

EXAMEN DE CÁLCULO DIFERENCIAL

1. Calcule:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \cos(x-1)}{(\ln x)^2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} (x^4 + e^x)^{\frac{1}{x}}$

2. Una curva tiene por ecuación: $xy^2 + x^2y = 2$

a) Halle la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto (1, 1)

b) Halle la ecuación de la recta que es perpendicular a la curva en el punto (1, 1)

3. Se dispone de una chapa de acero que puede representarse por la región del plano determinada por la parábola $y = -x^2 + 4$ y la recta $y = 1$. Determine las dimensiones del rectángulo de área máxima que se puede obtener a partir de dicha chapa con la condición de que uno de sus lados esté en la recta $y = 1$.

4. Dada $a \in \mathfrak{R}$, se considera la función $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - 3ax - 6}{x - 3} & \text{si } x < 3 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

Determine los valores de a para los que la función es continua

5. Dibuja aproximadamente la gráfica de la función $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$ calculando su dominio de definición, sus asíntotas, sus intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus máximos y mínimos, sus intervalos de concavidad y convexidad y sus puntos de inflexión.

6. El volumen de un cuerpo viene dado por

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h$$

En el instante en el que el radio mide 3 cm, el volumen es de $81\pi \text{ cm}^3$, el radio está cambiando con un ritmo de 2 cm/min y la tasa de variación del volumen es de $204\pi \text{ cm}^3 / \text{min}$. Calcule la tasa de cambio de la altura en ese mismo instante.

$$\textcircled{1} \quad a) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \ln(x-1)}{(\ln x)^2} = \frac{1-1}{0^2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{+\ln(x-1)}{2 \ln x \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln(x-1)}{2 \ln x} = \frac{0}{0} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x-1) + x \ln(x-1)}{\frac{2}{x}} = \frac{0+1 \cdot 1}{2/1} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$b) \quad \lim_{x \rightarrow 0} (x^4 + e^x)^{1/x} = (0+1)^{1/0} = 1^{\infty} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x^4 + e^x)^{1/x}} =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(x^4 + e^x)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^4 + e^x)}{x}} = e^{\frac{0}{0}} =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x^4 + e^x} \cdot (4x^3 + e^x)}{1}} = e^1 = \boxed{e}$$

$$\textcircled{2} \quad xy^2 + x^2y = 2$$

$$y^2 + x \cdot 2yy' + 2xy + x^2y' = 0 \quad ; \quad y' = \frac{-y^2 - 2xy}{2xy + x^2}$$

$$P(1,1) \rightarrow y' = \frac{-1-2}{2+1} = -1$$

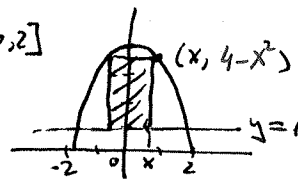
$$\text{Recta Tangente: } y-1 = -1(x-1) \quad ; \quad \boxed{y = 2-x}$$

$$\text{Recta Normal: } y-1 = \frac{-1}{-1}(x-1) \quad ; \quad \boxed{y = x}$$

$$\textcircled{3} \quad \text{Rectángulo: Base} = 2x$$

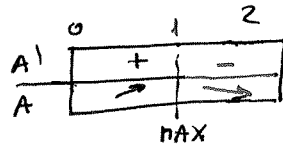
$$\text{Altura} = 4-x^2-1 = 3-x^2 \quad | \quad x \in [0,2]$$

$$\text{Área} = 2x(3-x^2) = 6x - 2x^3$$



$$\frac{dA}{dx} = 6 - 6x^2$$

$$\frac{dA}{dx} = 0 \rightarrow 6 - 6x^2 = 0 \quad ; \quad x = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$$



Área Máxima para $x=1$

$$\text{Base} = 2 \cdot 1 = 2$$

$$\text{Altura} = 3 - 1^2 = 2$$

En realidad es un cuadrado.

$$4) f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - 3ax - 6}{x-3} & \text{Si } x < 3 \\ x^2 - 1 & \text{Si } x \geq 3 \end{cases}$$

f está definida para todos los valores de x, parecería que el primer trozo no está definido en $x=3$ - por anularse el denominador - pero $x=3$ pertenece en realidad al 2º trozo.

El primer trozo es continuo en $(-\infty, 3)$ por tener expresión racional y no anularse el denominador. El segundo trozo es continuo en $(3, +\infty)$ por tener expresión polinómica.

Únicamente quedaría estudiar la continuidad en $x=3$:

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 3^2 - 1 = 9 - 1 = 8$$

$$f(3) = 3^2 - 1 = 9 - 1 = 8$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x^2 - 3ax - 6}{x-3} = \frac{18 - 9a - 6}{0^-} = \frac{12 - 9a}{0^-}$$

• Si $12 - 9a \neq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \pm\infty \Rightarrow f$ no sería continua en $x=3$.

• Si $12 - 9a = 0 \rightarrow a = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$, f podría ser continua:

$$a = \frac{4}{3}: \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x^2 - 3 \cdot \frac{4}{3}x - 6}{x-3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x^2 - 4x - 6}{x-3} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x - 4}{1} = 4 \cdot 3 - 4 = 8.$$

Al comparar el punto en $x=3$ con los dos límites laterales,

$$f \text{ sería continua en } x=3 \Rightarrow \boxed{a = \frac{4}{3}}$$

$$5) f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$$

$$\text{dom } f = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 - 4} = \frac{-\infty}{+\infty} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x} = 0^- \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 - 4} = \frac{+\infty}{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} = 0^+ \end{aligned} \right\} \text{Asíntota Horizontal } y=0$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x}{x^2 - 4} = \frac{-2}{4^- - 4} = \frac{-2}{+0} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x}{x^2 - 4} = \frac{-2}{4^+ - 4} = \frac{-2}{-0} = +\infty \end{aligned} \right\} \text{Asíntota Vertical } x=-2$$

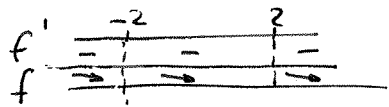
$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{x^2-4} = \frac{2}{4-4} = \frac{2}{-0} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{x^2-4} = \frac{2}{4-4} = \frac{2}{+0} = +\infty$$

Asíntota vertical $x=2$

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2-4) - x \cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{-x^2-4}{(x^2-4)^2}$$

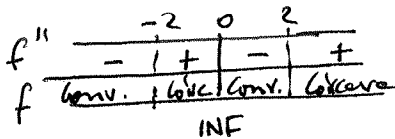
$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{-x^2-4}{(x^2-4)^2} = 0 ; -x^2-4=0 ; x^2=-4 \text{ Absurdo. No tiene extremos locales.}$$



f es decreciente en todo su dominio.

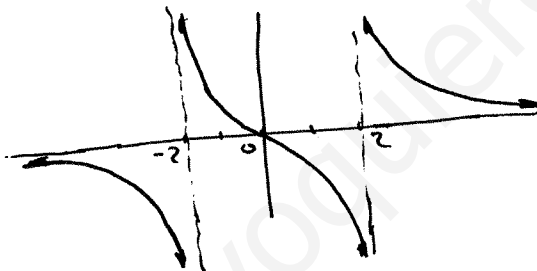
$$f''(x) = \frac{-2x \cdot (x^2-4)^{-2} - (-x^2-4) \cdot 2(x^2-4)^{-3} \cdot 2x}{(x^2-4)^4} = \frac{-2x^3+8x+4x^3+16x}{(x^2-4)^3} = \frac{2x^3+24x}{(x^2-4)^3}$$

$$f''(x)=0 \Rightarrow 2x^3+24x=0 ; 2x(x^2+12)=0 \begin{cases} x=0 \\ x^2+12=0 \text{ Absurdo} \end{cases}$$



f es cóncava en $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$
 f es cóncava en $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$
 f tiene un punto de inflexión en $x=0$

x	y
0	0



⑥

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 + \pi R^2 H$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi \cdot 3R^2 \frac{dR}{dt} + \pi \cdot 2R \frac{dR}{dt} \cdot H + \pi R^2 \frac{dH}{dt}$$

$$\frac{dR}{dt} = 2 \quad \left| \quad 204\pi = 4\pi R^2 \cdot 2 + 2\pi R H \cdot 2 + \pi R^2 \frac{dH}{dt} \rightarrow \frac{dH}{dt} = \frac{204 - 8R^2 - 4RH}{R^2}$$

$$R=3 \quad \left| \quad 81\pi = \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 + \pi \cdot 3^2 H \rightarrow H = \frac{81 - \frac{4}{3} \cdot 27}{9} = 5 \text{ m}$$

$V=81\pi$

$$R=3 \quad \left| \quad \frac{dH}{dt} = \frac{204 - 8 \cdot 3^2 - 4 \cdot 3 \cdot 5}{3^2} = 8 \text{ m/min}$$

El sólido podría ser este:

