

Ejercicio n° 1.- (1 punto) Resuelve las siguientes ecuaciones:

- a) $3^{x-1} = 9\sqrt{x}$
b) $\log 4 + 2 \cdot \log (x - 3) = \log x$

Ejercicio n° 2.- (1 punto) Resuelve, utilizando el método de Gauss, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}x + y + z &= 2 \\2x + 3y + 5z &= 11 \\x - 5y + 6z &= 29\end{aligned}$$

Ejercicio n° 3.- (1 punto) Encuentra todas las soluciones de la siguiente ecuación trigonométrica:

$$\cos 2x - \operatorname{sen}^2 x = 1$$

Ejercicio n° 4.- (1 punto)

Resuelve el triángulo ABC conociendo los siguientes datos: $\hat{B} = 25^\circ$, $b = 30 \text{ cm}$ y $a = 60 \text{ cm}$.

Ejercicio n° 5.- (1 punto)

Dados los vectores $\vec{u} (4, -3)$ y $\vec{v} (9, m)$, calcula el valor de m para que se cumpla lo siguiente:

- a) \vec{u} y \vec{v} sean perpendiculares. b) \vec{u} y \vec{v} tengan igual módulo.

Ejercicio n° 6.- (1 punto)

Escribe la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en O (3, -5) y es tangente a la recta:

$$4x + 3y - 2 = 0$$

Ejercicio n° 7.- (1 punto)

Calcula "a" para que la siguiente función sea continua en $x=1$.

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \leq 1 \\ 4 - ax^2, & x > 1 \end{cases}$$

Ejercicio n° 8.- (1 punto)

Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x^2}$
b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-5x+6}$

Ejercicio n° 9.- (1 punto)

Calcula las siguientes derivadas:

a) $y = 2x\sqrt{2x-1}$
b) $y = \operatorname{tg} \frac{x+1}{x-1}$

Ejercicio n° 10.- (1 punto)

Dada la función $f(x) = \frac{2x^2}{x-1}$:

- a) Estudia sus asíntotas.
b) Estudia el crecimiento y decrecimiento y determina sus máximos y sus mínimos.
c) Representa la función.

SOLUCIONES

11

$$a) \quad 3^{x-1} = 9^{\sqrt{x}}$$

$$3^{x-1} = (3^2)^{\sqrt{x}}$$

$$3^{x-1} = 3^{2\sqrt{x}} \rightarrow x-1 = 2\sqrt{x}$$

$$(x-1)^2 = (2\sqrt{x})^2$$

$$x^2 + 1 - 2x = 4x$$

$$x^2 - 6x + 1 = 0 \rightarrow$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4}}{2}$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{32}}{2}$$

$$x = \frac{6 \pm 4\sqrt{2}}{2}$$

$$x = 3 \pm 2\sqrt{2}$$

$$b) \quad \log 4 + 2 \cdot \log(x-3) = \log x$$

$$\log 4 + \log(x-3)^2 = \log x$$

$$\log 4 \cdot (x-3)^2 = \log x \rightarrow 4(x-3)^2 = x$$

$$4(x^2 + 9 - 6x) = x$$

$$4x^2 + 36 - 24x = x$$

$$4x^2 - 25x + 36 = 0$$

$$x = \frac{25 \pm \sqrt{25^2 - 4 \cdot 4 \cdot 36}}{2 \cdot 4} = \frac{25 \pm \sqrt{625 - 576}}{8} = \frac{25 \pm \sqrt{49}}{8}$$

$$x = \frac{25 \pm 7}{8}$$

$$x_1 = 4$$

$$x_2 = \frac{9}{4}$$

② GAUSS

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 2 \quad (1) \\ 2x + 3y + 5z = 11 \quad (2) \\ x - 5y + 6z = 29 \quad (3) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \longrightarrow \\ \xrightarrow{(2) - 2 \cdot (1)} \\ \xrightarrow{(3) - (1)} \end{array} \left. \begin{array}{l} x + y + z = 2 \quad (1) \\ y + 3z = 7 \quad (2) \\ -6y + 5z = 27 \quad (3) \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{l} \longrightarrow x + y + z = 2 \quad (1) \\ \longrightarrow y + 3z = 7 \quad (2) \\ \xrightarrow{(3) + 6(2)} 23z = 69 \quad (3) \end{array} \longrightarrow z = \frac{69}{23} \longrightarrow z = 3$$

$$\begin{array}{l} (2) \quad y + 3z = 7 \\ y + 3 \cdot 3 = 7 \longrightarrow y = 7 - 9 \longrightarrow y = -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} (1) \quad x + y + z = 2 \\ x - 2 + 3 = 2 \longrightarrow x = 2 + 2 - 3 \longrightarrow x = 1 \end{array}$$

$$(3) \quad \cos 2x - \sin^2 x = 1 \quad \longleftarrow \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x - \sin^2 x = 1 \quad \longleftarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$1 - \sin^2 x - 2\sin^2 x = 1$$

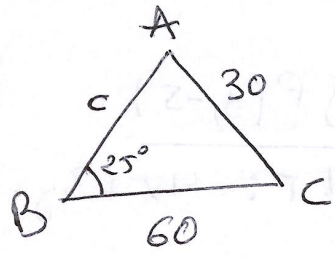
$$-3\sin^2 x = 0 \longrightarrow \sin x = 0$$

$$x = \arcsin 0 = 0 + 180K$$

$$K = 0, 1, 2$$

$$x = 0 + 180 \cdot K$$
$$K = 0, 1, 2, \dots$$

4



$\hat{B} = 25^\circ$ $b = 30 \text{ cm}$ $a = 60 \text{ cm}$

$$\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} \rightarrow \frac{60}{\sin \hat{A}} = \frac{30}{\sin 25^\circ} \rightarrow \sin \hat{A} = \frac{60}{30} \sin 25^\circ$$

$$\sin \hat{A} = 2 \cdot \sin 25^\circ = 2 \cdot 0,42 = 0,84 \rightarrow \hat{A} = 57,14^\circ$$

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180 \rightarrow \hat{C} = 180 - 25 - 57,14 \rightarrow \hat{C} = 97,86^\circ$$

$$\frac{c}{\sin \hat{C}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} \rightarrow \frac{c}{\sin 98^\circ} = \frac{30}{\sin 25^\circ} \rightarrow c = 30 \cdot \frac{\sin 98^\circ}{\sin 25^\circ}$$

$$c = 70,71 \text{ cm}$$

5

$\vec{u}(4, -3)$
 $\vec{v}(9, m)$

a) $\vec{u} \perp \vec{v} \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$$\left. \begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= 0 \\ \vec{u} \cdot \vec{v} &= 4 \cdot 9 - 3 \cdot m \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 4 \cdot 9 - 3 \cdot m &= 0 \\ 36 - 3m &= 0 \end{aligned}$$

$$m = 12$$

b) $|\vec{u}| = |\vec{v}|$

$$\sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{9^2 + m^2} \rightarrow 4^2 + (-3)^2 = 9^2 + m^2$$

$$16 + 9 = 81 + m^2$$

$$m^2 = 16 + 9 - 81$$

$$m^2 = -56$$

$$m = \sqrt{-56} = \sqrt{(-1) \cdot 56}$$

$$m = \pm i \sqrt{56}$$

6

$$d(P, r) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$\begin{cases} P(3, -5) \\ r: 4x + 3y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$d(P, r) = \frac{|4 \cdot 3 + 3(-5) - 2|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|12 - 15 - 2|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{5}{\sqrt{25}} = 1$$

Equation de la circonférence:

$$(x-3)^2 + (y+5)^2 = 1^2$$

$$x^2 + 9 - 6x + y^2 + 25 + 10y - 1 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 6x + 10y + 33 = 0$$

7

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 1 \\ 4-ax^2 & x > 1 \end{cases}$$

Conditions de continuité:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1)$$

$$f(1) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} 4-ax^2 = 4-a \quad \left\{ \begin{array}{l} 4-a = 2 \\ a = 4-2 \end{array} \right.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} x+1 = 2$$

$$a = 2$$

8

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2} - \frac{1}{x^2} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{x^2+1}{x^4}} - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{x^2}{x^4} + \frac{1}{x^4}} - \frac{1}{x^2} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}} - \frac{1}{x^2} \right) = \sqrt{0+0} - 0 = 0 //$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x^2-5x+6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)}{(x-2)(x-3)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-3} = \frac{1}{2-3} = \frac{1}{-1} = -1 //$$

9

$$a) y = 2x \cdot \sqrt{2x-1} = 2 \cdot \sqrt{2x^3-x^2}$$

$$y' = 2 \cdot \frac{6x^2 - 2x}{2\sqrt{2x^3-x^2}} = \frac{2x(3x^2-2)}{x\sqrt{2x-1}} = 2 \frac{3x^2-2}{\sqrt{2x-1}} //$$

$$b) y = \operatorname{tg} \frac{x+1}{x-1}$$

$$y' = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{(x-1) - (x+1)}{(x-1)^2} =$$

$$y' = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{-2}{(x-1)^2} //$$

10

$$f(x) = \frac{2x^2}{x-1}$$

$$\text{Dom: } \mathbb{R} - \{1\}$$

a) Asíntota vertical en $x = 1$ posición:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2}{x-1} \approx \frac{2 \cdot 0,99^2}{0,99-1} \left(\begin{array}{c} \oplus \\ \ominus \end{array} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2}{x-1} \approx \frac{2 \cdot 1,01^2}{1,01-1} \left(\begin{array}{c} \oplus \\ \oplus \end{array} \right) = +\infty$$

Estudio:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 + 2 - 2}{x-1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{2x^2 - 2}{x-1} + \frac{2}{x-1} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(2 \frac{x^2 - 1}{x-1} + \frac{2}{x-1} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(2 \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} + \frac{2}{x-1} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(2(x+1) + \frac{2}{x-1} \right) \approx \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 2(x+1)$$

Asíntota oblicua: $y = 2x + 2$

Posición relativa $\left(+ \frac{2}{x-1} \right)$:

$$b) f'(x) = \frac{4x(x-1) - 2x^2}{(x-1)^2} = \frac{4x^2 - 4x - 2x^2}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 4x}{(x-1)^2}$$

Puntos singulares: $f'(x) = 0 \rightarrow 2x^2 - 4x = 0$
 $2x(x-2) = 0$

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0) \\ x_2 = 2 \rightarrow f(2) = \frac{8}{1} = 8 \rightarrow (2, 8) \end{array} \right\} \begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} f'(x) > 0 \text{ para } (-\infty, 0) \rightarrow \text{Creciente} \\ f'(x) < 0 \text{ para } (0, 2) \rightarrow \text{Decreciente} \\ f'(x) > 0 \text{ para } (2, +\infty) \rightarrow \text{Creciente} \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rightarrow \text{MAX} \\ \rightarrow \text{MIN} \end{array}$$

c)

