

## EXAMEN DE CÁLCULO DIFERENCIAL

1. Halla  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\operatorname{sen} x}$
2. Una curva está definida por la ecuación  $8y \ln x - 2x^2 + 4y^2 = 7$ . Halle la ecuación de la tangente a la curva en el punto con  $x = 1$  e  $y > 0$
3. Estudia qué puntos de la curva  $y^2 = 4x$  son los más cercanos al punto  $(4, 0)$
4. Sea la función  $f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 - 4 & \text{si } x < 0 \\ -a(x-2)^2 + 4a & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ 
  - a) Determina los valores de  $a$  que hacen continua la función en  $x = 0$ .
  - b) Determina los valores de  $a$  que hacen derivable la función en  $x = 0$ .
5. Sea  $f(x) = \frac{2}{x-3} - \frac{12}{x^2-9}$ . Se pide:
  - a) Dominio de definición
  - b) Intervalos de crecimiento y decrecimiento
  - c) Comprobar si la función es continua en  $x=3$
  - d) Calcular el límite de la función cuando  $x$  tiende a  $-3$ .
6.
  - a) Dibuje aproximadamente la curva  $y = |\ln x| - |\cos x| - 0,1$  para  $0 < x < 4$ , mostrando claramente las coordenadas de los puntos de corte con el eje  $x$  y las coordenadas de todos los máximos y mínimos locales.
  - b) Halle los valores de  $x$  para los cuales  $|\ln x| > |\cos x| + 0,1$  para  $0 < x < 4$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x} = 0^0 &= e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x^{\sin x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \cdot \ln x} = e^{0 \cdot \infty} = \\
 &= e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/\sin x}} = e^{-\frac{\infty}{\infty}} = e^{-\frac{\infty}{\infty}} = \\
 &= e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1/x}{-\cos x / \sin^2 x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{-x \cos x}} = e^{\frac{0}{0}} = \\
 &= e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \sin x \cos x}{-\cos x + x \sin x}} = e^{\frac{0}{-1+0}} = e^0 = \boxed{1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{2} \quad 8y \ln x - 2x^2 + 4y^2 &= 7 \\
 8y' \ln x + 8y \frac{1}{x} - 4x + 8y' &= 0 ; \quad 8y'(\ln x + 1) = 4x - \frac{8y}{x} ; \quad y' = \frac{x - 2y/x}{2(\ln x + 1)} \\
 x=1 \rightarrow 8y \cdot 0 - 2 + 4y^2 &= 7 \rightarrow 4y^2 = 9 \rightarrow y = \begin{cases} 3/2 \\ -3/2 \end{cases} \text{ porque } y > 0 \\
 \rightarrow y' = \frac{1 - 2 \cdot 3/2}{2(\ln 1 + 3/2)} &= \frac{1-3}{3} = -\frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

Recta Tangente :  $\boxed{y - \frac{3}{2} = -\frac{2}{3}(x-1)}$

③

$$d = \sqrt{(x-4)^2 + y^2}$$

Minimizar  $d = \sqrt{(x-4)^2 + y^2}$

Siendo  $y^2 = 4x$

$$d = \sqrt{(x-4)^2 + 4x} = \sqrt{x^2 - 8x + 16 + 4x} = \sqrt{x^2 - 4x + 16}, \quad x \geq 0$$

$$d' = \frac{2x-4}{2\sqrt{x^2-4x+16}} = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+16}}$$

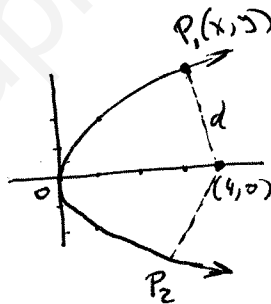
$$d'=0 \Rightarrow \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4x+16}} = 0 ; \quad \boxed{x=2}$$

Mínima distancia  
para  $x=2$ .

	0	2	
$d'$	-	+	
$d$	→	→	
	MIN		

$$x=2 \rightarrow y^2 = 4 \cdot 2 ; \quad y = \pm \sqrt{8}$$

$$\boxed{P_1(2, \sqrt{8}) \quad P_2(2, -\sqrt{8})}$$



$$④ \quad f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 - 4 & x < 0 \\ -a(x-2)^2 + 4a & x \geq 0 \end{cases}$$

$$a) \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = (0+2)^2 - 4 = 0$$

$$f(0) = -a(0-2)^2 + 4a = -4a + 4a = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -a(0-2)^2 + 4a = -4a + 4a = 0$$

$\Rightarrow f$  es continua en  $x=0$   
para cualquier  $a \in \mathbb{R}$

$$b) \quad f'(x) = \begin{cases} 2(x+2) & x < 0 \\ -2a(x-2) & x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = 2(0+2) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = -2a(0-2) = 4a$$

$\Rightarrow f$  será derivable en  $x=0$

$$\text{para: } 4a = 4 \Rightarrow \boxed{a=1}$$

y la derivada será  $f'(0) = 4$

⑤

$$f(x) = \frac{2}{x-3} - \frac{12}{x^2-9} = \frac{2}{x-3} - \frac{12}{(x+3)(x-3)} = \frac{2(x+3)-12}{(x+3)(x-3)} = \frac{2x-6}{(x+3)(x-3)} = \frac{2x-6}{x^2-9}$$

$$a) \quad \text{dom } f = \mathbb{R} - \{3, -3\}$$

$$b) \quad f'(x) = \frac{2(x^2-9) - (2x-6) \cdot 2x}{(x^2-9)^2} = \frac{2x^2 - 18 - 4x^2 + 12x}{(x^2-9)^2} = \frac{-2x^2 + 12x - 18}{(x^2-9)^2} = \frac{-2(x^2 - 6x + 9)}{(x^2-9)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow \frac{-2(x^2 - 6x + 9)}{(x^2-9)^2} = 0 ; \quad x^2 - 6x + 9 = 0 ;$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36-36}}{2} = \frac{6 \pm 0}{2} = 3$$

Imposible porque no pertenece al domf.



$f$  es decreciente en todo su dominio.

c)  $f$  no puede ser continua en  $x=3$  por no estar definida en dicho valor de  $x$ .

Vamos el tipo de discontinuidad:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \left( \frac{2}{x-3} - \frac{12}{x^2-9} \right) = +\infty - \infty = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x-6}{x^2-9} = \frac{0}{0} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2}{2x} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{3}$$

$f$  tiene una discontinuidad EVITABLE en  $x=3$

$$d) \quad \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{2x-6}{x^2-9} = \frac{-6-6}{+0} = \boxed{-\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{2x-6}{x^2-9} = \frac{-6-6}{-0} = \boxed{+\infty}$$

Salto Infinito en  $x=-3$

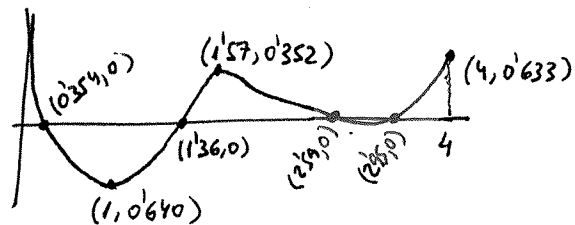
6

a) Observado con la calculadora gráfica:

Puntos corte con eje X:  $(0,354, 0)$   
 $(1,36, 0)$

Máximo local:  $(1,57, 0,352)$   
 $(2,59, 0)$   
 $(2,95, 0)$

Mínimos locales:  $(1, 0,640)$   
 $(2,59, 0)$



b)  $|h(x)| > |k(x)| + d_1 \Rightarrow |h(x)| - |k(x)| - d_1 > 0$ .

observando los intervalos en los que  $f(x) > 0$ :

$$x \in (0, 0,354) \cup (1,36, 2,59) \cup (2,95, 4)$$

www.yoquieroaprobar.es