1. Dada $f(x)=\dfrac{4}{x^2-4}$

a) Razonar cuál es su Dom(f)
b) Hallar su posible simetría.
c) Obtener los posibles cortes con los ejes.
d) Tabla de valores apropiada y representación gráfica.
e) A la vista de la gráfica indicar su Im(f)
f) Estudiar su continuidad
g) Hallar la antiimagen de y=1/3
h) Posibles M y m. Intervalos de crecimiento.
i) Hallar <u>analíticamente</u> $\lim_{x\to 2} f(x)$, $\lim_{x\to \infty} f(x)$ y $\lim_{x\to -\infty} f(x)$
j) Ecuación de las posibles asíntotas. *(2 puntos)*

2. Dada $f(x)=\begin{cases} -x+4 & \text{si} \quad x\le -2 \\ x^2-x-6 & \text{si} \quad -2<x\le 6 \\ 24 & \text{si} \quad x>6 \end{cases}$

a) Representarla gráficamente.
b) Indicar su Dom(f) e Im(f)
c) Hallar analíticamente los posibles cortes con los ejes.
d) Posibles M y m. Intervalos de crecimiento.
e) Estudiar su continuidad
f) Ecuación de las posibles asíntotas.
g) Hallar la antiimagen de y=14
h) Hallar $\lim_{x\to -2} f(x)$ *(1,75 puntos)*

3. **a)** Hallar razonadamente $\log_3 \dfrac{1}{3\sqrt[4]{27}}$ y $\log_{1/5}125$

b) Calcular $\log\sqrt{3,6}$ en función de log 2 y log 3

c) Hallar razonadamente x en las expresiones $\log_x 5=-3$ y $\log_3(\log_3 3)=x$ *(1,25 puntos)*

4. Resolver: **a)** $2^{x-1}\cdot 3^{1-x}=5^{2x-2}$ **b)** $3^{x-1}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2x-1}$ **c)** $2^{2^{2x-1}}-16=2^{x+1}$ *(1,5 puntos)*

5. Calcular: **a)** $\lim_{x\to\infty}\dfrac{x^3-3x^2+4}{x^3-2x^2-4x+8}$ **b)** $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^3-3x^2+4}{x^3-2x^2-4x+8}$ **c)** $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2+1}\right)=$ *(1,5 puntos)*

6. **a)** Hallar la derivada de $f(x)=\sqrt{x+1}$ aplicando la definición, es decir, mediante un límite.

b) Derivar $y=\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x}$ y simplificar.

c) Ídem: $y=\sqrt{x^2-1}-\sqrt[3]{x^2+1}$

d) Ídem: $y=\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^3$ *(2 puntos)*

www.yoquieroaprobar.es

① $f(x)=\dfrac{4}{x^2-4}$

a) $x^2-4=0\,;\ x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2 \Rightarrow \boxed{Dom(f)=\mathbb{R}-\{\pm 2\}}$ 0.2

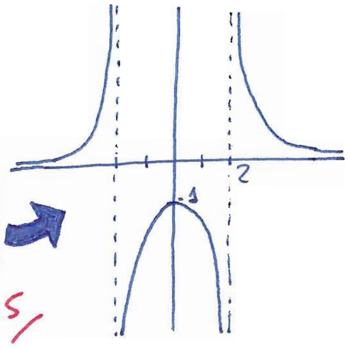
b) $f(-x)=\dfrac{4}{(-x)^2-4}=\dfrac{4}{x^2-4}=f(x) \Rightarrow \boxed{f(x)\ \text{simétrica par}}$ 0.2

c) corte eje x: $y=0 \Rightarrow \dfrac{4}{x^2-4}=0\,;\ 4=0\,!! \Rightarrow \boxed{\text{no corta al eje x}}$ 0.2

corte eje y: $x=0 \Rightarrow y=\dfrac{4}{-4}=-1 \rightarrow (0,-1)$

d)

x	$-\infty \ldots -100 \ldots -6$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	$6 \ldots 100 \ldots \infty$
$y=\dfrac{4}{x^2-4}$	$0^+ \quad 0{,}0004 \ldots 0{,}125$	$0{,}19$	$0{,}\hat{3}$	$0{,}8$	$\nexists$	$-1{,}\hat{3}$	-1	$-1{,}\hat{3}$	$\nexists$	$0{,}8$	$0{,}\hat{3}$	$0{,}19$	$0{,}125 \ldots 0{,}0004 \ldots 0^+$



0.5

e) $Im(f)=(-\infty,-1]\cup(0,\infty)$ 0.1

f) $f(x)$ discontinua en $x=\pm 2$ 0.1

g) $y=\dfrac{1}{3} \Rightarrow \dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{x^2-4}\,;\ x^2-4=12\,;\ x^2=16 \Rightarrow \boxed{x=\pm 4}$ 0.1

h) $\left.\begin{array}{l} f(x)\nearrow \forall x\in(-\infty,-2)\cup(-2,0) \\ f(x)\searrow \forall x\in(0,2)\cup(2,\infty)\end{array}\right\} \Rightarrow M(0,-1)$ 0.2

i) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4}{x^2-4}=\dfrac{4}{0}=\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{4}{(x+2)(x-2)}=\dfrac{4}{4\cdot 0^-}=\dfrac{4}{0^-}=-\infty \\ \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{4}{(x+2)(x-2)}=\dfrac{4}{4\cdot 0^+}=\dfrac{4}{0^+}=\infty\end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 2} f(x)$ 0.3

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4}{x^2-4}=\dfrac{4}{\infty}=0^+ \qquad \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4}{x^2-4}=\dfrac{4}{\infty}=0^+$

j) $y=0$ A.H. ; $x=\pm 2$ A.V. 0.1

TOTAL: $\boxed{2}$

---

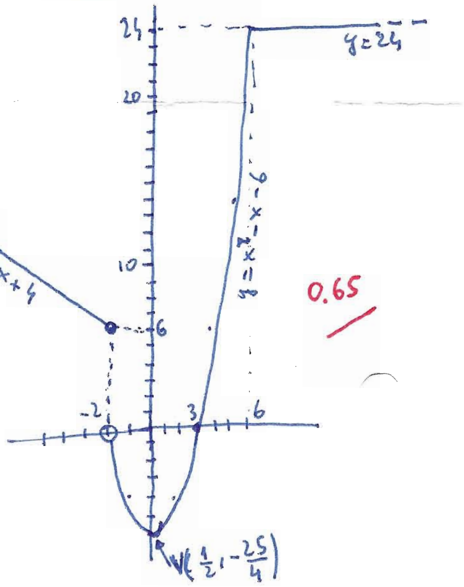
② $f(x)=\begin{cases} -x+4 & \text{si } x\le -2 \\ x^2-x-6 & \text{si } -2<x\le 6 \\ 24 & \text{si } x>6\end{cases}$

a)

x	-3	-2
$y=-x+4$	7	6

vértice $x=\dfrac{1}{2} \Rightarrow y=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}-6=-\dfrac{25}{4}$

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$y=x^2-x-6$	0	-4	-6	-6	-4	0	6	14	24



0.65

b) $Dom(f)=\mathbb{R}\ ;\ Im(f)=\left[-\dfrac{25}{4},\infty\right)$ 0.2

c) corte eje x: $y=0 \xRightarrow{2^a\ \text{rama}} 0=x^2-x-6 \begin{array}{l}\nearrow x_1=-2 \rightarrow (-2,0) \\ \searrow x_2=3 \rightarrow (3,0)\end{array}$ 0.2

corte eje y: $x=0 \Longrightarrow y=-6 \rightarrow (0,-6)$

d) $\left.\begin{array}{l} f(x)\searrow \forall x\in(-\infty,1/2) \\ f(x)\nearrow \forall x\in(1/2,6) \\ f(x)\ \text{cte.}\ \forall x\in(6,\infty)\end{array}\right\}\ m\left(\dfrac{1}{2},-\dfrac{25}{4}\right)$ 0.2

e) $f(x)$ discontinua en $x=-2$ 0.1

f) no tiene asíntotas 0.1

g) $y=14 \xRightarrow{2^a\ \text{rama}} 14=x^2-x-6\,;\ 0=x^2-x-20 \begin{array}{l}\nearrow \boxed{x=5} \\ \searrow x=-4\ \text{descartada viendo la gráfica}\end{array}$ 0.2

$\xRightarrow{1^a\ \text{rama}} 14=-x+4\,;\ \boxed{x=-10}$

h) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-2^-} f(x)=6 \\ \lim\limits_{x\to-2^+} f(x)=0\end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to-2} f(x)$ 0.1

TOTAL: $\boxed{1{,}75}$

---

③ a) $\log_3\dfrac{1}{3\cdot\sqrt[4]{27}}=\cancel{\log_3 1}^{\,0}-\log_3\left(3\cdot\sqrt[4]{27}\right)=-\cancel{\log_3 3}^{\,1}-\log_3\sqrt[4]{27}=-1-\dfrac{1}{4}\cancel{\log_3 27}^{\,3}=-1-\dfrac{3}{4}=\boxed{-\dfrac{7}{4}}$ 0.25

$\log_{1/5}125=x \Rightarrow \left(\dfrac{1}{5}\right)^x=125\,;\ (5^{-1})^x=5^3\,;\ 5^{-x}=5^3 \Rightarrow \boxed{x=-3}$ 0.25

0.25

b) $\log\sqrt{3{,}6}=\dfrac{1}{2}\log\dfrac{36}{10}=\dfrac{1}{2}\left(\log 36-\cancel{\log 10}^{\,1}\right)=\dfrac{1}{2}\left[\log(3^2\cdot 2^2)-1\right]=\dfrac{1}{2}(-1+2\log 3+2\log 2)=\boxed{-\dfrac{1}{2}+\log 2+\log 3}$

c) $\log_x 125 = -3 \Rightarrow x^{-3} = 125$; $\frac{1}{x^3} = 125$; $\frac{1}{125} = x^3 \Rightarrow \boxed{x = 1/5}$ 0.25/

$\boxed{x = \log_3(\log_3 3)} = \log_3 1 = \boxed{0}$ 0.25/

TOTAL: $\boxed{1,25}$

---

④ a) $2^{x-1} \cdot 3^{1-x} = 5^{2x-2}$; $\log(2^{x-1} \cdot 3^{1-x}) = \log 5^{2x-2}$; $\log 2^{x-1} + \log 3^{1-x} = \log 5^{2x-2}$

$(x-1)\log 2 + (1-x)\log 3 = (2x-2)\log 5$; $x\log 2 - \log 2 + \log 3 - x\log 3 = 2x\log 5 - 2\log 5$;

$x(\log 2 - \log 3 - 2\log 5) = \log 2 - \log 3 - 2\log 5$; $\boxed{x = \frac{\log 2 - \log 3 - 2\log 5}{\log 2 - \log 3 - 2\log 5} = 1}$ 0.5/

b) $3^{x-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2x-1}$; $3^{x-1} = (3^{-1})^{-2x-1}$; $3^{x-1} = 3^{2x+1} \Rightarrow x-1 = 2x+1$; $\boxed{-2 = x}$ 0.5/

c) $2^{2x-1} - 16 = 2^{x+1}$; $\frac{2^{2x}}{2} - 16 = 2 \cdot 2^x$; $\frac{1}{2}(2^x)^2 - 2 \cdot 2^x - 16 = 0$; cambio de var: $2^x = t \Rightarrow \frac{t^2}{2} - 2t - 16 = 0$

$t^2 - 4t - 32 = 0$ $\nearrow t = 8 = 2^x \Rightarrow \boxed{x = 3}$ 0.5/
$\searrow t = -4 = 2^x \Rightarrow \nexists$ solución

TOTAL: $\boxed{1,5}$

---

⑤ a) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8} \overset{\frac{\infty}{\infty}\text{ INDET.}}{\sim} \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^3} = \boxed{1}$ 0.25/

b) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8} \overset{\frac{0}{0}\text{ INDET.}}{=} \lim_{x\to 2} \frac{(x+1)\cancel{(x-2)^2}}{(x+2)\cancel{(x-2)^2}} = \boxed{\frac{3}{4}}$ 0.625/

	1	-3	0	4
2		2	-2	-4
	1	-1	-2	$\boxed{0}$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$ $\nearrow 2$ $\searrow -1$

	1	-2	-4	8
2		2	0	-8
	1	0	-4	$\boxed{0}$

$x^2 - 4 = 0$; $x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

c) $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1}\right) \overset{\infty-\infty\text{ INDET.}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2+1})(\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+1}} =$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2}+x - (\cancel{x^2}+1)}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+x} + \sqrt{x^2+1}} \overset{\frac{\infty}{\infty}\text{ INDET.}}{=}$

$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{x} - \frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2}} + \sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 - \frac{1}{x} \to 0}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \boxed{\frac{1}{2}}$ 0.625/

TOTAL: $\boxed{1,5}$

---

⑥ a) $f(x) = \sqrt{x+1}$; $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h+1} - \sqrt{x+1}}{h} \overset{\frac{0}{0}\text{ INDET.}}{=} \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{x+h+1} - \sqrt{x+1})(\sqrt{x+h+1} + \sqrt{x+1})}{h \cdot (\sqrt{x+h+1} + \sqrt{x+1})} =$

$= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h+1) - (x+1)}{h(\sqrt{x+h+1} + \sqrt{x+1})} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}}{\cancel{h}(\sqrt{x+h+1} + \sqrt{x+1})} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h+1} + \sqrt{x+1}} = \boxed{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}$ 0.5/

b) $y = \frac{x^2}{2} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} \longrightarrow y' = \frac{1}{2}2x - 2 \cdot \frac{-2x}{x^4} - \frac{1}{x^2} = \boxed{x + \frac{4}{x^3} - \frac{1}{x^2}}$ 0.5/

c) $y = \sqrt{x^2 - 1} - (x^2+1)^{1/3} \longrightarrow y' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} - \frac{1}{3}(x^2+1)^{-2/3} \cdot 2x = \boxed{\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} - \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+1)^2}}}$ 0.5/

d) $y = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^3 \xrightarrow{u^n} y' = 3\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 \cdot \frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2} = 3\,\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2} \cdot \frac{-2}{(x-1)^2} = \boxed{\frac{-6(x+1)^2}{(x-1)^4}}$ 0.5/

TOTAL: $\boxed{2}$

www.yoquieroaprobar.es