

## Problemas propuestos

### Ángulos entre rectas y planos

1. Dadas las rectas  $r$  y  $s$  de ecuaciones:  $r \equiv x - 1 = y = 1 - z$ ;  $s \equiv \begin{cases} x - 2y = -1 \\ y + z = 1 \end{cases}$ .

- Comprueba que se cortan y halla su punto de corte.
- Determina el ángulo que forman  $r$  y  $s$ .
- Halla la ecuación del plano que contiene a  $r$  y  $s$ .

2. (Propuesto en Selectividad en 2012, Murcia)

Calcula el ángulo que forman la recta  $r$  y el plano  $\pi$ , siendo:

$$r: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{1} \text{ y } \pi: x - 2y - z = 4$$

3. Halla el ángulo que forma el plano  $\pi: x + y + z = 0$  con la recta de ecuaciones

$$r: \begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

4. Halla el ángulo que forma la recta  $r \equiv \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$  con el plano  $\pi \equiv \sqrt{3}x - z = 3$ .

5. Determina el ángulo que forman los planos:

$$\pi_1: 3x - y + 2z + 1 = 0 \text{ y } \pi_2: 2x + y - 5z - 1 = 0$$

6. Halla el ángulo que forman los planos  $\pi_1: 2x - y + z = 0$  y  $\pi_2: x + y + 2z - 1 = 0$

### Paralelismo y perpendicularidad

7. Sea el punto  $P = (1, 2, 3)$  y la recta  $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-5}{-1}$ .

- Halla la ecuación del plano  $\pi$  que pasa por  $P$  y es perpendicular a la recta  $r$ .
- Halla el punto de corte entre la recta  $r$  y el plano  $\pi$ .

8. (Propuesto en Selectividad en 2011, Asturias)

Se considera la recta  $r: \begin{cases} 2x - y - 5 = 0 \\ x + z - 2 = 0 \end{cases}$ .

- Determina el plano  $\pi$  que contiene a  $r$  y pasa por el origen de coordenadas.
- Halla la ecuación de la recta perpendicular a  $\pi$  que pasa por el punto  $(1, 0, 1)$ .

9. Sea  $\alpha \neq 0$  un número real, y las rectas de ecuaciones:  $r \equiv \frac{x}{2} = y = \frac{z}{\alpha}$ ;  $s \equiv \begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases}$ .

Determina el valor de  $\alpha$  para el que  $r$  y  $s$  son paralelas. En ese caso, halla la ecuación general del plano que las contiene.

10. Dadas las rectas de ecuaciones:  $r: \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$ ;  $r': \begin{cases} x + y + z = 0 \\ ax + bz = 0 \end{cases}$

- a) ¿Qué relación debe existir entre  $a$  y  $b$  para que  $r$  y  $r'$  sean paralelas?  
b) ¿Y para que sean perpendiculares?

11. Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto  $P(1, 3, -2)$  y que sea paralela a los planos:  $\pi_1: 2x - y + z + 1 = 0$  y  $\pi_2: -x + 3y - z + 1 = 0$

12. Halla la ecuación del un plano perpendicular a los planos  $\pi_1$  y  $\pi_2$ , del problema anterior, que pase por el punto  $Q(2, 0, -1)$ .

13. Dadas las rectas:  $r \equiv \begin{cases} x + 2y = 7 \\ y + 2z = 4 \end{cases}$ ,  $s \equiv x - 1 = \frac{y}{3} = \frac{z + 1}{2}$ .

- a) Comprueba que se cortan perpendicularmente.  
b) Halla la ecuación del plano que las contiene.  
c) Halla la recta perpendicular común a  $r$  y  $s$ .

14. Dadas las rectas:  $r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$ ;  $s \equiv \begin{cases} x = \mu \\ y = 2 + 2\mu \\ z = 0 \end{cases}$ .

- a) Estudia la posición relativa de las rectas  $r$  y  $s$ .  
b) Halla la ecuación de una recta que sea perpendicular simultáneamente a  $r$  y  $s$ .

15. Se consideran las rectas  $r$  y  $s$  de ecuaciones respectivas,  $r \equiv \begin{cases} y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$  y  $s \equiv \begin{cases} x = 0 \\ z = 2 \end{cases}$ .

- a) Estudia la posición relativa de  $r$  y  $s$ .  
b) Determina la recta que corta perpendicularmente a  $r$  y  $s$ .  
c) Halla la distancia ente  $r$  y  $s$ .

16. Sean las rectas de ecuaciones  $r \equiv \begin{cases} x + y - z = 4 \\ x + 2y = 7 \end{cases}$  y  $s \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y = -5 \end{cases}$ .

- a) Comprueba que se cruzan en el espacio.  
b) Halla un punto de  $r$  y otro de  $s$  tales que el vector con origen en uno y extremo en el otro sea perpendicular a ambas rectas. Halla la recta perpendicular común a  $r$  y a  $s$ .

17. Halla las ecuaciones de la recta perpendicular común a  $r$  y  $s$  y que corta a ambas, siendo:

$$r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{2}, \quad s \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1}$$

### Proyecciones en el espacio

18. Halla la proyección de  $P(1, -1, 0)$  sobre el plano  $\pi: 3x + y - 2z + 7 = 0$ :

19. Halla la proyección ortogonal de de la recta  $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{2}$  sobre el plano  $\pi \equiv x - 3y + 2z + 12 = 0$ .

Obtén la solución de las dos formas posibles:

1) Mediante el corte de dos planos; 2) Proyectando dos puntos de  $r$  sobre el plano.

20. Halla la proyección del punto  $P(2, -1, 1)$  sobre la recta  $\frac{x-3}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{2}$ .

### Simetrías

21. Halla las coordenadas del punto  $P'$  simétrico de  $P(2, 0, -1)$  respecto de la recta

$$r \equiv \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{3}.$$

22. (Propuesto en Selectividad en 2011, Islas Baleares)

Dados el punto  $A = (1, 3, 0)$  y el plano  $\pi: x + 2y + z - 1 = 0$ , determina las coordenadas del punto  $A'$ , simétrico del punto  $A$  respecto del plano  $\pi$ . Calcula la distancia de  $A'$  al plano  $\pi$ .

### Distancias

23. Halla la distancia del punto  $P$  a la recta  $r$  en los siguientes casos:

a)  $P(2, 0, -1)$ ;  $r \equiv \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{3}$ .

b)  $P(1, -1, 3)$ ;  $r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$       c)  $P(16, 0, 0)$ ;  $r \equiv \begin{cases} x + 2y = 7 \\ y + 2z = 4 \end{cases}$ ,

24. Halla el punto de la recta  $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases}$  cuya distancia al punto  $P(1, 0, 2)$  sea  $\sqrt{5}$ .

25. Dados la recta  $r \equiv \begin{cases} x - y + 2z = 0 \\ 2y - z = 4 \end{cases}$  y el plano  $\pi \equiv x + y + z - 2 = 0$ .

a) Comprueba que la recta es paralela al plano.

b) Halla la distancia de  $r$  a  $\pi$ .

26. Halla la distancia entre la recta determinada por el punto  $S(1, 0, 0)$  y el vector  $\vec{v} = (1, 1, 0)$  y el plano  $\pi \equiv x - y + z - 2 = 0$

27. Halla los dos puntos de la recta  $r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-2}$  que están a distancia 1 del plano  $\pi \equiv 2x + 2y + z - 5 = 0$ .

28. Halla la distancia entre las rectas  $r$  y  $s$  de ecuaciones:

$$\text{a) } r \equiv \begin{cases} x = 3 - t \\ y = t \\ z = 11 - 4t \end{cases}; s \equiv \begin{cases} x = -5 + h \\ y = h \\ z = 4 \end{cases} \quad \text{b) } r \equiv \begin{cases} x = 2 + 2k \\ y = 1 - k \\ z = 3 + k \end{cases}; s \equiv \begin{cases} x = -1 + k \\ y = -1 + 3k \\ z = 4 - 2k \end{cases}$$

29. Halla la ecuación del plano  $\pi$  que es paralelo y equidistante a las rectas  $r$  y  $s$  de ecuaciones:

$$r \equiv \begin{cases} x = 3 - t \\ y = t \\ z = 11 - 4t \end{cases}; s \equiv \begin{cases} x = -5 + h \\ y = h \\ z = 4 \end{cases}$$

Observación: Estas son las rectas del apartado a) del problema anterior.

30. Halla la distancia entre las rectas  $r$  y  $s$  de ecuaciones:

$$\text{a) } r \equiv \begin{cases} 3x - y = 4 \\ 7x - z = 8 \end{cases}; s \equiv x - 2 = \frac{y - 2}{3} = \frac{z - 3}{4} \quad \text{b) } r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 3t \\ z = -t \end{cases}; s \equiv \frac{x - 2}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z - 1}{-1}$$

### Plano bisector y plano mediador

31. Halla el plano bisector de los planos  $\pi_1 \equiv x + 2y + z + 3 = 0$  y  $\pi_2 \equiv 2x + y - z - 6 = 0$ .

32. Comprueba para los planos del ejercicio anterior:

- Que el plano  $\pi'$  forma con cada uno de los dos iniciales,  $\pi_1$  y  $\pi_2$ , un ángulo que es la mitad que el que determinan los planos  $\pi_1$  y  $\pi_2$ .
- Que los planos bisectores son perpendiculares.

33. Halla el plano mediador de los puntos  $P(1, -1, 0)$  y  $Q(-1, 3, 2)$ .

34. Dados los puntos del espacio  $P(0, 0, 0)$  y  $Q(0, 1, 2)$ , halla la condición que debe cumplir un punto de coordenadas  $A(x, y, z)$  para que esté a la misma distancia de  $P$  y  $Q$ .

### Otros problemas

35. a) Halla la recta  $r$  que pasa por el punto  $P(1, -1, -2)$  y es perpendicular al plano  $\pi \equiv x + 2y + 3z + 6 = 0$ .

b) Halla la ecuación de la recta  $s$  que pasa por los puntos  $A(1, 0, 0)$  y  $B(-1, -3, -4)$ .

c) Estudia la posición relativa de  $r$  y  $s$ . Si se cortan, calcula el punto de corte.

d) Calcula la distancia del punto  $A(1, 0, 0)$  al plano  $\pi'$  que pasa por el punto  $P(1, -1, -2)$  y es paralelo a  $\pi$ .

36. Dado el punto  $P(0, 8, 3)$  y la recta  $s \equiv \begin{cases} x - y + 7 = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$ .

a) Halla la ecuación del plano que contiene a  $P$  y a la recta  $s$ .

b) Calcula la ecuación de la recta  $r$ , perpendicular al plano hallado y que contiene a  $P$ .

**37.** Encuentra los puntos de la recta  $r: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}$  que equidisten de los planos  $\pi_1 \equiv 3x + 4y - 1 = 0$  y  $\pi_2 \equiv 4x - 3z - 1 = 0$ .

**38.** Dadas las rectas de ecuaciones:  $r \equiv \begin{cases} 3x - y = -1 \\ 7x - z = -4 \end{cases}$  y  $s \equiv x - 2 = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{4}$ .

- Estudia su posición relativa.
- Si se cruzan, calcula la distancia mínima entre ellas.

**39.** a) Sea  $\pi$  el plano determinado por el punto  $P(2, 2, 2)$  y los vectores  $\vec{u} = (1, 0, -1)$  y  $\vec{v} = (1, 1, 0)$ . Calcula el ángulo que forma el plano  $\pi$  con la recta que pasa por los puntos  $O(0, 0, 0)$  y  $Q(2, -2, 2)$ .

b) Calcula el punto simétrico de  $O(0, 0, 0)$  respecto del plano  $x - y + z - 2 = 0$ .

**40.** (Propuesto en Selectividad en 2006, Madrid)

Sean las rectas:

$$r \equiv \frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-4} \quad s \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{1}$$

- Halla la ecuación de la recta  $t$  que pasa por el origen y corta a las dos rectas anteriores.
- Halla la recta perpendicular común a las rectas  $r$  y  $s$ .

**41.** Considera la recta y el plano siguientes:

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+5}{-5} = \frac{z+3}{4} \quad \pi: 2x + 4y + 4z = 5$$

- Comprueba que la recta  $r$  y el plano  $\pi$  son paralelos.
- Calcula la distancia entre el plano  $\pi$  y la recta  $r$ .
- Calcula la ecuación implícita del plano  $\pi'$  que es perpendicular a  $\pi$  y contiene a  $r$ .

**42.** (Propuesto en Selectividad en 2012, Castilla León)

Un cuadrado tiene dos vértices consecutivos en los puntos  $P(2, 1, 3)$  y  $Q(1, 3, 1)$ ; los otros dos sobre una recta  $r$  que pasa por el punto  $R(-4, 7, -6)$ .

- Calcula la ecuación de la recta  $r$ . (0,5 puntos)
- Calcula la ecuación general del plano que contiene al cuadrado. (1 punto)
- Halla las coordenadas de uno de los otros vértices. (1,5 puntos)

**43.** Halla el lugar geométrico de los puntos que equidistan de los planos de ecuaciones:

$$\pi_1 \equiv 3x - 4y + 5 = 0 \quad \text{y} \quad \pi_2 \equiv 2x - 2y + z + 9 = 0$$

¿Qué puntos del eje  $OY$  equidistan de ambos planos?

**44.** (Propuesto en Selectividad en 2009, Navarra)

Dado el punto  $R(1, -1, 2)$ , encuentra los puntos  $P$  y  $Q$  de la recta

$$r \equiv \begin{cases} x + y + z - 4 = 0 \\ x + 2y + 2z - 6 = 0 \end{cases}$$

tales que  $PQR$  sea un triángulo equilátero.

**45.** Los puntos  $P(1, -1, 1)$  y  $Q(3, -3, 3)$  son dos vértices opuestos de un cuadrado que está contenido en un plano perpendicular al plano de ecuación  $x + y = 0$ .

a) Determina los otros dos vértices.

b) Calcula la ecuación de la recta que pasa por los vértices obtenidos en a).

c) Calcula el perímetro del cuadrado construido.

**46.** Los puntos  $P_1(2, -3, 3)$  y  $P_3(0, 1, -1)$  son vértices de un cuadrado. Halla los otros dos vértices de ese cuadrado sabiendo que están en la recta  $r \equiv \frac{x-3}{-2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{2}$ .

### Soluciones

1. a)  $P(3, 2, -1)$ . b)  $19,47^\circ$ . c)  $\pi \equiv y + z - 1 = 0$ .

2.  $30^\circ$ . 3.  $19,47^\circ$ .

4.  $30^\circ$ . 5.  $75,88^\circ$ .

6.  $60^\circ$ . 7. a)  $\pi \equiv 2x + 3y - z - 5 = 0$ . b)  $Q = (3, 1, 4)$ .

8. a)  $\pi: x + 2y + 5z = 0$ . b)  $s: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 1 + 5\lambda \end{cases}$ .

9.  $-1$ ;  $\pi \equiv 3x - 7y - z = 0$

10. a)  $a = b$ , y ambos distintos de 0. b)  $a = -b$ .

11.  $\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 3 + t \\ z = -2 + 5t \end{cases}$ .

12.  $\pi: -2x + y + 5z + 9 = 0$ .

13. a) Se cortan en  $P\left(\frac{13}{7}, \frac{18}{7}, \frac{5}{7}\right)$ . b)  $x + y - 2z - 3 = 0$ . c)  $p \equiv \begin{cases} x = 13/3 + \lambda \\ y = 18/7 + \lambda \\ z = 5/7 - 2\lambda \end{cases}$ .

14. Se cruzan. b)  $p \equiv \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$ . 15. a) Se cruzan. b)  $\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$ . c) 2.

16. a) Se cruzan. b)  $R(5, 1, 2)$ ;  $S(2, -5, 2)$ ;  $p \equiv \begin{cases} x = 5 - 3\lambda \\ y = 1 - 6\lambda \\ z = 2 \end{cases}$ .

17.  $\begin{cases} x = -5/14 \\ y = 24/14 + p \\ z = 32/14 + p \end{cases}$ .

18.  $P' = (-13/14, -23/14, 18/14)$ .

19.  $r' \equiv \begin{cases} x = 25\lambda \\ y = 4 + 23\lambda \\ z = 22\lambda \end{cases}$ .

20.  $P' = \left(\frac{39}{14}, -\frac{15}{14}, -\frac{2}{14}\right)$ .

21.  $P' = \left(-\frac{12}{7}, \frac{20}{7}, -\frac{31}{7}\right)$ .

22.  $A' = (-1, -1, -2)$ ;  $\sqrt{6}$ .

23. a)  $\sqrt{\frac{59}{7}}$ . b)  $\sqrt{2}$ . c)  $\frac{\sqrt{629}}{\sqrt{21}}$ .      24. (1, 2, 3).
25. a) Lo es. b)  $\frac{2}{\sqrt{3}}$ .      26.  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ .
27.  $P_1 = (3, 2, -2)$ ;  $P_2 = (0, -1, 4)$ .
28. a) 3. b) 0.      29.  $\pi: 4x - 4y - 2z + 19 = 0$ .
30. a) 0. b)  $\sqrt{\frac{54}{11}}$ .      31.  $\pi: x - y - 2z - 9 = 0$  y  $\pi': x + y - 1 = 0$ .
32. a) Si. b) Si.      33.  $x - 2y - z + 3 = 0$ .
34. Pertenecer al plano  $2y + 4z - 5 = 0$ .
35. a)  $r: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = -2 + 3t \end{cases}$ . b)  $s: \begin{cases} x = 1 - 2h \\ y = -3h \\ z = -4h \end{cases}$ . c) Se cortan en  $C(3, 3, 4)$ . d)  $\frac{8}{\sqrt{14}}$ .
36. a)  $\pi: 2x - y - 2z + 14 = 0$ . b)  $r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 8 - \lambda \\ z = 3 - 2\lambda \end{cases}$
37.  $P_1 = \left(\frac{-26}{16}, \frac{1}{16}, \frac{-10}{16}\right)$ ;  $P_2 = \left(\frac{-2}{4}, \frac{7}{4}, \frac{2}{4}\right)$ .
38. a) Se cruzan. b)  $\frac{5}{\sqrt{10}}$
39. a) La recta es perpendicular al plano. b)  $O' = (4/3, -4/3, 4/3)$ .
40. a)  $t: \begin{cases} 4x + 2y - z = 0 \\ x - 8y + 5z = 0 \end{cases}$ . b)  $\begin{cases} x = -22/25 - 3t \\ y = 47/25 + 5t \\ z = 6/25 + 4t \end{cases}$ .
41. Lo son. b)  $\frac{35}{6}$ . c)  $2x - z - 5 = 0$ .
42. a)  $r \equiv \begin{cases} x = -4 - t \\ y = 7 + 2t \\ z = -6 - 2t \end{cases}$ . b)  $\pi: 2x - y - 2z + 3 = 0$ . c)  $P' = (0, -1, 2)$ .
43.  $x + 2y + 5z + 30 = 0$ ;  $19x - 22y + 5z + 60 = 0$ .  $(0, -15, 0)$  y  $(0, 30/11, 0)$ .
44.  $P(2, 0, 2)$ ;  $Q(2, -1, 3)$ .
45. a)  $\left(2 + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, -2 + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, 2\right)$ ;  $\left(2 - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, -2 - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, 2\right)$ . b)  $r \equiv \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -2 + t \\ z = 2 \end{cases}$ . c)  $4\sqrt{6}$ .
46.  $P_2 = (3, -2, -1)$  y  $P_4 = (-1, 0, 3)$ .