio de signo de y : $x = 0, x = 1, x = -1$

x		-1		0		1	
y	$-$	|	$+$	|	$-$	|	$+$

El dominio es $R - \{-1, 1\}$



2) Puntos de corte con los ejes: Anulamos cada variable:

con $OY : x = 0$, resulta $y = 0$

con $OX : y = 0$, resulta $x = 0$

3) Asíntotas: Rectas tangentes en el infinito

verticales valores de x en los que la función se va a infinito:

Asíntotas verticales $x = -1, \quad x = 1$

Asíntota horizontal $n = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{x^2-1} = \infty$ no hay

Asíntota oblicua $y = mx + n$ $m = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{x^3}{x^2-1}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{x^3-x} = 1$

$n = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - mx) = \lim\limits_{x\to\infty} (\dfrac{x^3}{x^2-1} - x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3 - x^3 + x}{x^2-1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x^2-1} = 0$

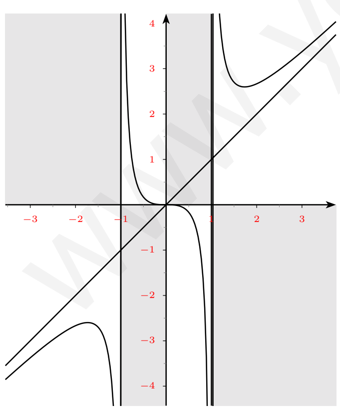
Asíntota oblicua $y = x$

4) Extremos y crecimiento Estudiamos el signo de la derivada

$f'(x) = \dfrac{3x^2(x^2-1) - 2x\cdot x^3}{(x^2-1)^2} = \dfrac{x^4 - 3x^2}{(x^2-1)^2} = 0$

$x^4 - 3x^2 = 0 \quad x = 0, x = \sqrt{3}, x = -\sqrt{3}$

x		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	
y'	$+$		$-$		$+$		$-$
y	$\nearrow$	MAX	$\searrow$	INFLEXION	$\searrow$	MIN	$\nearrow$



- CUESTIÓN 3.B. [2 PUNTOS]

  Hallar los valores de a, b, c y d en la función $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ sabiendo que su tangente en el punto $(1, 1)$ es la recta $y = -x + 2$ y que tiene un extremo en el punto $(0, 2)$.

selcs Jun 2006 Solución:

$y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$y' = 3ax^2 + 2bx + c$

De que la tangente en el punto $(1, 1)$ sea la recta $y = -x + 2$, resulta:

Pasa por $(1, 1)$ luego $f(1) = 1$ sustituyendo "x" e "y" queda: $a + b + c + d = 1$
La pendiente en $x = 1$ es -1 es decir $f'(1) = -1$, sustituyendo "x" e "y'" en la derivada queda: $3a + 2b + c = -1$

De que tiene un extremo en el punto $(0, 2)$, resulta:

Pasa por $(0, 2)$ luego $f(0) = 2$ sustituyendo "x" e "y" queda: $d = 0$
Tiene extremo en $x = 0$ luego la derivada se anula en $x = 0$, queda: $f'(0) = c = 0$

Por tanto el sistema con cuatro incógnitas iniciales queda reducido a:

$$\begin{cases} a + b + 2 = 1 \\ 3a + 2b = -1 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} -2 - 2b = 2 \\ \underline{3a + 2b = -1} \\ a = 1 \end{array} \qquad b = -2$$

El polinomio buscado es $y = x^3 - 2x^2 + 2$

- CUESTIÓN 4.A. [2 PUNTOS]

De dos tiradores se sabe que uno de ellos hace dos dianas de cada tres disparos y el otro consigue tres dianas de cada cuatro disparos. Si los dos disparan simultáneamente, calcular:

(a) La probabilidad de que los dos acierten.

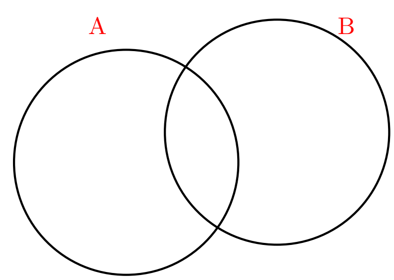
(b) La probabilidad de que uno acierte y el otro no.

(c) La probabilidad de que ninguno de los dos acierte.

(d) La probabilidad de que alguno acierte.

selcs Jun 2006 Solución:

Consideramos los sucesos: A = acierta el primer tirador, $p(A) = \dfrac{2}{3}$; B = acierta el segundo tirador; $p(B) = \dfrac{3}{4}$. Los sucesos son independientes.



a) $p(\text{ los dos acierten }) = p(A \cap B) = p(A).p(B) = \dfrac{2}{3}.\dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{2}$

b) $p(\text{ acierte uno solo }) = p((A \cap B^c) \underbrace{\cup}_{disjunta} (A^c \cap B)) = p((A \cap B^c)) + p(A^c \cap B)) =$

$p(A).p(B^c) + p(A^c).p(B) = \dfrac{2}{3}.\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{3}.\dfrac{3}{4} = \dfrac{5}{12}$

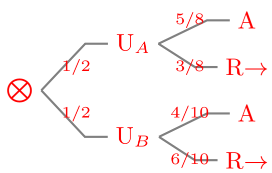
c) $p(\text{ ninguno acierte }) = p(A^c \cap B^c) = p(A^c).p(B^c) = \dfrac{1}{3}.\dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{12}$

d) $p(\text{ alguno acierte }) = p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{11}{12}$

- CUESTIÓN 4.B. [2 PUNTOS]

Tenemos una urna A con 3 bolas rojas y 5 azules y una urna B con 6 bolas rojas y 4 azules. Si sacamos de ellas una bola al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea roja?

selcs Jun 2006 Solución:



Hay 8 bolas en la urna U_A y 10 bolas en la U_B. Como se elige una de las dos urnas al azar la probabilidad de cada una es $\frac{1}{2}$.

Sumando las dos ramas que terminan extrayendo bola roja: $p(R) = \frac{1}{2}.\frac{3}{8} + \frac{1}{2}.\frac{6}{10} = 0'48$

- CUESTIÓN 5.A. [1.5 PUNTOS]

  Un estudio realizado en el ámbito de la Unión Europea concluye que la edad de los propietarios de un automóvil "Mercedes" en el momento de su adquisición tiene un comportamiento Normal con media 38 años y varianza 16. Un concesionario de dicha marca, instalado recientemente en España, ha vendido sólo 150 vehículos y ha comprobado que la edad media de sus clientes es de 38.3 años. Aceptando para los clientes españoles la varianza obtenida para los clientes europeos, ¿se puede aceptar que la edad media al adquirir un vehículo de esa marca es la misma en España que en Europa, para un nivel de significación del 5 %?

  selcs Jun 2006 Solución:

  Contrastamos $H_0 : \mu = 38$ años frente a $H_1 : \mu \neq 38$ años, consideramos test bilateral.

  Los datos son: $\bar{x} = 38'3, \sigma^2 = 16 \to \sigma = 4, n = 150$.

  El nivel de significación del 5 %, $\alpha = 0'05$, corresponde con $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$.

  El intervalo de aceptación es $\mu \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \mu \pm 1'96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 38 \pm 1'96 \frac{4}{\sqrt{500}} = 38 \pm 0'65$ que da el intervalo $(37'35, 38'65)$.

  Como $\bar{x} = 38'3$ queda dentro del intervalo, se acepta la hipótesis nula de que $\mu = 38$ años.

  Se acepta que la edad media al adquirir un vehículo de esa marca es la misma en España que en Europa, para un nivel de significación del 5 %.

- CUESTIÓN 5.B. [1.5 PUNTOS]

  La media de las medidas de los diámetros de una muestra aleatoria de 200 bolas de rodamiento fabricadas por cierta máquina fue de 0.824 cm. Y la desviación típica fue de 0.042 cm. Hallar los límites de confianza al 95 % para el diámetro medio de las bolas fabricadas por esa máquina.

  selcs Jun 2006 Solución:

  Los datos son: $\bar{x} = 0'824, \sigma = 0'042, n = 200$.

  Para el nivel de confianza del 95 % corresponde el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$

  Entonces el intervalo de confianza tiene de extremos: $\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0'824 \pm 1'96 \cdot \frac{0'042}{\sqrt{200}} = 0'824 \pm 0'038 \begin{cases} 0'8182 \\ 0'8297 \end{cases}$

Septiembre 2005

- CUESTIÓN 1.A. [3 PUNTOS]

  Tres jugadores convienen que el que pierda una partida doblará el dinero que en ese momento tengan los otros dos. Después de haber perdido todos ellos una partida, cada jugador se retira con veinte euros. ¿Cuánto dinero tenían al principio del juego?

  selcs Sept 2005 Solución:

  Sea:

  x dinero inicial de J_1

  y dinero inicial de J_2

  z dinero inicial de J_3

  Primera partida (pierde J_1): $\begin{cases} J_1: & x-y-z \\ J_2: & 2y \\ J_3: & 2z \end{cases}$

  Segunda partida (pierde J_2): $\begin{cases} J_1: & 2(x-y-z)=2x-2y-2z \\ J_2: & 2y-(x-y-z)-2z=3y-x-z \\ J_3: & 4z \end{cases}$

  Tercera partida (pierde J_3): $\begin{cases} J_1: & 2(2x-2y-2z)=4x-4y-4z \\ J_2: & 2(3y-x-z)=6y-2x-2z \\ J_3: & 4z-(2x-2y-2z)-(3y-x-z)=7z-x-y \end{cases}$

  Al final los tres jugadores tienen 20 €

  $\begin{cases} 4x-4y-4z=20 \\ 6y-2x-2z=20 \\ 7z-x-y=20 \end{cases} \quad \begin{cases} x-y-z=5, \\ -x+3y-z=10, \\ -x-y+7z=20 \end{cases}$

  Tiene como matriz asociada:

  $\begin{matrix} 1 & -1 & -1 & 5 \\ -1 & 3 & -1 & 10 \\ -1 & -1 & 7 & 20 \end{matrix}$

  Que triangulando por Gauss resulta:

  $\begin{matrix} 1 & -1 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & -2 & 15 \\ 0 & 0 & 8 & 80 \end{matrix}$

  que sustituyendo hacia arriba da como soluciones: $z=10, \quad y=\frac{35}{2}, \quad x=\frac{65}{2}$.

- CUESTIÓN 1.B. [3 PUNTOS]

  Una fábrica de tableros de madera pintados produce dos tipos de tableros: tableros normales (una mano de imprimación más otra mano de pintura) y tableros extras (una mano de imprimación y tres manos de pintura). Disponen de imprimación para 10000 m^2 , pintura para 20000 m^2 y tableros sin pintar en cantidad ilimitada. Sus ganancias netas son: 3 euros por el m^2 m de tablero normal y 5 euros por el m^2 de tablero extra.

  (a) ¿Qué cantidad de tablero de cada tipo les conviene fabricar para que las ganancias sean máximas?

  (b) ¿Y si ganara 1 euro por el m^2 de tablero normal y 4 euros por el m^2 de tablero extra?

  selcs Sept 2005 Solución:

$x =$ número de miles de m^2 de tableros normales
$y =$ número de miles de m^2 de tableros extras
Precio total: $f(x, y) = 3000x + 8000y$ € buscamos el máximo

$$\begin{cases} x + y \leq 10 \\ x + 3y \leq 20 \end{cases}$$

Representamos:

$x + y \leq 10$

x	0	10
y	10	0

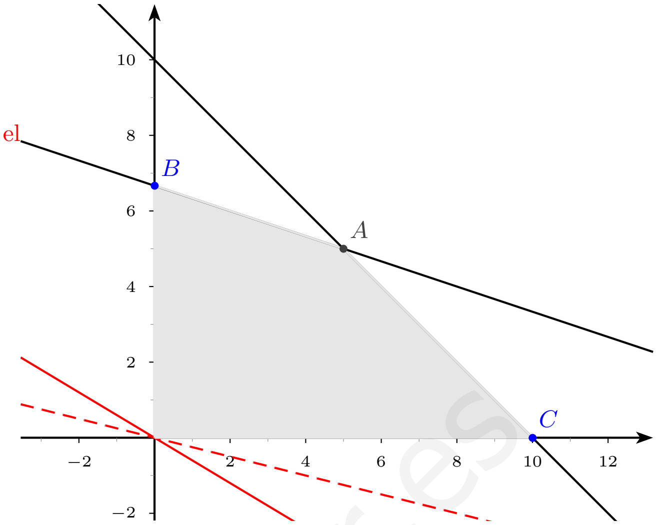
$x + 3y \leq 20$

x	0	20
y	$6'66$	0

Ahora la función igualada a 0:

$f(x, y) = 3000x + 5000y = 0$

x	0	-5
y	0	3



a) Para maximizar la ganancia tomaríamos la paralela a $f(x, y) = 0$ que pasa por el punto A.

Hallemos sus coordenadas:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x + 3y = 20 \end{cases} \quad A = (5, 5)$$

$C(5, 5)$, o sea 5000 normales y 5000 extra. El beneficio sería: $f(5, 5) = 3000 \cdot 5 + 5000 \cdot 5 = 40000$ € .

b) Ahora la nueva función de beneficio sería: $f^*(x, y) = x + 4000y = 0$

x	0	-8
y	0	2

Y el máximo se alcanza en el punto $B(0, 6'6667)$

$f^*(0, 6'6667) = 0 + 4000 \cdot 6'6667 = 26667$ € .

- CUESTIÓN 2.A. [2 PUNTOS]

  Dada la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 1}$, se pide:

  (a) Hallar el dominio y las asíntotas

  (b) Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento

  (c) Hacer una representación gráfica aproximada.

selcs Sept 2005 Solución:

a) Dominio y regionamiento: Hallamos las raíces de numerador y denominador:

Anulamos el denominador:

$x^2 - 1 = 0 \quad \begin{matrix} x_1 = +1 \\ x_2 = -1 \end{matrix}$

A partir de las raíces de numerador y denominador hallamos los cambios de signo de la función.

Luego delimitan región de cambio de signo de y : $x = 0, x = \pm 1$

x		-1		0		1	
y	-		+		-		+

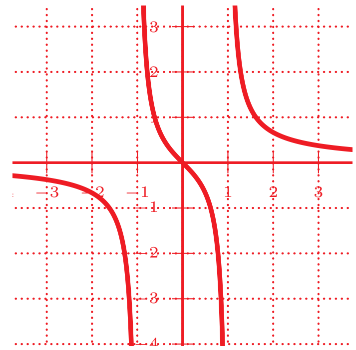
$y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$

Además: Dominio $= R - \{-1, 1\}$

b) Puntos de corte con los ejes: Anulamos cada variable:

con $OY : x = 0$, resulta $y = 0$

con $OX : y = 0$, resulta el mismo, el origen



c) Asíntotas: Rectas tangentes en el infinito

verticales valores de x en los que la función se va a infinito: Asíntotas verticales, valores de x que anulan al denominador: $x = -1, x = 1$

Asíntota horizontal $y = n$: $n = \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{x^2-1} = 0;\quad y = 0$

d) Extremos y crecimiento: $f'(x) = \dfrac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}$ Anulamos: $-x^2-1 = 0$ no tiene solución, luego la derivada es siempre positiva y por tanto la función es siempre decreciente

- CUESTIÓN 2.B. [2 PUNTOS]

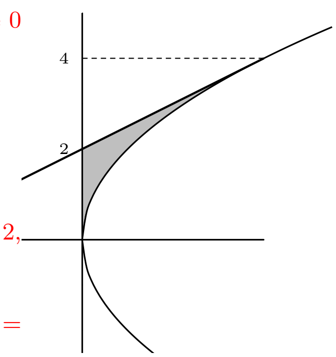
Hallar el área del recinto limitado por la parábola de ecuación $y^2 = 4x$, el eje de ordenadas y la recta $x - 2y + 4 = 0$.

selcs Sept 2005 Solución:

En este caso nos interesa integrar con respecto al eje de ordenadas, intercambian sus papeles x e y:
la recta es: $x = 2y - 4$
los puntos de corte con la parábola son:

$$\begin{cases} x = \frac{y^2}{4} \\ x = 2y - 4 \end{cases} \qquad y^2 = 4(2y-4), \quad y^2 - 8y + 16 = 0, \quad y = \frac{8 \pm \sqrt{64-64}}{2} = 4$$

doble, luego la recta es tangente a la parábola en el punto $(4, 4)$
Por tanto el área viene dada por el área de la parábola con el eje OY entre 0 y 4 menos el área del triángulo:



$$S = \int_0^4 \frac{y^2}{4} dy = \left[\frac{y^3}{12}\right]_0^4 = \frac{64}{12} = \frac{16}{3}$$

Área del triángulo : $\frac{4\cdot 2}{2} = 4$

Área buscada: $\dfrac{16}{3} - 4 = \dfrac{4}{3}\, u^2$

Otra forma de hacerlo integrando con respecto al eje OX es (recta $y = \dfrac{x}{2} + 2$, parábola $y = \pm\sqrt{4x}$)

$$\text{Área} = \int_0^4 \text{recta - parábola} = \int_0^4 \left(\frac{x}{2} + 2 - \sqrt{4x}\right)dx = \left[\frac{x^2}{4} + 2x - 2\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^4 =$$

$$\left[\frac{x^2}{4} + 2x - 2\frac{2\sqrt{x^3}}{3}\right]_0^4 = 4 + 8 - \frac{32}{3} = \frac{4}{3}\, u^2$$

- CUESTIÓN 3.A. [1.5 PUNTOS]

Dentro del triángulo limitado por los ejes OX, OY y la recta $2x + y = 8$, se inscribe un rectángulo de vértices $(0,0)$, $(a,0)$, (a,b) y $(0,b)$. Determinar el punto (a,b) al que corresponde un área máxima.

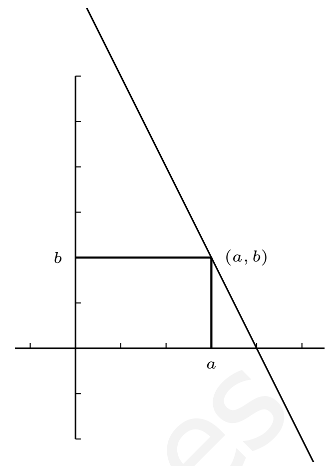
selcs Sept 2005 Solución:

Área del rectángulo $S = a \cdot b$ máximo.
Como el punto (a, b) está en la recta cumple la ecuación:
$2a + b = 8$, despejando $b = 8 - 2a$
Sustituyendo $S(a) = a \cdot (8 - 2a) = 8a - 2a^2$ ha de ser máximo.
Derivando y anulando la derivada:

$S'(a) = 8 - 4a = 0, \quad a = 2$

a		2	
S'	$+$		$-$
S	$\nearrow$		$\searrow$
		MÁXIMO	

Resulta $b = 8 - 2 \cdot 2 = 4$. El punto es $(2, 4)$



- CUESTIÓN 3.B. [1.5 PUNTOS]

  Dibuja la parábola $f(x) = x^2 - 6x + 8$.

  (a) ¿En qué punto de la gráfica la tangente es paralela al eje de abscisas?

  (b) Hallar la ecuación de la recta tangente a $f(x)$ en el punto $P(2, 0)$.

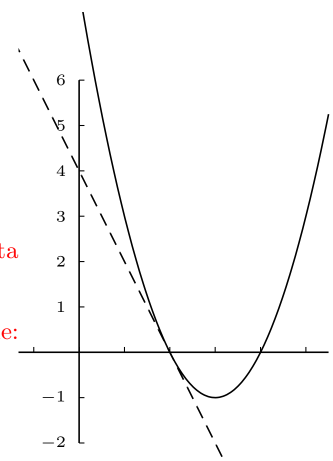
  selcs Sept 2005 Solución:

Puntos de corte con los ejes: Anulamos cada variable:
con $OY : x = 0$, resulta $y = 8$

con $OX : y = 0$, resulta $x^2 - 6x + 8 = 0 \quad \begin{array}{l} x_1 = 4 \\ x_2 = 2 \end{array}$
El mínimo lo hallamos derivando y anulando la derivada:
$f'(x) = 2x - 6 \quad x = 3 \quad y = f(3) = -1$. El punto es $(3, -1)$

a) Precisamente en el mínimo que al ser cero la derivada dice que la recta tangente es horizontal

b) La recta tangente en el punto x_0 es $y - y_0 = m(x - x_0)$ donde:
$y_0 = f(x_0) = f(2) = 0$
$m = f'(x_0) = f'(2) = 2 \cdot 2 - 6 = -2$ Queda $y - 0 = -2(x - 2)$
Por tanto la recta tangente en el punto $x = 2$ es $y = -2x + 4$



- CUESTIÓN 4.A. [1.5 PUNTOS]

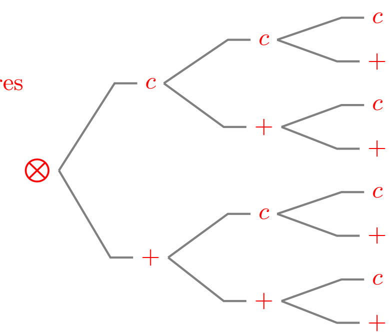
  Un juego consiste en lanzar tres monedas al aire, de manera que si las tres monedas aparecen de igual modo (tres caras o tres cruces) el jugador gana y en caso contrario se vuelve a tirar.

  (a) ¿Cuál es la probabilidad de ganar en la primera tirada?

  (b) ¿Cuál es la probabilidad de perder las dos primeras tiradas y ganar la tercera?

  selcs Sept 2005 Solución:

a) Ganar en la primera tirada triple se corresponde con la primera rama , tres caras, o la última, tres cruces, sumando sus probabilidades:
$p(\text{ ganar }) = 0'5^3 + 0'5^3 = 0'25$
b) Perder la primera tirada tiene como probabilidad por lo tanto
$p(\text{ perder }) = 0'75$
Esta probabilidad es independiente de la triple tirada, luego:
$p(\text{ perder } 1^a \cap \text{ perder } 2^a \cap \text{ ganar } 3^a) = 0'75 \cdot 0'75 \cdot 0'25 = 0'14$



- CUESTIÓN 4.B. [1.5 PUNTOS]

  En un sistema de alarma, la probabilidad de que se produzca un peligro es 0.1. Si éste se produce, la probabilidad de que la alarma funcione es 0'95. La probabilidad de que la alarma funcione sin haber peligro es 0'03. Hallar:

  (a) Probabilidad de que habiendo funcionado la alarma no haya habido peligro.

  (b) Probabilidad de que haya un peligro y la alarma no funcione.

  selcs Sept 2005 Solución:

  Llamamos A al suceso "funcionar la alarma".

  Llamamos P al suceso "producirse peligro "; $p(P) = 0'1$; ; además nos dicen que $p(A/P) = 0'95$

  Llamamos N al suceso "no producirse peligro "; resulta $p(N) = 0'9$; además nos dicen que $p(A/N) = 0'03$

  $\{P, N\}$ forman sistema completo de sucesos. Por el teorema de Bayes:

  a) Nos piden $p(N/A) = \dfrac{p(A/N)\cdot p(N)}{p(A/N)\cdot p(N) + p(A/P)\cdot p(P)} = \dfrac{0'03\cdot 0'9}{0'03\cdot 0'9 + 0'95\cdot 0'1} = \dfrac{0'027}{0'027 + 0'095} = 0{,}2213$

  b) Entiendo que piden la intersección $p(P \cap A^c = p(P).p(A^c/P) = 0'1 \cdot 0'05 = 0'005$

- CUESTIÓN 5.A. [2 PUNTOS]

  Se desea estudiar el gasto anual de fotocopias (en euros) de los estudiantes de bachillerato en Murcia. Para ello, se ha elegido una muestra aleatoria de 9 estudiantes, resultando los valores siguientes:

  100, 150, 90, 70, 75, 105, 200, 120, 80

  Se supone que la variable aleatoria objeto de estudio sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica igual a 12.

  Determinar un intervalo de confianza del 95 % para la media del gasto anual en fotocopias por estudiante.

  selcs Sept 2005 Solución:

  Antes que nada calculamos la media de la muestra: $\bar{x} = \dfrac{100 + 150 + 90 + 70 + 75 + 105 + 200 + 120 + 80}{9} = 110$

  Los datos son: $\bar{x} = 110, \sigma = 12, n = 9$.

  Para el nivel de confianza del 95 % corresponde el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$

  Entonces el intervalo de confianza tiene de extremos: $\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} = 110 \pm 1'96 \cdot \dfrac{12}{\sqrt{9}} = 110 \pm 7'89 \begin{cases} 117'89 \\ 102'11 \end{cases}$

  El intervalo de confianza para la media de la nueva producción de lámparas es $(102'11, 117'89)$

- CUESTIÓN 5.B. [2 PUNTOS]

  El peso de los niños varones a las diez semanas de vida se distribuye según una normal con desviación típica de 87 gramos. ¿Cuántos datos son suficientes para estimar, con una confianza del 95 %, el peso medio de esa población con un error no superior a 15 gramos?

  selcs Sept 2005 Solución:

  Los datos son: $\sigma = 87$ gr ;

  El error $= z_{\frac{\alpha}{2}} \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ha de ser ≤ 15 gr

  El nivel de confianza del 95 % equivalente a nivel de significación del $\alpha = 0'05$ se corresponde con $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1'96$.

  Sustituyendo: $1'96 \cdot \dfrac{87}{\sqrt{n}} \leq 15$; $1'96 \cdot \dfrac{87}{15} \leq \sqrt{n}$; $(11'368)^2 \leq n$; $129'23 \leq n$

  La muestra debe tener un tamaño igual o mayor que 130 para que el nivel de confianza sea del 95 %

Junio 2005

- CUESTIÓN 1.A. [3 PUNTOS]

  Estudiar para qué valores de k es compatible el sistema siguiente:

  $$\left\{\begin{array}{l} 2x-y=4 \\ -x+\frac{1}{2}y=-2 \\ x+ky=2 \end{array}\right.$$

  Resolverlo para los valores de k que lo hacen compatible indeterminado.

  selcs Jun 2005 Solución:

  Triangulamos la matriz asociada al sistema:

  $$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 1/2 & -2 \\ 1 & k & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 2^a \cdot 2+1^a \\ 3^a. \cdot 2-1^a \end{array} \quad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2k+2 & 0 \end{pmatrix}$$

  Volviendo a sistema queda:

  $$\left\{\begin{array}{l} 2x-y=4 \\ (2k+2)y=0 \end{array}\right. \quad 2k+2=0, \quad k=-\frac{1}{2}$$

  queda por tanto:

  Si $k \neq -\frac{1}{2}$ queda $\left\{\begin{array}{l} 2x-y=4 \\ y=0 \end{array}\right.$ sistema compatible determinado: $y=0, x=2$.

  Si $k=-\frac{1}{2}$ queda $\left\{\begin{array}{l} 2x-y=4 \\ 0y=0 \end{array}\right.$ el sistema se reduce a la ecuación $2x-y=4$, sistema compatible indeterminado, la solución se puede expresar $y=2x-4, \quad x \in R$

- CUESTIÓN 1.B. [3 PUNTOS]

  Un grupo de alumnos formado por veinte chicas y diez chicos organizan un viaje. Para que el viaje les salga más económico deciden pedir trabajo por las tardes en una compañía que se dedica a realizar encuestas y que contrata a equipos de jóvenes de dos tipos:

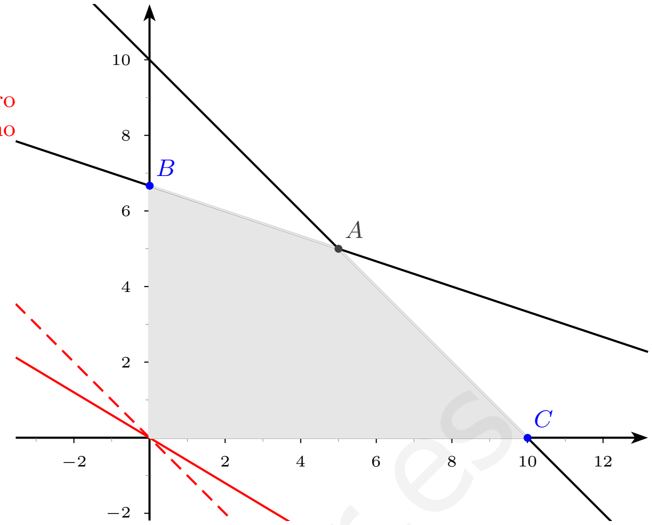
  Tipo A: Parejas (una chica y un chico).

  Tipo B: Equipos de cuatro (tres chicas y un chico). La compañía paga 30 euros por la tarde de la pareja y 50 euros por la tarde del equipo de cuatro.

  (a) ¿Cómo les conviene distribuirse para sacar la mayor cantidad posible de dinero?

  (b) ¿Y si les pagara 30 euros por la tarde de la pareja y 30 euros por la tarde del equipo de cuatro?

  selcs Jun 2005 Solución:



x = número de parejas y = número de equipos de cuatro

Precio total: $f(x,y) = 30x + 50y$ € buscamos el máximo

$$\begin{cases} x + y \leq 10 \\ x + 3y \leq 20 \end{cases}$$

Representamos:

$x + y \leq 10$

x	0	10
y	10	0

$x + 3y \leq 20$

x	0	20
y	$6'66$	0

Ahora la función igualada a 0:

$f(x,y) = 30x + 50y = 0$

x	0	-5
y	0	3

a) Para maximizar la ganancia tomaríamos la paralela a $f(x,y) = 0$ que pasa por el punto A.

Hallemos sus coordenadas:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ x + 3y = 20 \end{cases} \qquad A = (5,5)$$

$C(5,5)$, o sea 5 parejas y 5 de cuatro. El beneficio sería: $f(5,5) = 30 \cdot 5 + 50 \cdot 5 = 400$ € .

b) Ahora la nueva función de beneficio sería: $f^*(x,y) = 30x + 30y = 0$

x	0	-2
y	0	2

Ahora el máximo se da en cualquier punto de la recta AC pues:

$f^*(5,5) = 30 \cdot 5 + 30 \cdot 5 = 300$ € .

$f^*(10,0) = 30 \cdot 10 = 300$ € .

Los puntos de esa recta que tengan coordenadas enteras son: $(5,5)(6,4),(7,3),(8,2),(9,1),(10,0)$

- CUESTIÓN 2.A. [2 PUNTOS]

  Dada la función $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$, se pide:

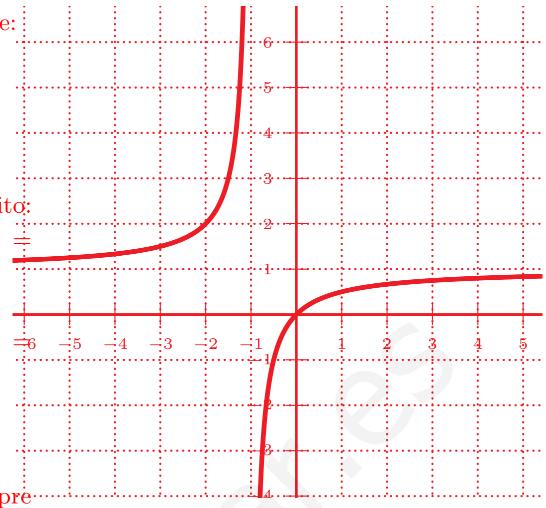
  (a) Calcular su dominio y asíntotas.

  (b) Determinar sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

  (c) Hacer su representación gráfica aproximada.

  selcs Jun 2005 Solución:

Se trata de una hipérbola por tanto para representarla veremos los puntos de corte y las asíntotas:



a) Puntos de corte con los ejes: Anulamos cada variable:

con $OY: x=0$, resulta $y=\frac{0}{1}=0$

con $OX: y=0$, resulta el mismo

b) Asíntotas: Rectas tangentes en el infinito

verticales valores de x en los que la función se va a infinito:

Asíntotas verticales, anulamos el denominador $x+1=0$, $\quad x=-1$ pues $\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{x}{x+1} = \pm\infty$

Asíntota horizontal $y=n$: $\quad n = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1} = 1; \quad y=2$

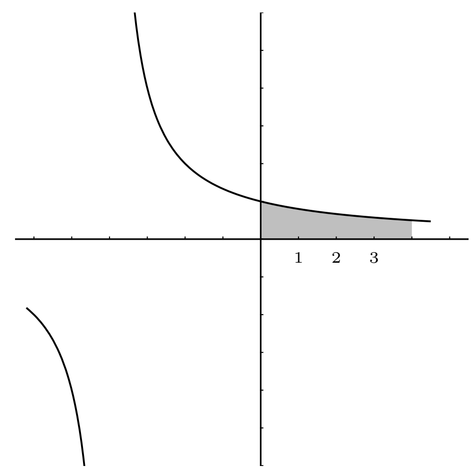
Como piden el crecimiento hacemos la derivada:

$f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$, como es siempre positiva f es siempre creciente.

- CUESTIÓN 2.B. [2 PUNTOS]

La curva $y = \frac{4}{x+4}$, el eje OX, el eje OY y la recta $x=4$ limitan una superficie S. Calcular el área de S.

selcs Jun 2005 Solución:



La curva es una hipérbola.

$S = \int_0^4 \frac{4}{x+4}dx = [4\ln|x+4|]_0^4 = 4(\ln 8 - \ln 4) = 2'77\ u^2$

- CUESTIÓN 3.A. [1.5 PUNTOS]

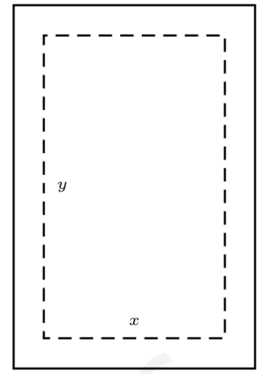
Una hoja de papel debe tener 18 cm2 de texto impreso, márgenes superior e inferior de 2 cm de altura y márgenes laterales de 1 cm de anchura. Obtener razonadamente las dimensiones que minimizan la superficie de papel.

selcs Jun 2005 Solución:

Área texto: $x \cdot y = 18\ cm^2$
Área folio: $S = (x+2)(y+4)$ mínima.
Sustituyendo:
$S(x) = (x+2)(\frac{18}{x}+4) = \frac{36}{x} + 4x + 26$ mínimo
Derivamos y anulamos la derivada:
$S'(x) = -\frac{36}{x^2} + 4 = \frac{-36+4x^2}{x^2}$; $\quad -36+4x^2 = 0, \quad x = \pm 3$

x		3	
y'	$-$		$+$
y	$\searrow$		$\nearrow$

MÍNIMO



En consecuencia $y = \frac{18}{3} = 6$

Por tanto el folio tiene 5 de ancho por 10 de alto.

- CUESTIÓN 3.B. [1.5 PUNTOS]

Dibuja la parábola $f(x) = x^2 - 5x + 8$.

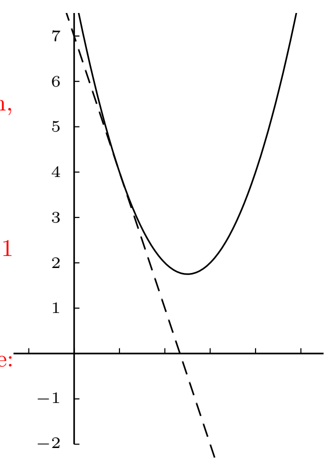
(a) ¿En qué punto de la gráfica la tangente es paralela a la bisectriz del primer y tercer cuadrantes?

(b) Hallar la ecuación de la recta tangente a la parábola en el punto $P(1,2)$. (nota: El punto es exterior a la parábola se puede resolver haciendo que la recta $y-2 = m(x-1)$ toque en un solo punto a la parábola; preferimos cambiar enunciado: tangente por $P(1,4)$)

selcs Jun 2005 Solución:

Puntos de corte con los ejes: Anulamos cada variable:
con $OY: x = 0$, resulta $y = 8$

con $OX: y = 0$, resulta $x^2-5x+8 = 0, \quad x = \frac{5 \pm \sqrt{25-40}}{2}$ no tiene solución, la parábola no corta al eje OX
El mínimo lo hallamos derivando y anulando la derivada:
$f'(x) = 2x - 5 = 0, \quad x = 2'5; f(2'5) = 1'75$ Mínimo en $(2'5, 1'75)$



a) La bisectriz del del primer y tercer cuadrantes tiene de pendiente $m = 1$ luego nos piden encontrar en qué punto la derivada es 1.
$f'(x) = 2x - 5 = 1 \quad x = 3; f(3) = 9 - 15 + 8 = 2$ El punto es $(3,2)$

b) La recta tangente en el punto x_0 es $y - y_0 = m(x - x_0)$ donde:
$y_0 = f(x_0) = f(1) = 4$
$m = f'(x_0) = f'(1) = 2 - 5 = -3$
Queda $y - 4 = -3(x-1)$
Por tanto la recta tangente en el punto $x = 2$ es $y = -3x + 7$

- CUESTIÓN 4.A. [1.5 PUNTOS]

Tres amigos juegan con un dado de la siguiente forma. Cada uno lanzará el dado a lo sumo una vez. Si el primero en lanzar saca un seis, gana y se acaba la partida; si no saca un seis, lanza el segundo, que gana si obtiene un cuatro o un cinco, acabando la partida. Si tampoco gana éste, lanza el dado el tercero, que gana si obtiene tres, dos o uno. Aunque no gane el tercero, la partida se termina.

Hallar la probabilidad que tiene cada uno de ganar y la probabilidad de que la partida termine sin ganador.

selcs Jun 2005 Solución:

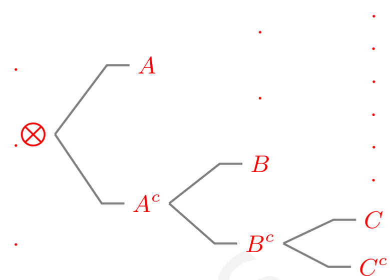
Llamamos A ganar el primero, C ganar el segundo,C ganar el tercero.

a) Ganar el primero: $p(A) = \frac{1}{6}$

b) Ganar el segundo: $p($ ganar el segundo $) = p($ no gana el primero $) \cdot p($ gana el segundo $) = \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{5}{18}$

c) Ganar el tercero: $p($ ganar el tercero $) = p($ no gana el primero $) \cdot p($ no gana el segundo $) \cdot p($ gana el tercero $) = \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{5}{18}$

No gana nadie: $p($ no gana nadie $) = p($ no gana el primero $) \cdot p($ no gana el segundo $) \cdot p($ no gana el tercero $) = \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{5}{18}$



- CUESTIÓN 4.B. [1.5 PUNTOS]

Una fábrica dispone de tres máquinas A_1, A_2 y A_13 que fabrican tornillos. Se sabe que la máquina A_1 produce un $1\,\%$ de tornillos defectuosos, la máquina A_2 un $3\,\%$ y la máquina A_3 un $2\,\%$. La máquina A_1 produce el $25\,\%$ del total de unidades, la A_2 el $40\,\%$ y la A_3 el $35\,\%$. Al cabo de un día, se toma un tornillo al azar de la producción total y se pide:

(a) Calcular la probabilidad de que ese tornillo sea defectuoso.

(b) Si ha resultado defectuoso, calcular la probabilidad de que pertenezca a la máquina A_2 .

selcs Jun 2005 Solución:

a) Teorema de la probabilidad total

$$p(D) = p(D/A_1)\cdot p(A_1) + p(D/A_2)\cdot p(A_2) + +(D/A_3)\cdot p(A_3) = \frac{1}{100}\cdot\frac{25}{100} + \frac{3}{100}\cdot\frac{40}{100} + \frac{2}{100}\cdot\frac{35}{100} = 0'0215$$

b) Teorema de Bayes

$$p(D/A_2) = \frac{p(D/A_2)\cdot p(A_2)}{p(D/A_1)\cdot p(A_1) + p(D/A_2)\cdot p(A_2) + +(D/A_3)\cdot p(A_3)} = \frac{0'03\cdot 0'4}{0'0215} = 0'5581$$

- CUESTIÓN 5.A. [2 PUNTOS]

Una muestra aleatoria simple de 25 estudiantes responde a un test de inteligencia, obteniendo una media de 100 puntos. Se sabe por experiencia que la variable "inteligencia de todos los estudiantes" es normal con una desviación típica igual a 10, pero se desconoce la media. ¿Entre qué limites se hallará la verdadera inteligencia media de todos los estudiantes, con un nivel de confianza de 0.99?

selcs Jun 2005 Solución:

Los datos son: $\bar{x} = 100, \sigma = 10, n = 25$.

Para el nivel de confianza del $99\,\%$ corresponde el valor crítico $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2'58$.

Entonces el intervalo de confianza tiene de extremos: $\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 100 \pm 2'58\cdot\frac{10}{\sqrt{25}} = 100 \pm 5'16 \begin{cases} 105'16 \\ 94'84 \end{cases}$

El intervalo de confianza para la media de la inteligencia de todos los estudiantes es $(94'84, 105'16)$

- CUESTIÓN 5.B. [2 PUNTOS]

Se supone que la distribución de la temperatura del cuerpo humano en la población tiene de media 37^0C y de desviación típica 0.85^0C. Se elige una muestra de 105 personas y se pide: (a) Calcular la probabilidad de que la temperatura media sea menor de 36.9^0C (b) Calcular la probabilidad de que la temperatura media esté comprendida entre 36.5^0C y 37.5^0C

selcs Jun 2005 Solución:

Distribución muestral

Los parámetros de la población son: $\mu = 37^0\text{C}$, $\sigma = 0'85^0\text{C}$

La muestra es de $n = 105$ personas.

La distribución muestral es por tanto $N(37, \dfrac{0'85}{\sqrt{105}}) = N(37, 0'082)$

a)

$$p(\bar{X} \leq 36'9) = \left\{ \text{tipificando } z = \frac{36'9 - 37}{0'082} = -1'2 \right\} = p(Z \leq -1'2) = 1 - p(Z \leq -1'2) = 1 - 0'8869 = 0'1131$$

b)

$$p(36'5 \leq \bar{X} \geq 37'5) = \left\{ \text{tipificando} \quad \begin{array}{l} z_1 = \frac{36'5-37}{0'082} = -6'09 \\ z_2 = \frac{37'5-37}{0'082} = 6'09 \end{array} \right\} = p(Z \leq 6'9) - p(Z \leq -6'9) \approx 1 - 0 = 1$$