

EXAMEN DE CÁLCULO DIFERENCIAL

1. Calcule:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \operatorname{sen} x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{x}{2} \right)$

2. Sea la curva descrita por la función $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$ para valores de $x > 2$. Calcule:

a) La recta tangente a la gráfica en el punto P de la curva con abscisa $x = 3$

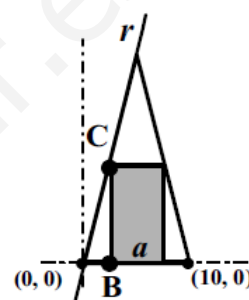
b) El punto de corte entre esa recta tangente y la asíntota horizontal de la curva

3. El triángulo isósceles, descrito en la figura, mide 10 cm de base y 20 cm de altura.

a) ¿Cuál es la ecuación de la recta r señalada en la figura que contiene el lado del triángulo?

b) Dado el rectángulo inscrito cuya base mide a , calcule las coordenadas de los puntos B y C en función de a .

c) Halle el valor de a que hace máxima el área del rectángulo.



4. Estudia la continuidad y la derivabilidad de la función: $f(x) = \begin{cases} 5x^2 - 2x - 11 & \text{si } x \in (-\infty, 1) \\ -\frac{8}{x} & \text{si } x \in [1, +\infty) \end{cases}$

5. Dada la función $y = x^4 e^{-x}$

a) Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función

b) Halle, si existe, los máximos, mínimos y puntos de inflexión.

c) Dibuje aproximadamente su gráfica

6. Al derramar pintura en una bandeja se va formando un charco cilíndrico de altura constantemente igual a 0,5 cm. Si derramamos la pintura a una tasa de $4 \text{ cm}^3 / \text{s}$, halle la tasa de crecimiento del radio del círculo cuando el radio mida 20 cm.

$$\textcircled{1} \quad \text{a)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \ln x} = \frac{1-1-0}{0-0} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \ln x} = \frac{1+1-2}{1-1} = \frac{0}{0} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{1 + \ln x} = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\ln x} = \frac{1+1}{1} = \boxed{2}$$

$$\text{b)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \infty \cdot 0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} \cos\left(\frac{x}{2}\right)}{1} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$\textcircled{2} \quad f(x) = \frac{2x+1}{x-2} \rightarrow f'(x) = \frac{2(x-2) - (2x+1) \cdot 1}{(x-2)^2} = \frac{-5}{(x-2)^2}$$

$$\text{a)} \quad x=3 \rightarrow y = \frac{2 \cdot 3 + 1}{3 - 2} = 7$$

$$\rightarrow y' = \frac{-5}{(3-2)^2} = -5$$

Recta Tangente: $y - 7 = -5(x - 3)$

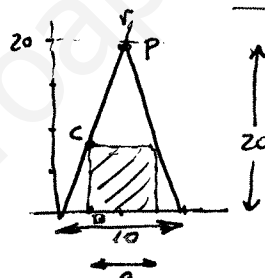
$$\boxed{y = 22 - 5x}$$

$$\text{b)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{x-2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{1} = 2 \rightarrow \text{A. Horizontal } y=2$$

$$y = 22 - 5x \quad y = 2 \quad \rightarrow \quad 2 = 22 - 5x \quad ; \quad 5x = 20 \quad ; \quad x = 4 \quad \boxed{P(4, 2)}$$

$$\textcircled{3} \quad \text{a)} \quad P(5, 20) \quad O(0, 0) \quad \vec{OP} = (5, 20) \rightarrow m = \frac{20}{5} = 4$$

$$r: \boxed{y = 4x}$$



$$\text{b)} \quad \boxed{B\left(\frac{10-a}{2}, 0\right)}$$

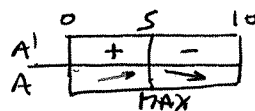
$$x = \frac{10-a}{2} \rightarrow y = 4 \cdot \frac{10-a}{2} = 20 - 2a \rightarrow \boxed{C\left(\frac{10-a}{2}, 20-2a\right)}$$

$$\text{c)} \quad \text{Area} = a(20-2a) = 20a - 2a^2 \quad a \in [0, 10]$$

$$\frac{dA}{da} = 20 - 4a$$

$$\frac{dA}{da} = 0 \Rightarrow 20 - 4a = 0 \quad ; \quad \boxed{a=5}$$

$$\text{Maximo area para } \boxed{a=5}$$



$$④ \quad f(x) = \begin{cases} 5x^2 - 2x - 11 & \text{si } x < 1 \\ -\frac{8}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad \text{dom}f = \mathbb{R}$$

- $5x^2 - 2x - 11$ es polinómico por lo que f es continua y derivable en $(-\infty, 1)$
- $-\frac{8}{x}$ anula su denominador en $x=0$, pero no está incluido en el segundo trozo. Por lo tanto f es continua y derivable en $(1, +\infty)$ por tener expresión racional sin anularse el denominador.
- Únicamente queda estudiar en $x=1$:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= 5 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 - 11 = -8 \\ f(1) &= -\frac{8}{1} = -8 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= -\frac{8}{1} = -8 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f \text{ es continua en } x=1$$

$$f'(x) = \begin{cases} 10x - 2 & \text{si } x < 1 \\ +\frac{8}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) &= 10 \cdot 1 - 2 = 8 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) &= \frac{8}{1^2} = 8 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f \text{ es derivable en } x=1 \quad \text{con } f'(1) = 8.$$

Por lo tanto f es continua y derivable en \mathbb{R} .

$$⑤ \quad y = x^4 e^{-x} \quad \text{dominio} = \mathbb{R}$$

$$a) \quad y' = 4x^3 e^{-x} + x^4 \cdot e^{-x} \cdot (-1) = x^3 e^{-x} (4 - x) = x^3 (4 - x) e^{-x}$$

$$y' = 0 \Rightarrow x^3 (4 - x) e^{-x} = 0 \begin{cases} \rightarrow x^3 = 0; \quad x = 0 \\ \rightarrow 4 - x = 0; \quad x = 4 \\ \rightarrow e^{-x} = 0 \text{ Absurdo} \end{cases}$$

	0	4	
y'	-	+	-
	MIN	MAX	

La función es creciente en $(0, 4)$

La función es decreciente en $(-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$

b) La función tiene un mínimo local en $x=0$

La función tiene un máximo local en $x=4$

$$y' = (4x^3 - x^4) e^{-x} \rightarrow y'' = (12x^2 - 4x^3) e^{-x} + (4x^3 - x^4) e^{-x} \cdot (-1) = x^2 (12 - 4x - 4x + x^2) e^{-x} = x^2 (x^2 - 8x + 12) e^{-x}$$

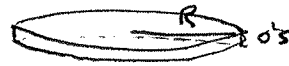
$$y'' = 0 \Rightarrow x^2 (x^2 - 8x + 12) e^{-x} = 0 \begin{cases} \rightarrow x^2 = 0; \quad x = 0 \\ \rightarrow x^2 - 8x + 12 = 0 \\ \quad x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{2} = \frac{8 \pm 4}{2} = \begin{cases} 6 \\ 2 \end{cases} \\ \rightarrow e^{-x} = 0 \text{ Absurdo.} \end{cases}$$

y''	+	+	-	+
y	Convexa	Conv.	Conc.	Convexa
		INF	INF	

La función tiene puntos de inflexión en $x=2$, $x=6$

6

$$V = \pi R^2 \cdot 0.5$$



$$\frac{dV}{dt} = 2\pi R \frac{dR}{dt} \cdot 0.5 = \pi R \frac{dR}{dt}$$

$$4 = \pi R \cdot \frac{dR}{dt} \rightarrow \frac{dR}{dt} = \frac{4}{\pi R}$$

$$R=20 \rightarrow \frac{dR}{dt} = \frac{4}{\pi \cdot 4} = \boxed{\frac{1}{\pi} \text{ cm s}^{-1}}$$

www.yoquieroaprobar.es