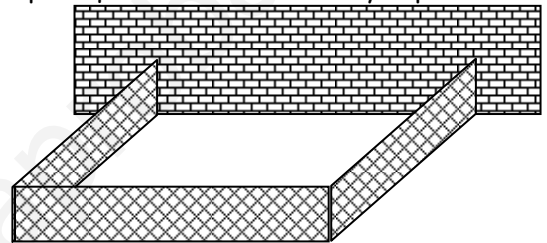


EXAMEN DE CÁLCULO DIFERENCIAL

- Halla la recta normal a la curva $y = e^{xy}$ en el punto de abscisa $x = 0$.
- Sea $f(x) = \frac{\ln x}{x^3}$
 - Halle $f'(x)$ y $f''(x)$ simplificando las respuestas
 - Halle el valor exacto de la abscisa del máximo relativo justificando que lo es mediante la 2ª derivada.
 - Halle el valor exacto de la abscisa del punto de inflexión y justificando que lo es con el estudio de la curvatura de la función.
 - Halle sus asíntotas.
- Un pastor dispone de 1.000 m de tela metálica para construir una cerca rectangular aprovechando una pared ya existente. ¿Podrías indicarle las dimensiones para que el corral sea lo mayor posible?



4. Sea $f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x = 0 \\ \frac{m(e^x - 1)}{x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$, donde $m \in \mathbb{R}$.

- Calcule m para que f sea continua en $x = 0$.
 - para el valor de m calculado estudie si f es derivable en $x = 0$.
- Un depósito de forma cónica con tiene 8 metros de diámetro y una profundidad de 12 metros. El agua entra en el depósito por su vértice con un caudal de 10 m^3 por minuto. Halla la tasa de variación de la profundidad del agua cuando alcanza 6 m de profundidad.
 - Sea $f(x) = x \cos x$, para $0 \leq x \leq \pi$. La curva de $f(x)$ tiene un máximo local en $x = a$ y un punto de inflexión en $x = b$.
 - Utiliza la calculadora gráfica para esbozar la gráfica de $f(x)$ indicando las posiciones aproximadas de a y b .
 - Halla a y b .

1

$$y = e^{xy}$$

$$y' = e^{xy} \cdot (y + x \cdot y') ; y' - x e^{xy} y' = e^{xy} \cdot y ; y' = \frac{e^{xy} \cdot y}{1 - x e^{xy}}$$

$$x=0 \rightarrow y = e^{0 \cdot y} ; y = 1 \quad |P(0,1)|$$

$$y' = \frac{e^{0 \cdot 1} \cdot 1}{1 - 0 \cdot e^{0 \cdot 1}} = 1 \quad m = 1 \Rightarrow m' = -1$$

Recta Normal

$$y - 1 = -1(x - 0) \\ |y = 1 - x|$$

2

$$f(x) = \frac{\ln x}{x^3} \quad \text{dom}f = (0, +\infty)$$

$$a) f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^3 - \ln x \cdot 3x^2}{x^6} = \frac{x^2(1 - 3 \ln x)}{x^6} = \frac{1 - 3 \ln x}{x^4}$$

$$f''(x) = \frac{-\frac{3}{x} \cdot x^4 - (1 - 3 \ln x) \cdot 4x^3}{x^8} = \frac{-3x^3 - 4x^3 + 12x^3 \ln x}{x^8} = \frac{12 \ln x - 7}{x^5}$$

$$b) f'(x) = 0 \Rightarrow \ln x = \frac{1}{3} ; x = e^{1/3}$$

$$f''(e^{1/3}) = \frac{12 \cdot \frac{1}{3} - 7}{(e^{1/3})^5} = \frac{-3}{e^{5/3}} < 0 \Rightarrow \text{Máximo local en } x = e^{1/3}$$

$$c) f''(x) = 0 \Rightarrow \ln x = \frac{7}{12} ; x = e^{7/12}$$

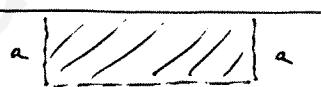
	0	$e^{7/12}$	$+\infty$
f''		-	+
f		convexo	cóncavo

\Rightarrow Punto de inflexión en $x = e^{7/12}$

3

Maximizar: $A = a \cdot b$

Siendo: $2a + b = 1000$



$$b = 1000 - 2a \rightarrow A = a(1000 - 2a) = 1000a - 2a^2 ; a \in [0, 500]$$

$$\frac{dA}{da} = 1000 - 4a$$

$$\frac{dA}{da} = 0 \Rightarrow a = 250$$

	0	250	500
A'		+	-
A		\nearrow	\searrow

MAX

$$\text{Área Máxima} = 1000 \cdot 250 - 2 \cdot 250^2 = 125000 \text{ m}^2 \quad \text{con } \begin{cases} b = 500 \text{ m} \\ a = 250 \text{ m} \end{cases}$$

4

$$f(x) = \begin{cases} 4 & \text{si } x = 0 \\ \frac{m(e^x - 1)}{x} & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

$$a) \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{m \cdot (1 - 1)}{0} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m e^x}{1} = m$$

$$f(0) = 4$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \dots = m$$

Para $m = 4$ f es continua en $x = 0$

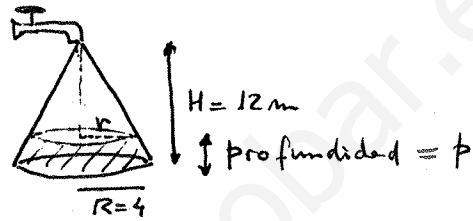
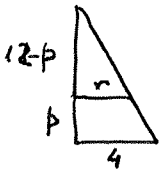
$$b) f'(x) = m \cdot \frac{e^x \cdot x - (e^x - 1) \cdot 1}{x^2} = m \cdot \frac{e^x(x-1) + 1}{x^2} \quad (x \neq 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = m \frac{1 \cdot (-1) + 1}{0} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} m \frac{e^x(x-1) + e^x \cdot 1}{2x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} m \frac{x e^x}{2x} = m \cdot \frac{1}{2} = \frac{m}{2}$$

- Si $m=4$, f sería derivable en $x=0$ por ser continua y finito el $\lim_{x \rightarrow 0} f'$, sería: $f'(0) = \frac{4}{2} = \boxed{2}$
- Si $m \neq 4$, f no sería derivable en $x=0$ por no ser continua, aunque el resultado del $\lim_{x \rightarrow 0} f'$ fuera finito.

5



$$\frac{r}{12-p} = \frac{4}{12} \Rightarrow r = \frac{1}{3(12-p)}$$

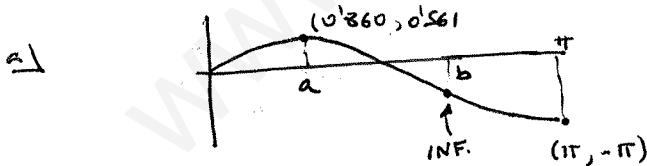
$$V = \frac{\pi \cdot 4^2 \cdot 12}{3} - \frac{\pi \cdot r^2 \cdot (12-p)}{3} = 64\pi - \frac{\pi}{3} \left(\frac{1}{3(12-p)} \right)^2 \cdot (12-p) =$$

$$= 64\pi - \frac{\pi}{27(12-p)}$$

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{\pi}{27} \frac{+ dp/dt}{(12-p)^2} \Rightarrow \frac{dp}{dt} = -\frac{27(12-p)^2}{\pi} \cdot \frac{dV}{dt} = -\frac{270}{\pi} (12-p)^2$$

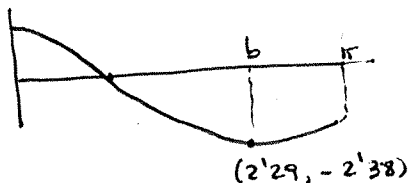
$$p=6 \rightarrow \frac{dp}{dt} = -\frac{270}{\pi} \cdot 6^2 = \boxed{-3094 \text{ m/min}}$$

6) $f(x) = x \cos x \quad x \in [0, \pi]$



← Vista de f con la calculadora
 $\boxed{a = 0.860}$ buscando su máximo

b) $f'(x) = \cos x - x \sin x$



← Vista de f' con la calculadora
 $\boxed{b = 2.29}$ buscando su mínimo.