

Puntos, rectas y planos en el espacio. Problemas métricos en el espacio

1. Estudiar la posición relativa de las rectas r y s : $r \equiv \begin{cases} x+3y+4z-6=0 \\ 2x+y-3z+2=0 \end{cases}$; $s \equiv \begin{cases} 2t-1 \\ y=t+1 \\ z=-3t+2 \end{cases}$

Calcular la distancia entre ambas rectas

junio 1997

Solución

Obtengamos un vector director \vec{u} y un punto A de r . Llamemos $z=\lambda$. Entonces el sistema queda de la

forma: $\begin{cases} x+3y=-4\lambda+6 \\ 2x+y=3\lambda-2 \end{cases}$. Multiplicando la primera ecuación por 2 y restando queda

$$5y = -11\lambda + 14 \Rightarrow y = \frac{-11}{5}\lambda + \frac{14}{5}$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$x + 3\left(\frac{-11}{5}\lambda + \frac{14}{5}\right) = -4\lambda + 6 \Rightarrow x - \frac{33}{5}\lambda + \frac{42}{5} = -4\lambda + 6 \Rightarrow x = \frac{13}{5}\lambda - \frac{12}{5}$$

Por tanto, la recta es, en ecuaciones paramétricas: $r \equiv \begin{cases} x = \frac{13}{5}\lambda - \frac{12}{5} \\ y = \frac{-11}{5}\lambda + \frac{14}{5} \\ z = \lambda \end{cases}$

Así, un punto de r es $A\left(-\frac{12}{5}, \frac{14}{5}, 0\right)$ y un vector director de r es $\vec{u} = (13, -11, 5)$. Por otro lado, es claro que

un punto de s es $B(-1, 1, 2)$ y un vector director de s es $\vec{v} = (2, 1, -3)$. Entonces:

- $\text{rango} \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 13 & -11 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} = 2$. pues hay al menos un menor de orden dos distinto de cero.

- $\text{rango} \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \overrightarrow{AB} \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 13 & -11 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \\ \frac{7}{5} & \frac{-9}{5} & 2 \end{pmatrix} = 3$, ya que $\begin{vmatrix} 13 & -11 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \\ 7/5 & -9/5 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$.

Por tanto, r y s se cruzan.

Hallemos el plano π que pasa por r y es paralelo a s . Para ello escribamos la ecuación del haz de planos de arista r : $\lambda(x+3y+4z-6) + \mu(2x+y-3z+2) = 0 \Leftrightarrow (\lambda+2\mu)x + (3\lambda+\mu)y + (4\lambda-3\mu)z + (-6\lambda+2\mu) = 0$

Para que un plano de este haz sea paralelo a la recta s se debe cumplir que el vector perpendicular al plano $(\lambda+2\mu, 3\lambda+\mu, 4\lambda-3\mu)$ sea perpendicular al vector director de s : $\vec{v} = (2, 1, -3)$, es decir, que el producto escalar de ambos sea cero: $(\lambda+2\mu) \cdot 2 + (3\lambda+\mu) \cdot 1 + (4\lambda-3\mu) \cdot (-3) = 0 \Rightarrow -7\lambda + 14\mu = 0$.

Para que esta última igualdad se cumpla basta elegir $\lambda = 2$, $\mu = 1$, luego el plano π es $4x - 7y + 5z - 10 = 0$. La distancia buscada coincide por tanto con la distancia del punto $B(-1, 1, 2)$ de s al plano π :

$$d(r, s) = d(B, \pi) = \frac{|(-1) \cdot 4 + 1 \cdot (-7) + 2 \cdot 5 + (-10)|}{\sqrt{4^2 + (-7)^2 + 5^2}} = \frac{11}{\sqrt{90}} = \frac{11}{3\sqrt{10}} = \frac{11\sqrt{10}}{30} \text{ uds. } \dagger$$

2. Hallar la ecuación de la recta que pasa por $A(1, 2, -1)$, es perpendicular a la recta $r \equiv \begin{cases} 3y + z = 7 \\ x + 4y + z = 8 \end{cases}$ y paralela al plano $2x + y - z = 3$.

junio 1997

Solución

Llamemos $\vec{u} = (a, b, c)$ a un vector director de la recta s que buscamos. Hallemos un vector director \vec{v} de la recta r . Para ello llamemos, por ejemplo, $y = \lambda$. Entonces $z = 7 - 3\lambda$, $x + 4\lambda + 7 - 3\lambda = 8 \Rightarrow x = 1 - \lambda$. Por

tanto, las ecuaciones paramétricas de r son: $\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 7 - 3\lambda \end{cases}$, y de aquí, un vector director de r es $\vec{v} = (-1, 1, -3)$.

Como $s \perp r \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow -a + b - 3c = 0$ (1).

Un vector perpendicular al plano $\pi \equiv 2x + y - z = 3$ es $\vec{w} = (2, 1, 1)$. Como $s \parallel \pi$, entonces $\vec{u} \perp \vec{w}$, con lo que $\vec{u} \cdot \vec{w} = 0$, es decir, $2a + b - c = 0$ (2).

Resolvamos el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2). Para ello llamemos, por ejemplo, $c = t$, con lo que $\begin{cases} -a + b = 3t \\ 2a + b = t \end{cases}$. Restando ambas ecuaciones: $-3a = 2t \Rightarrow a = -\frac{2}{3}t$ y, sustituyendo en la primera:

$\frac{2}{3}t + b = 3t \Rightarrow b = \frac{7}{3}t$. Para $t = 3$ se obtiene $a = -2$, $b = 7$, y $c = 3$; con lo que un vector director de s es

$\vec{u} = (-2, 7, 3)$ y la recta s es, en ecuaciones paramétricas: $s \equiv \begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -1 + 3\lambda \end{cases}$. †

3. Posición relativa de la recta $\frac{x-3}{5} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{-1}$, y el plano $x - 3y - z + 6 = 0$. Calcular la distancia entre la recta y el plano.

septiembre 1997

Solución

Tomemos un punto y un vector director de la recta r : $P(a_1, a_2, a_3) = P(3, 1, -2)$; $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) = (5, 2, -1)$. Los coeficientes A, B, C del plano π son $A = 1$, $B = -3$, y $C = -1$, con lo que $(A, B, C) = (1, -3, -1)$ es un vector perpendicular al plano π . Entonces:

$$Au_1 + Bu_2 + Cu_3 = 1 \cdot 5 + (-3) \cdot 2 + (-1) \cdot (-1) = 5 - 6 + 1 = 0 \Rightarrow (A, B, C) \perp \vec{u}.$$

$$Aa_1 + Ba_2 + Ca_3 + D = 1 \cdot 3 + (-3) \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) + 6 = 3 - 3 + 2 + 6 = 8 \neq 0 \Rightarrow P \notin \pi.$$

Por tanto, la recta y el plano son paralelos: $r \parallel \pi$.

La distancia entre la recta r y el plano π es la distancia de un punto cualquiera de la recta r al plano π :

$$d(r, \pi) = d(P, \pi) = \frac{|1 \cdot 3 + (-3) \cdot 1 + (-1) \cdot (-2) + 6|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + (-1)^2}} = \frac{8}{\sqrt{11}} = \frac{8\sqrt{11}}{11} \text{ uds. } \dagger$$

4. Ecuación de la recta que pasa por $A(2, -1, 3)$ y es perpendicular al plano que pasa por los puntos $B(1, 1, 0)$, $C(0, -1, 2)$ y $D(-2, 2, 1)$. Calcula el volumen del tetraedro $ABCD$.

septiembre 1997

Solución

La ecuación del plano que pasa por los puntos B , C y D es:
$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$
 Restando a la primera,

segunda y tercera filas la cuarta:
$$\begin{vmatrix} x+2 & y-2 & z-1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$
 Desarrollando por la 4ª columna se tiene:

$$\begin{vmatrix} x+2 & y-2 & z-1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (-x-2-2y+4-9z+9) - (-2z+2+3y-6+3x+6) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-x-2y-9z+11) - (3x+3y-2z+2) = 0 \Leftrightarrow -4x-5y-7z+9 = 0.$$

La recta r que buscamos tendrá como vector director un vector perpendicular al plano: $\vec{u} = (4, 5, 7)$.

Entonces las ecuaciones paramétricas de la recta son:
$$r \equiv \begin{cases} x = 2 + 4\lambda \\ y = -1 + 5\lambda \\ z = 3 + 7\lambda \end{cases}$$

El volumen del tetraedro es:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \\ d_1 - a_1 & d_2 - a_2 & d_3 - a_3 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} 1-2 & 1-(-1) & 0-3 \\ 0-2 & -1-(-1) & 2-3 \\ -2-2 & 2-(-1) & 1-3 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & -1 \\ -4 & 3 & -2 \end{vmatrix} \right| = \\ &= \frac{1}{6} |(0+8+18) - (0+8+3)| = \frac{15}{6} = \frac{5}{2} \text{ uds}^3. \dagger \end{aligned}$$

5. Estudiar la posición relativa de las rectas:

$$r: \begin{cases} x = -7 + t \\ y = -t \\ z = 2 \end{cases} ; \quad s: \frac{x-3}{2} = \frac{y+4}{-3} = \frac{z}{-2}$$

Hallar la ecuación de un plano que contenga a ambas rectas.

junio 1998

Solución

Un punto de r es $A(-7,1,2)$ y un vector director es $\vec{u}=(4,-1,0)$. Un punto de s es $B(3,-4,0)$ y un vector director de s es $\vec{v}=(2,-3,-2)$.

• $\text{rango}\begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix} = 2$. pues hay al menos un menor de orden dos distinto de cero.

• $\text{rango}\begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \overline{AB} \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ 10 & -5 & -2 \end{pmatrix} = 2$, ya que $\begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \\ 10 & -5 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -8 & 2 & 0 \\ 10 & -5 & -2 \end{vmatrix} =$
 $= (-2) \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -8 & 2 \end{vmatrix} = (-2)(8-8) = 0$.

Entonces las rectas son secantes. Hallemos el punto P donde se cortan ambas:

$$r \equiv \begin{cases} x = -7 + 4t \\ y = 1 - t \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \frac{x+7}{4} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{0} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} -x-7 = 4y-4 \\ 0 = -z+2 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x+4y = -3 \\ z = 2 \end{cases}$$

$$s \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y+4}{-3} = \frac{z}{-2} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} -3x+9 = 2y+8 \\ -2y-8 = -3z \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} 3x+2y = 1 \\ 2y-3z = -8 \end{cases}$$

Uniendo todas las ecuaciones se obtiene $z = 2$, $y = -1$, $x = 1$. Por tanto, el punto P donde se cortan ambas rectas es $P(1,-1,2)$.

El plano π que contiene a r y a s , contiene a P y tiene por direcciones las de \vec{u} y \vec{v} .

Entonces: $\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-2 \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (2x-2-12z+24) - (-2z+4-8y-8) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (2x-12z+22) - (-8y-2z-4) = 0 \Leftrightarrow 2x+8y-10z+26 = 0 \Leftrightarrow x+4y-5z+13 = 0$$

Por tanto $\pi \equiv x+4y-5z+13 = 0$. †

6. Hallar el ángulo que forman la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{1}$ y el plano $x+2y-z-3=0$. Obtener el punto de corte de la recta y el plano

junio 1998

Solución

Un vector director de la recta es $\vec{v}=(2,1,1)$ y un vector perpendicular al plano es $\vec{u}=(1,2,-1)$. El ángulo entre una recta y un plano viene dado por la fórmula:

$$\text{sen } \alpha = \frac{|Av_1 + Bv_2 + Cv_3|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}, \text{ donde } (A, B, C) \text{ es un vector perpendicular al plano y } \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$$

es un vector director de la recta. Entonces, en nuestro caso:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{|1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2} \sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{6} \sqrt{6}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ.$$

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{1} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x-1=2y-4 \\ y-2=z+1 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x-2y=-3 \\ y-z=3 \end{cases}.$$

Uniendo las ecuaciones implícitas de la recta con la ecuación del plano obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} -2y = -3 \\ -z = 3 \\ x + 2y - z = 3 \end{cases}$$

El determinante de la matriz de los coeficientes es: $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-1+2) - (-2) = 3$. Las soluciones del

sistema son, por tanto:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -3 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}}{3} = -1.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{3} = 1.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{3} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{vmatrix}}{3} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}}{3} = -2.$$

Entonces el punto de corte de la recta y el plano es $(-1, 1, -2)$. †

7. Estudiar si las rectas r y s son coplanarias. En caso afirmativo, dar la ecuación del plano que las contiene:

$$r \equiv \begin{cases} 2x - 3y + 13 = 0 \\ 2y - z - 4 = 0 \end{cases} ; s \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{4}$$

septiembre 1998

Solución

Hallemos un vector director \vec{u} y un punto A de r . Para ello pasemos a paramétricas. Llamemos, por ejemplo, $y = \lambda$. Entonces, $2\lambda - z - 4 = 0 \Rightarrow z = 2\lambda - 4$; $2x - 3\lambda + 13 = 0 \Rightarrow 2x = 3\lambda - 13 \Rightarrow x = \frac{3}{2}\lambda - \frac{13}{2}$. Por tanto, las

ecuaciones paramétricas de r son $r \equiv \begin{cases} x = \frac{3}{2}\lambda - \frac{13}{2} \\ y = \lambda \\ z = 2\lambda - 4 \end{cases}$, con lo que un punto de r es $A(-5, 1, -2)$ (haciendo

$\lambda = 1$) y un vector director de r es $\vec{u} = (3, 2, 4)$.

Un vector director de s es $\vec{v} = (3, 2, 4)$ y un punto de s es $B(1, -2, 1)$.

Entonces:

- $\text{rango} \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} = 1$, pues las dos filas son iguales.

- $\text{rango} \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \overline{AB} \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 4 \\ 6 & -3 & 3 \end{pmatrix} = 2$, pues hay al menos un menor de orden dos distinto de cero.

Esto quiere decir que r y s son paralelas: $r \parallel s$ y, por tanto, coplanarias. Para hallar el plano π que las contiene tomamos un punto cualquiera de una de las dos rectas, por ejemplo, $A(-5, 1, -2)$; la dirección de r : $\vec{u} = (3, 2, 4)$ y la otra dirección, la del vector \vec{w} que une A con B : $\overline{AB} = (6, -3, 3)$. Podemos tomar pues $\vec{w} = (2, -1, 1)$. Así pues:

$$\begin{vmatrix} x+5 & y-1 & z+2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (2x+10+8y-8-3z-6) - (4z+8+3y-3-4x-20) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (2x+8y-3z-4) - (-4x+3y+4z-15) = 0 \Leftrightarrow 6x+5y-7z+11=0.$$

Por tanto, el plano π que contiene a r y s es $\pi \equiv 6x+5y-7z+11=0$. †

8. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(3, -4, 7)$ y es perpendicular al plano $\pi \equiv 2x-3y+z-11=0$. Hallar el punto simétrico de P respecto del plano π .

septiembre 1998

Solución

La recta r que buscamos tendrá como vector director un vector perpendicular al plano π : $\vec{u} = (2, -3, 1)$. Las ecuaciones de r serán:

$$r \equiv \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = -4 - 3\lambda \\ z = 7 + \lambda \end{cases} \Leftrightarrow r \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y+4}{-3} = \frac{z-7}{1} \Leftrightarrow r \equiv \begin{cases} -3x+9 = 2y+8 \\ y+4 = -3z+21 \end{cases} \Leftrightarrow r \equiv \begin{cases} 3x+2y = 1 \\ y+3z = 17 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema formado por la recta y el plano obtenemos el punto M donde la recta corta al plano:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ y + 3z = 17 \\ 2x - 3y + z = 11 \end{cases}$$

El determinante de la matriz de los coeficientes es:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (3+12) - (-27) = 42.$$

Por tanto:

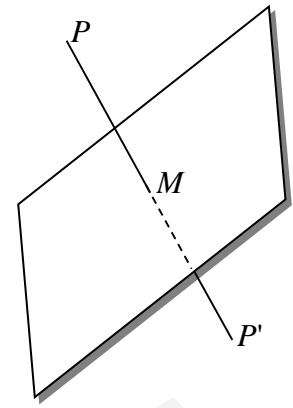
$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 17 & 1 & 3 \\ 11 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{42} = \frac{(1+66) - (34-9)}{42} = \frac{42}{42} = 1; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 17 & 3 \\ 2 & 11 & 1 \end{vmatrix}}{42} = \frac{(51+6) - (99)}{42} = \frac{-42}{42} = -1;$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 17 \\ 2 & -3 & 11 \end{vmatrix}}{42} = \frac{(33+68) - (2-153)}{42} = \frac{252}{42} = 6$$

Así, el punto M donde la recta r corta al plano π es $M(1, -1, 6)$. Este punto es el punto medio del simétrico $P'(a, b, c)$ de $P(3, -4, 7)$ respecto del plano π .

$$\text{Entonces: } (1, -1, 6) = \left(\frac{a+3}{2}, \frac{b-4}{2}, \frac{c+7}{2} \right) \Rightarrow a = -1, b = 2, c = 5.$$

Por tanto, el simétrico del punto P respecto del plano π es $P'(-1, 2, 5)$.



-
9. Hallar la ecuación de la proyección ortogonal r' de la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{2}$ sobre el plano $\alpha \equiv x - 3y + 2z + 12 = 0$.

junio 1999

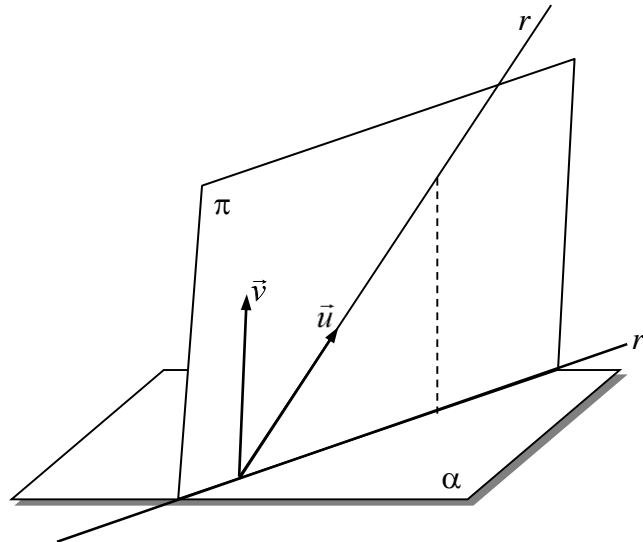
Solución

Hallemos el plano π , perpendicular al plano α que contiene a la recta r . Esta condición nos lleva a que un punto de π será $A(1, 1, 2)$ (punto de la recta) y dos direcciones del mismo serán $\vec{u} = (2, 1, 2)$ (la de la recta, por contenerla) y $\vec{v} = (1, -3, 2)$ (la de un vector perpendicular a α). Entonces:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (2x-2+2y-2-6z+12) - (z-2+4y-4-6x+6) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2x+2y-6z+8) - (-6x+4y+z) = 0 \Leftrightarrow 8x-2y-7z+8=0.$$

Por tanto, el plano π es $\pi \equiv 8x - 2y - 7z + 8 = 0$.



La proyección ortogonal r' de la recta r sobre el plano α será el corte o intersección de α con el plano hallado π . Por tanto, r' tiene ecuaciones implícitas: $r' \equiv \begin{cases} 8x - 2y - 7z + 8 = 0 \\ x - 3y + 2z + 12 = 0 \end{cases}$ †

10. Dados el punto $P(2,1,2)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} z = 2+t \\ y = 3-t \\ 4-3t \end{cases}$ determinar la ecuación del plano que contiene a ambos.

junio 1999

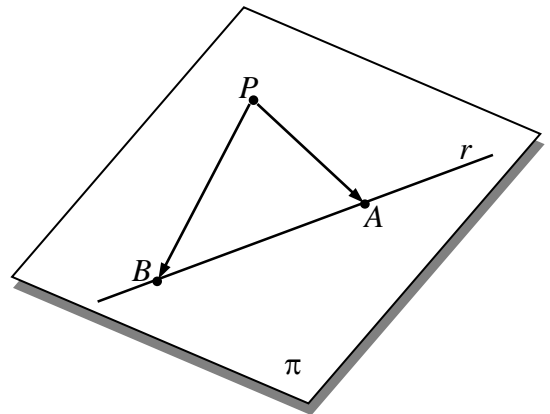
Solución

Dos puntos de la recta r son: $A(2,3,4)$ (para $t=0$) y $B(3,2,1)$ (para $t=1$). Por tanto, el plano π que se busca debe pasar por el punto $P(2,1,2)$ y tener direcciones de $\overrightarrow{PA}=(0,2,2)$ y $\overrightarrow{PB}=(1,1,-1)$.

Así pues:
$$\begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z-2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-2x+4+2y-2)-(2z-4+2x-4)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -4x+2y-2z+10=0 \Leftrightarrow 2x-y+z-5=0, \text{ y el plano es } \pi \equiv 2x-y+z-5=0 \dagger$$



11. Dadas las rectas $r: \frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$ y $s \equiv \begin{cases} x = \mu \\ y = -\mu \\ z = -\mu \end{cases}$, hallar los puntos que dan la mínima distancia y

determinar la ecuación de la perpendicular común a ambas rectas.

septiembre 1999

Solución:

Escribamos las ecuaciones implícitas de las rectas r y s :

$$r \equiv \frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1} \Leftrightarrow r \equiv \begin{cases} x-3=2y \\ y=z-1 \end{cases} \Leftrightarrow r \equiv \begin{cases} x-2y-3=0 \\ y-z+1=0 \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x=\mu \\ y=-\mu \\ z=-\mu \end{cases} \Leftrightarrow s \equiv \frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-1} \Leftrightarrow s \equiv \begin{cases} -x=y \\ -y=-z \end{cases} \Leftrightarrow s \equiv \begin{cases} x+y=0 \\ y-z=0 \end{cases}$$

- Hallemos el plano π que pasa por s y es paralelo a r . Escribamos para ello la ecuación del haz de planos de arista s :

$$\lambda(x+y) + \mu(y-z) = 0 \Leftrightarrow \lambda x + (\lambda + \mu)y - \mu z = 0$$

Para que un plano de este haz sea paralelo a la recta r se debe cumplir que el vector perpendicular al plano $(\lambda, \lambda + \mu, -\mu)$ sea perpendicular a un vector director de r , $\vec{u} = (2, 1, 1)$, es decir, que el producto escalar de ambos sea cero:

$$2\lambda + \lambda + \mu - \mu = 0 \Rightarrow 3\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

Tomando pues $\lambda = 0$ y un valor cualquiera de $\mu \neq 0$ ($\mu = 1$), se tiene: $\pi \equiv y - z = 0$.

- Hallemos ahora el plano π' que pasa por s y es perpendicular a π . Ya sabemos que el haz de planos de arista s es $\lambda x + (\lambda + \mu)y - \mu z = 0$.

Para que un plano de este haz sea perpendicular a π se debe cumplir que los vectores perpendiculares a ambos planos sean perpendiculares, es decir, que el producto escalar de los vectores $(\lambda, \lambda + \mu, -\mu)$ y $(0, 1, -1)$ sea 0:

$$\lambda + \mu + \mu = 0 \Rightarrow \lambda + 2\mu = 0$$

Tomando $\lambda = -2$, $\mu = 1$, se tiene que

$$\pi' \equiv -2x - y - z = 0 \Leftrightarrow \pi' \equiv 2x + y + z = 0$$

- Hallemos por último el plano π'' que pasa por r y es perpendicular a π . El haz de planos de arista r es

$$\begin{aligned} \lambda(x-2y-3) + \mu(y-z+1) &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \lambda x + (-2\lambda + \mu)y - \mu z - 3\lambda + \mu &= 0 \end{aligned}$$

Para que un plano de este haz sea perpendicular a π se debe cumplir (al igual que en el punto anterior) que los vectores $(\lambda, -2\lambda + \mu, -\mu)$ y $(0, 1, -1)$ sean perpendiculares, es decir que:

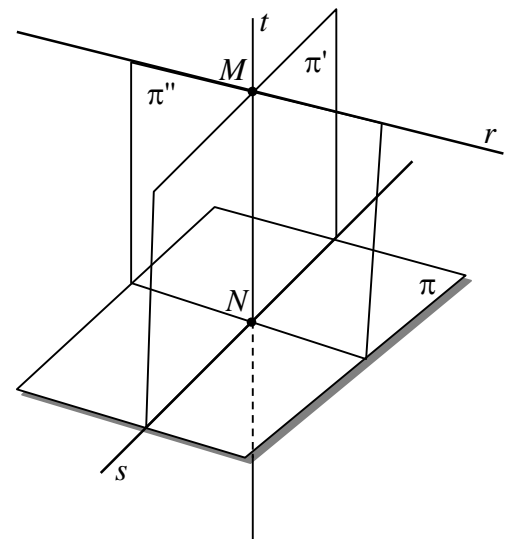
$$-2\lambda + \mu + \mu = 0 \Leftrightarrow -2\lambda + 2\mu = 0 \Leftrightarrow \lambda - \mu = 0$$

Tomando $\lambda = \mu = 1$, se tiene que $\pi'' \equiv x - y - z - 2 = 0$.

La recta t , perpendicular común a r y s , es la intersección de π' y π'' , luego tiene ecuaciones implícitas

$$t \equiv \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x - y - z - 2 = 0 \end{cases}$$

La recta t corta a r en un punto M : $t \cap r = M$. Resolvamos pues el sistema formado por t y r :



$$\begin{cases} x-2y-3=0 \\ y-z+1=0 \\ 2x+y+z=0 \\ x-y-z-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y=3 \\ y-z=-1 \\ 2x+y+z=0 \end{cases}$$

Observa que hemos eliminado la última ecuación (sabemos que tiene solución única) y hemos pasado los términos independientes al segundo miembro. De la primera ecuación: $x=3+2y$. Sustituyendo en la tercera: $2(3+2y)+y+z=0 \Rightarrow 5y+z=-6$. Por tanto, nos queda el sistema de dos ecuaciones con dos

incógnitas: $\begin{cases} -z=-1 \\ 5y+z=-6 \end{cases}$, cuyas soluciones son: $y=-\frac{7}{6}$, $z=-\frac{1}{6}$ y sustituyendo en la expresión de x se

tiene $x=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$. Así pues $M=\left(\frac{2}{3}, -\frac{7}{6}, -\frac{1}{6}\right)$.

De una manera completamente análoga se obtiene el punto $N: t \cap s = N$. El sistema formado por t y s es:

$$\begin{cases} x+y=0 \\ y-z=0 \\ 2x+y+z=0 \\ x-y-z-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ y-z=0 \\ x-y-z=2 \end{cases} \Rightarrow [x=-y] \Rightarrow \begin{cases} y-z=0 \\ -2y-z=2 \end{cases}$$

De aquí se obtiene $x=\frac{2}{3}$, $y=-\frac{2}{3}$, $z=-\frac{2}{3}$. Entonces $N=\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$.

Observa que en este caso hemos suprimido la tercera ecuación, pues si suprimimos la cuarta queda un sistema con infinitas soluciones y esto no es posible ya que sabemos que la solución es única (es conveniente hacer también estas comprobaciones utilizando el teorema de Rouché).

Estos puntos $M=\left(\frac{2}{3}, -\frac{7}{6}, -\frac{1}{6}\right)$ y $N=\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$, son los que dan la mínima distancia entre r y s :

$$\begin{aligned} d(r, s) = d(M, N) &= |\overline{MN}| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{7}{6}-\left(-\frac{2}{3}\right)\right)^2 + \left(-\frac{1}{6}-\left(-\frac{2}{3}\right)\right)^2} = \\ &= \sqrt{0^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ uds. } \dagger \end{aligned}$$

12. Hallar la distancia del punto $P(1,2,3)$ a la recta r de ecuaciones $r \equiv \begin{cases} x=t \\ y=6-t \\ z=2+t \end{cases}$, determinando el punto de la recta que dista menos de P .

septiembre 1999

Solución

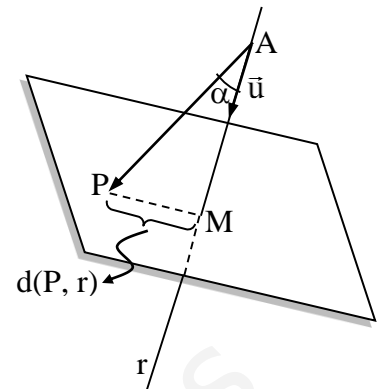
El punto M de r que dista menos de P , es la intersección de r con el plano π que pasa por P y es perpendicular a r . Un vector director de r es $\vec{u}=(1,-1,1)$. Por tanto, este mismo será un vector perpendicular a π . Así pues π ha de ser de la forma $x-y+z+D=0$. Como este plano pasa por P , entonces

$$1 - 2 + 3 + D = 0 \Rightarrow D = -2 \Rightarrow \pi \equiv x - y + z - 2 = 0$$

Las ecuaciones implícitas de la recta r son:

$$r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = 6 - t \\ z = 2 + t \end{cases} \Rightarrow r \equiv \frac{x}{1} = \frac{y - 6}{-1} = \frac{z - 2}{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r \equiv \begin{cases} -x = y - 6 \\ y - 6 = -z + 2 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x + y = 6 \\ y + z = 8 \end{cases}$$



Como $r \cap \pi = M$, al resolver el sistema formado por r y π obtenemos el punto M .

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ y + z = 8 \\ x - y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

De la primera ecuación $x = 6 - y$. Sustituyendo en la tercera tenemos: $6 - y - y + z - 2 = 0$, de donde $6 - y - y + z - 2 = 0 \Rightarrow -2y + z = -4$, quedando el sistema $\begin{cases} y + z = 8 \\ -2y + z = -4 \end{cases}$, con lo que $y = 4$, $z = 4$.

Sustituyendo en la expresión de x , se tiene $x = 2$. Por tanto, el punto M de r que dista menos de P es $M(2, 4, 4)$ y la distancia de P a r , será la misma que la de P a M :

$$d(P, r) = d(P, M) = |\overline{PM}| = \sqrt{(2-1)^2 + (4-2)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6} \text{ uds}$$

También se puede hallar la distancia de P a r utilizando la fórmula:

$$d(P, r) = \frac{|(p_1 - a_1, p_2 - a_2, p_3 - a_3) \times (u_1, u_2, u_3)|}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}}$$

donde $P(p_1, p_2, p_3) = P(1, 2, 3)$, $A(a_1, a_2, a_3)$ es un punto de la recta: $A(0, 6, 2)$ y $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ es un vector director de la recta $\vec{u} = (1, -1, 1)$.

Entonces:

$$(p_1 - a_1, p_2 - a_2, p_3 - a_3) = (1 - 0, 2 - 6, 3 - 2) = (1, -4, 1)$$

El producto vectorial será:

$$(p_1 - a_1, p_2 - a_2, p_3 - a_3) \times (u_1, u_2, u_3) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} i & k \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3(i - k) = -3i + 3k$$

(donde se le ha restado a la tercera fila la segunda y luego se ha desarrollado el determinante por los elementos de la tercera fila). Entonces tenemos $(p_1 - a_1, p_2 - a_2, p_3 - a_3) \times (u_1, u_2, u_3) = (-3, 0, 3)$. Por tanto:

$$d(P, r) = \frac{|(-3, 0, 3)|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{9 + 0 + 9}}{\sqrt{1 + 1 + 1}} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{6}}{3} = \sqrt{6} \text{ uds} \dagger$$

13. Hallar la distancia del punto $P(2,4,1)$ al plano $\alpha \equiv 3x + 4y + 12z - 8 = 0$, y encontrar el punto del plano que da la mínima distancia del punto P .

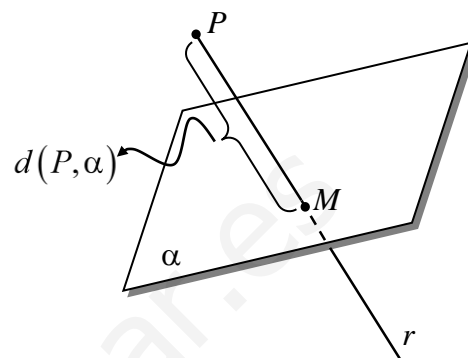
junio 2000

Solución

Hallemos la recta r que es perpendicular al plano α y que pasa por $P(2,4,1)$. Un vector director de esta recta será un vector perpendicular al plano α , o sea el vector $\vec{u} = (3,4,12)$. Por tanto, la

$$\text{recta } r \text{ será: } r \equiv \begin{cases} 2+3t \\ y=4+4t \\ z=1+12t \end{cases} \Rightarrow r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-1}{12} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r \equiv \begin{cases} 4x-8=3y-12 \\ 12y-48=4z-4 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} 4x-3y=-4 \\ 12y-4z=44 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} 4x-3y=-4 \\ 3y-z=11 \end{cases}$$



Esta recta corta al plano α en un punto M , que da la mínima distancia del punto P al plano α : $r \cap \alpha = M$.

Para hallar el punto M se resuelve el sistema formado por la recta r y el plano α :
$$\begin{cases} 4x-3y=-4 \\ 3y-z=11 \\ 3x+4y+12z-8=0 \end{cases} .$$
 De

la segunda ecuación $z = 3y - 11$. Sustituyendo en la tercera $3x + 4y + 12(3y - 11) - 8 = 0 \Rightarrow 3x + 40y = 140$,

que junto con la primera ecuación forman el sistema:
$$\begin{cases} 4x-3y=-4 \\ 3x+40y=140 \end{cases}$$
, cuyas soluciones son $x = \frac{20}{13}$,

$y = \frac{44}{13}$. Sustituyendo en la expresión de z nos da $z = -\frac{11}{13}$. De este modo el punto M es $M\left(\frac{20}{13}, \frac{44}{13}, -\frac{11}{13}\right)$.

La distancia del punto P al plano α coincidirá por tanto con la distancia de P a M :

$$d(P, \alpha) = d(P, M) = |\overline{PM}| = \sqrt{\left(\frac{20}{13} - 2\right)^2 + \left(\frac{44}{13} - 4\right)^2 + \left(-\frac{11}{13} - 1\right)^2} =$$

$$\sqrt{\left(\frac{-6}{13}\right)^2 + \left(\frac{-8}{13}\right)^2 + \left(\frac{-24}{13}\right)^2} = \sqrt{\frac{36}{169} + \frac{64}{169} + \frac{576}{169}} = \sqrt{\frac{676}{169}} = \sqrt{4} = 2 \text{ uds}$$

La distancia del punto P al plano α también se puede hallar utilizando la fórmula:

$$d(P, \alpha) = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

donde $P(p_1, p_2, p_3) = P(2,4,1)$ y como α es el plano: $\alpha \equiv 3x + 4y + 12z - 8 = 0$, entonces $A = 3$, $B = 4$, $C = 12$, $D = -8$. De este modo:

$$d(P, \alpha) = \frac{|3 \cdot 2 + 4 \cdot 4 + 12 \cdot 1 + (-8)|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2}} = \frac{26}{\sqrt{169}} = \frac{26}{13} = 2 \text{ uds} \quad \dagger$$

14. Hallar el punto simétrico del punto $A(1,2,3)$ respecto de la recta $r \equiv \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 2x - z - 1 = 0 \end{cases}$

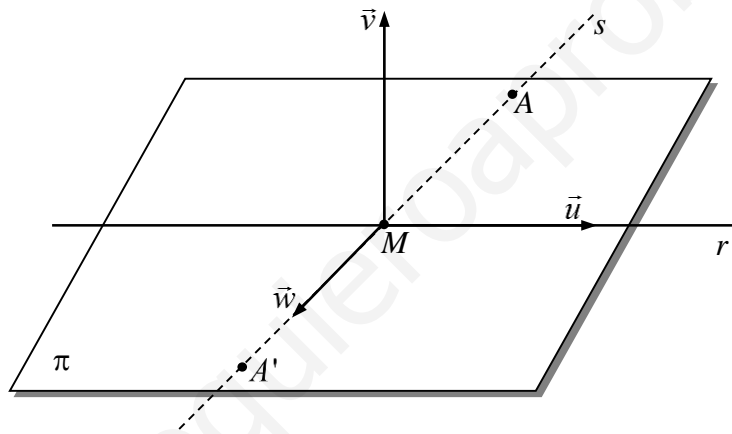
junio 2000

Solución

Hallemos el plano π que contiene al punto A y a la recta r .

El haz de planos de base la recta r es $\lambda(x - y + 1) + \mu(2x - z - 1) = 0$. Podemos suponer que $\lambda \neq 0$ y dividir todos los términos entre λ con lo que la ecuación del haz queda de la forma: $x - y + 1 + t(2x - z - 1) = 0$, donde $t = \mu/\lambda$. Como el plano contiene al punto A , entonces $1 - 2 + 1 + t(2 - 3 - 1) = 0 \Rightarrow -2t = 0 \Rightarrow t = 0$ y el plano π que buscamos es $\pi \equiv x - y + 1 = 0$.

La idea consiste en hallar un vector \vec{w} perpendicular a r para, utilizándolo, hallar la recta s perpendicular a r , contenida en π , que pasa por el punto A . Esta recta s cortará a r (están en el mismo plano y son perpendiculares) en un punto M . El punto simétrico de A respecto de r , A' , se encuentra de M a la misma distancia que M de A : M es el punto medio de A y A' . Ahora ya será fácil hallar A' (ver figura).



Hallemos entonces un vector director \vec{u} de la recta r . Para ello escribamos r en paramétricas.

$$y = \lambda \Rightarrow x = \lambda - 1 \Rightarrow 2(\lambda - 1) - z - 1 = 0 \Rightarrow z = 2\lambda - 2 \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \lambda - 1 \\ y = \lambda \\ z = 2\lambda - 2 \end{cases} \Rightarrow \vec{u} = (1, 1, 2)$$

Un vector perpendicular al plano π es $\vec{v} = (1, -1, 0)$.

Entonces el vector $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ es simultáneamente perpendicular a \vec{u} y a \vec{v} . Hallémoslo:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} i & j+i & k \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} j+i & k \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2i + 2j - 2k \Rightarrow \vec{w} = (2, 2, -2)$$

Podemos tomar \vec{w} un vector proporcional: $\vec{w} = (1, 1, -1)$.

La recta s que pasa por $A(1,2,3)$ y tiene dirección $\vec{w} = (1, 1, -1)$ es perpendicular a r y está contenida en π :

$$s \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-3}{-1} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x-1 = y-2 \\ -y+2 = z-3 \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x - y = -1 \\ y + z = 5 \end{cases}$$

Halleemos el punto de corte de r y s : $M = r \cap s$. Para ello resolvemos el sistema formado por r y s :

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 2x - z - 1 = 0 \\ x - y = -1 \\ y + z = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = -1 \\ 2x - z = 1 \\ y + z = 5 \end{cases} \quad (\text{obsérvese que se ha eliminado la tercera ecuación, que es igual que la primera}).$$

De la primera ecuación $x = y - 1$. Sustituyendo en la segunda: $2(y - 1) - z = 1 \Rightarrow 2y - z = 3$ que,

con la tercera forman el sistema $\begin{cases} 2y - z = 3 \\ y + z = 5 \end{cases}$, cuyas soluciones son: $y = \frac{8}{3}$, $z = \frac{7}{3}$. Sustituyendo en la

expresión de x se tiene $x = \frac{5}{3}$, con lo que $M\left(\frac{5}{3}, \frac{8}{3}, \frac{7}{3}\right)$.

Supongamos que el punto simétrico de $A(1, 2, 3)$ respecto de r es $A'(a, b, c)$. Como M es el punto medio de

$$A \text{ y } A', \text{ entonces } \begin{cases} \frac{a+1}{2} = \frac{5}{3} \\ \frac{b+2}{2} = \frac{8}{3} \\ \frac{c+3}{2} = \frac{7}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{7}{3} \\ b = \frac{10}{3} \\ c = \frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow A'\left(\frac{7}{3}, \frac{10}{3}, \frac{5}{3}\right).$$

15. Dados los puntos $A(-2, -4, -3)$ y $B(2, 6, 5)$, y la recta $r \equiv \begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + y - 3z = 2 \end{cases}$, averiguar si existe alguna recta tal que contenga los puntos A y B y corte a la recta r . Razonar la respuesta.

septiembre 2000

Solución

Se trata de hallar la posición relativa de r y la recta s que pasa por A y B .

Pasemos r a paramétricas.

$$z = t \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x - y = 1 - t \\ 2x + y = 2 + 3t \end{cases} \Rightarrow x = 1 + \frac{2}{3}t, y = \frac{5}{3}t \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + \frac{2}{3}t \\ y = \frac{5}{3}t \\ z = t \end{cases}$$

Un vector director de r es $\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 1\right)$ y podemos tomar también uno proporcional: $\vec{u} = (2, 5, 3)$. Un punto de r es $M(1, 0, 0)$.

La recta s que pasa por A y B es tiene vector director $\overline{AB} = (4, 10, 8)$ y podemos tomar también uno proporcional: $\vec{v} = (2, 5, 4)$.

Estudiemos la posición relativa de r y s :

- $\text{rango} \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} = 2$ (\vec{u} y \vec{v} no son proporcionales).

$$\bullet \operatorname{rango} \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \overrightarrow{MA} \end{pmatrix} = \operatorname{rango} \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ -3 & -4 & -3 \end{pmatrix} = 3, \text{ ya que } \begin{vmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ -3 & -4 & -3 \end{vmatrix} = -7 \neq 0.$$

Por tanto, r y s se cruzan y no puede existir ninguna recta que contenga a los puntos A y B y corte a la recta r . †

16. Hallar el punto simétrico del punto $A(2, -3, 5)$ respecto del plano $\alpha \equiv x - 3y + 4z + 21 = 0$.

septiembre 2000

Solución

La resolución de este ejercicio es como la del ejercicio número 8.

Calculemos la recta r que pasa por A y es perpendicular al plano α . Esta recta tendrá como vector director un vector perpendicular al plano α : $\vec{u} = (1, -3, 4)$.

$$\text{Las ecuaciones de } r \text{ serán pues: } r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -3 - 3\lambda \\ z = 5 + 4\lambda \end{cases} \Leftrightarrow r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{-3} = \frac{z-5}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow r \equiv \begin{cases} -3x + 6 = y + 3 \\ 4y + 12 = -3z + 15 \end{cases} \Leftrightarrow r \equiv \begin{cases} 3x + y = 3 \\ 4y + 3z = 3 \end{cases}.$$

$$\text{Resolviendo el sistema } \begin{cases} 3x + y = 3 \\ 4y + 3z = 3 \\ x - 3y + 4z = -21 \end{cases}, \text{ formado por la recta y el plano obtenemos el punto } M \text{ donde la}$$

recta corta al plano.

De la primera ecuación:

$$y = 3 - 3x.$$

Sustituyendo en la segunda:

$$4(3 - 3x) + 3z = 3 \Rightarrow -12x + 3z = -9 \Rightarrow -4x + z = -3.$$

Sustituyendo en la tercera:

$$x - 3(3 - 3x) + 4z = -21 \Rightarrow x - 9 + 9x + 4z = -21 \Rightarrow 10x + 4z = -12 \Rightarrow 5x + 2z = -6.$$

$$\text{Tenemos pues el sistema: } \begin{cases} -4x + z = -3 \\ 5x + 2z = -6 \end{cases}, \text{ de donde } x = 0, z = -3. \text{ Por tanto, como } y = 3 - 3x \Rightarrow y = 3.$$

Así, el punto M donde la recta r corta al plano α es $M(0, 3, -3)$. Este punto es el punto medio del simétrico

$A'(a, b, c)$ de $A(2, -3, 5)$ respecto del plano α . Entonces: $(0, 3, -3) = \left(\frac{a+2}{2}, \frac{b-3}{2}, \frac{c+5}{2} \right)$, de donde $a = -2, b = 9, c = -11$.

Por tanto, el simétrico de A respecto del plano α es $A'(-2, 9, -11)$. †

$$17. \text{ Dadas las rectas } r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases}, \quad s \equiv \begin{cases} x = \mu \\ y = 2 + 2\mu \\ z = 0 \end{cases}.$$

- a) Estudia la posición relativa de las rectas r y s .
 b) Halla la ecuación de una recta que sea perpendicular simultáneamente a r y s .

junio 2001

Solución

a) Punto y vector director de r : $A(1,0,0)$, $\vec{u} = (1,1,-1)$.

Punto y vector director de s : $B(0,2,0)$, $\vec{v} = (1,2,0)$.

$\text{rango} \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2$ (hay un menor de orden dos distinto de cero, con lo que \vec{u} y \vec{v} no son proporcionales).

$$\text{rango} \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \overrightarrow{AB} \end{pmatrix} = \text{rango} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 3, \text{ ya que } \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$$

Por tanto, r y s se cruzan.

b) *Este parte es similar al ejercicio 11.*

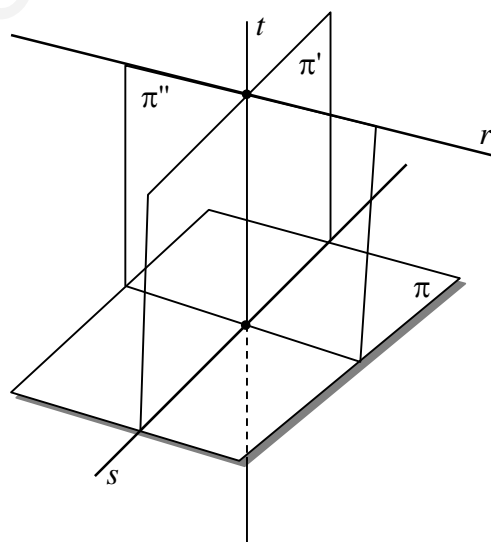
Las ecuaciones implícitas de r y s son:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -\lambda \end{cases} \Rightarrow r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r \equiv \begin{cases} x-1 = y \\ -y = z \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

$$s \equiv \begin{cases} x = \mu \\ y = 2 + 2\mu \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow s \equiv \frac{x}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{0} \Rightarrow$$

$$\equiv \begin{cases} 2x = y - 2 \\ 0 = 2z \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} 2x - y + 2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$



- Hallemos el plano π que pasa por s y es paralelo a r . Escribamos para ello la ecuación del haz de planos de arista s : $\lambda(2x - y + 2) + \mu z = 0 \Leftrightarrow 2\lambda x - \lambda y + \mu z + 2 = 0$. Para que un plano de este haz sea paralelo a la recta r se debe cumplir que el vector perpendicular al plano $(2\lambda, -\lambda, \mu)$ sea perpendicular a un vector director de r , $\vec{u} = (1,1,-1)$, es decir, que el producto escalar de ambos sea cero: $2\lambda - \lambda - \mu = 0 \Rightarrow \lambda - \mu = 0 \Rightarrow \lambda = \mu$. Tomando pues $\lambda = \mu = 1$, se tiene: $\pi \equiv 2x - y + z + 2 = 0$.

- Hallemos ahora el plano π' que pasa por s y es perpendicular a π . Ya sabemos que el haz de planos de arista s es $2\lambda x - \lambda y + \mu z + 2 = 0$. Para que un plano de este haz sea perpendicular a π se debe cumplir que los vectores perpendiculares a ambos planos sean perpendiculares, es decir, que el producto escalar de los vectores $(2\lambda, -\lambda, \mu)$ y $(2, -1, 1)$ sea 0: $4\lambda + \lambda + \mu = 0 \Rightarrow 5\lambda + \mu = 0$. Tomando $\lambda = 1$, $\mu = -5$, tenemos $\pi' \equiv 2x - y - 5z + 2 = 0$
- Hallemos por último el plano π'' que pasa por r y es perpendicular a π . El haz de planos de arista r es: $\lambda(x - y - 1) + \mu(y + z) = 0 \Leftrightarrow \lambda x + (-\lambda + \mu)y + \mu z = 0$. Para que un plano de este haz sea perpendicular a π se debe cumplir (al igual que en el punto anterior) que los vectores $(\lambda, -\lambda + \mu, \mu)$ y $(2, -1, 1)$ sean perpendiculares, es decir que $2\lambda + \lambda - \mu + \mu = 0 \Leftrightarrow 3\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$. Tomando $\lambda = 0$ y $\mu = 1$, se tiene que $\pi'' \equiv y + z = 0$.

La recta t , perpendicular común a r y s , es la intersección de π' y π'' , luego tiene ecuaciones implícitas

$$t \equiv \begin{cases} 2x - y - 5z + 2 = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

Si se quiere hallar también la distancia entre r y s , se aplica la fórmula de la distancia de un punto cualquiera de r , por ejemplo $A(1, 0, 0)$, al plano $\pi \equiv 2x - y + z + 2 = 0$:

$$d(r, s) = d(A, \pi) = \frac{|2 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{4\sqrt{6}}{6} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \text{ uds. } \dagger$$

18. Determina las coordenadas del punto simétrico del punto $A(-2, 1, 6)$ respecto de la recta

$$r \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{2}$$

junio 2001

Solución

La resolución de este ejercicio es como la del ejercicio número 14.

$$\text{Las ecuaciones implícitas de } r \text{ son: } r \equiv \begin{cases} 2x + 2 = y - 3 \\ 2y - 6 = 2z + 2 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} 2x - y = -5 \\ 2y - 2z = 8 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ y - z - 4 = 0 \end{cases}$$

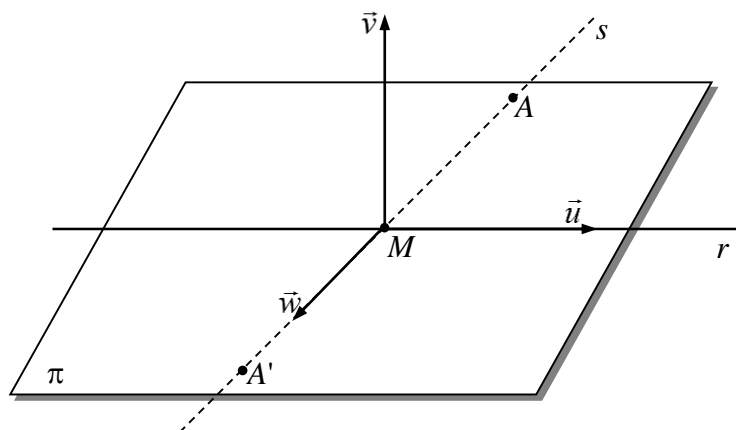
Hallemos el plano π que contiene al punto A y a la recta r .

El haz de planos de base la recta r es $\lambda(2x - y + 5) + \mu(y - z - 4) = 0$. Podemos suponer que $\lambda \neq 0$ y dividir todos los términos entre λ con lo que la ecuación del haz queda de la forma: $2x - y + 5 + t(y - z - 4) = 0$, donde $t = \mu/\lambda$. Como el plano contiene al punto A , entonces $-4 - 1 + 5 + t(1 - 6 - 4) = 0 \Rightarrow -9t = 0 \Rightarrow t = 0$ y el plano π que buscamos es $\pi \equiv 2x - y + 5 = 0$.

La idea consiste en hallar un vector \vec{w} perpendicular a r para, utilizándolo, hallar la recta s perpendicular a r , contenida en π , que pasa por el punto A . Esta recta s cortará a r (ya que están en el mismo plano y son perpendiculares) en un punto M . El punto simétrico de A respecto de r , A' , se encuentra de M a la misma distancia que M de A : M es el punto medio de A y A' . Ahora ya será fácil hallar A' (ver figura).

Un vector director \vec{u} de la recta r es $\vec{u} = (1, 2, 2)$.

Un vector perpendicular al plano π es $\vec{v} = (2, -1, 0)$.



Entonces el vector $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$ es simultáneamente perpendicular a \vec{u} y a \vec{v} . Hallémoslo:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (4j - k) - (4k - 2i) = 2i + 4j - 5k \Rightarrow \vec{w} = (2, 4, -5).$$

La recta s que pasa por $A(-2, 1, 6)$ y tiene dirección $\vec{w} = (2, 4, -5)$ es perpendicular a r y está contenida en

$$\pi: s \equiv \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-6}{-5} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} 4x+8=2y-2 \\ -5y+5=4z-24 \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} 4x-2y=-10 \\ 5y+4z=29 \end{cases} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} 2x-y=-5 \\ 5y+4z=29 \end{cases}.$$

Hallemos el punto de corte de r y s : $M = r \cap s$. Para ello resolvemos el sistema formado por las rectas r y s :

$$\begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ y - z - 4 = 0 \\ 2x - y = -5 \\ 5y + 4z = 29 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = -5 \\ y - z = 4 \\ 5y + 4z = 29 \end{cases} \quad (\text{obsérvese que se ha eliminado la tercera ecuación, que es igual que la primera}).$$

De las dos últimas ecuaciones se obtiene: $y = 5$, $z = 1$. Sustituyendo en la primera se obtiene $x = 0$, con lo que $M(0, 5, 1)$.

Supongamos que el punto simétrico de $A(-2, 1, 6)$ respecto de r es $A'(a, b, c)$. Como M es el punto medio

$$\text{de } A \text{ y } A', \text{ entonces } \begin{cases} \frac{a-2}{2} = 0 \\ \frac{b+1}{2} = 5 \\ \frac{c+6}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 9 \\ c = -4 \end{cases} \Rightarrow A'(2, 9, -4).$$

19. Halla el valor de k para que las rectas $r \equiv \begin{cases} x+y=2 \\ y-z=3 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} y-3z=k \\ y-2z=2 \end{cases}$ se corten. Halla el punto de corte.

Solución

Para que se corten el sistema conjunto $\begin{cases} x + y = 2 \\ y - z = 3 \\ y - 3z = k \\ 2z = 2 \end{cases}$ formado por las ecuaciones de r y de s , debe tener

solución única. Para ello el determinante de la matriz ampliada tiene que ser cero porque, en caso contrario, el rango de la matriz ampliada sería 4 y el rango de la matriz de los coeficientes es 3 (hay un menor de orden

3 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$), con lo que el sistema sería incompatible y las rectas no podrían

cortarse. De este modo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & k \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & k \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & k-3 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & k-3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2 - (-k+3) = k-1 = 0 \Leftrightarrow k=1.$$

Para hallar el punto de corte P de r y s resolvemos el sistema. Sustituimos k por su valor y eliminamos, por

ejemplo, la última ecuación: $\begin{cases} +y = 2 \\ y - z = 3 \\ 3z = 1 \end{cases}$. De las dos últimas se obtiene $y = 4$, $z = 1$. Sustituyendo en la

primera: $x = -2$. Por tanto, el punto de corte de r y s es $P(-2, 4, 1)$. †

20. Halla λ para que el plano $\pi \equiv 2x + \lambda y - z = 1$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + y - z = 2 \end{cases}$ sean paralelos. ¿Puedes encontrar otro valor de λ para que sean perpendiculares?

septiembre 2001

Solución

Para que la recta y el plano sean paralelos no deben tener ningún punto en común. Por tanto, el sistema

conjunto formado por la recta y el plano, $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y - z = 2 \\ 2x + \lambda y - z = \end{cases}$, no debe tener soluciones, es decir, el rango de la

matriz A de los coeficientes tiene que ser distinto que el rango de la matriz ampliada $A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & \lambda & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

El rango de esta última es 3 pues hay un menor de orden 3 distinto de cero: $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

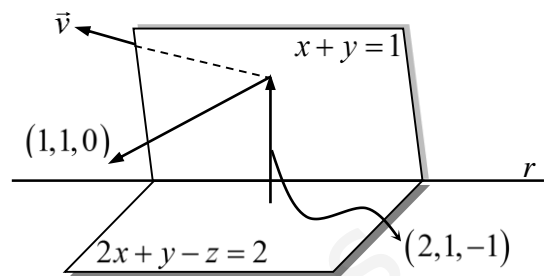
Por tanto, el rango de la matriz de los coeficientes A deber ser menor que 3 y para ello el determinante de la matriz A tiene que ser 0:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & \lambda & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & \lambda-2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ \lambda-2 & -1 \end{vmatrix} = 1 - (-\lambda + 2) = \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1.$$

Para ver si se puede encontrar otro valor de λ para el que el plano y la recta sean perpendiculares, habremos de ver si un vector perpendicular del plano, $\vec{u} = (2, \lambda, -1)$ es paralelo o tiene la misma dirección que un vector director de la recta.

Hallaremos en este caso el vector director de la recta \vec{v} como el producto vectorial de los dos vectores perpendiculares a los dos planos que la definen (ver figura):

$$\vec{v} = (1, 1, 0) \times (2, 1, -1) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-i + k) - (2k - j) = -i + j - k \Rightarrow \vec{v} = (-1, 1, -1).$$



Otra forma alternativa de hallar el vector director de la recta r es pasándola a paramétricas. Para ello hay que resolver el sistema $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + y - z = 2 \end{cases}$. Para ello, llamando $z = \lambda$, tenemos $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 2 + \lambda \end{cases}$, y de aquí

obtenemos que: $x = 1 + \lambda$, $y = -\lambda$, con lo que las ecuaciones paramétricas de la recta son $\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$. Por

tanto, un vector director es $(1, -1, 1)$ (obsérvese que tiene la misma dirección de \vec{v} por ser proporcionales).

Pues bien, tal y como se había planteado, para que r y π sean perpendiculares, el vector perpendicular al plano $\vec{u} = (2, \lambda, -1)$ y el vector director de la recta $\vec{v} = (1, -1, 1)$ deben ser paralelos. Es decir, debe existir $k \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} = k\vec{v}$, es decir tal que $(2, \lambda, -1) = k(-1, 1, 1) \Rightarrow (2, \lambda, -1) = (-k, k, k)$, y esto es imposible pues tendría que ser simultáneamente $k = -2$ y $k = 1$.

Por tanto, no existe ningún valor de λ para el que r y π sean perpendiculares. †