1. **a)** Operar en forma binómica y simplificar: $\dfrac{(3+i)(3-2i)-(2i-3)^2}{2i^{20}-i^{13}}+\dfrac{4}{5i}$

b) Operar en forma polar y pasar el resultado a binómica (para pasar a polar, dibujar previamente los complejos; al pasar a binómica, justificar todos los pasos. No vale usar calculadora):

$$\frac{(\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i)^2\,(-1-i)^4}{(-1+i)^3\,i^7}$$

(2 puntos)

2. Hallar un complejo de argumento 45º tal que sumado a 1+2i dé un complejo de módulo 5

(2 puntos)

3. Hallar el Dom(f) analíticamente:

a) $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2-x-6}$ **b)** $f(x)=\sqrt{x^2-x-6}$ **c)** $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2-x+6}$ **d)** $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+3}{x-2}}$ *(2 puntos)*

4. Dada la función que figura a continuación, se pide: **a)** Dom(f), razonadamente. **b)** Posible simetría. **c)** Posibles cortes con los ejes. **d)** Tabla de valores apropiada y representación gráfica. **e)** Intervalos de crecimiento. Posibles M y m. **f)** Indicar su continuidad. **g)** A la vista de la gráfica, indicar su Im(f) **h)** Ecuación de las posibles asíntotas. **i)** $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)$

$$f(x)=\frac{16-8x}{x^2}$$

(2 puntos)

5. Dada la función que figura a continuación, se pide: **a)** Gráfica **b)** Dom(f) e Im(f) **c)** Posibles cortes con los ejes **d)** Intervalos de crecimiento. Posibles M y m **e)** Continuidad **f)** Ecuación de las posibles asíntotas **g)** $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)$ **h)** Hallar la antiimagen de y=6

$$f(x)=\begin{cases} x+15 & \text{si } x\le -2 \\ x^2-4x+1 & \text{si } -2<x\le 4 \\ -x+7 & \text{si } x>4 \end{cases}$$

(2 puntos)

1 a) $\dfrac{(3+i)(3-2i)-(2i-3)^2}{2i^{20}-i^{13}}+\dfrac{4}{5i}=\dfrac{9-6i+3i+2-(-4-12i+9)}{2-i}+\dfrac{4(-i)}{5i(-i)}=\dfrac{11-3i-5+12i}{2-i}+\dfrac{-4i}{5}=$

$20 \,|\, 4$, resto 0, cociente 5 $\Rightarrow i^{20}=i^0=1$; $13 \,|\, 4$, resto 1, cociente 3 $\Rightarrow i^{13}=i^1$

$=\dfrac{(6+9i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}-\dfrac{4}{5}i=\dfrac{12+6i+18i-9}{4+1}-\dfrac{4}{5}i=\dfrac{3+24i}{5}-\dfrac{4}{5}i=\boxed{\dfrac{3}{5}+4i}$ 0.75 0.25

b) $\sqrt{2}-\sqrt{2}i=2_{315°}$ $\quad$ $r=\sqrt{2+2}=2$ $\quad$ $\alpha=\operatorname{arctg}\dfrac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\operatorname{arctg}(-1)=315°$

$\sqrt{2}_{225°}$ $\quad -1-i$ $\quad$ $r=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$ $\quad$ $\alpha=\operatorname{arctg}\dfrac{-1}{-1}=\operatorname{arctg}1=225°$

$-1+i=\sqrt{2}_{135°}$ $\quad$ $r=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$ $\quad$ $\alpha=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{-1}=\operatorname{arctg}(-1)=135°$

$\Rightarrow \dfrac{(\sqrt{2}-\sqrt{2}i)^2\cdot(-1-i)^4}{(-1+i)^3\cdot i^7}=\dfrac{(2_{315°})^2\cdot(\sqrt{2}_{225°})^4}{(\sqrt{2}_{135°})^3\cdot(1_{90})^7}=$ 0.25

$=\dfrac{4_{630°}\cdot 4_{900°}}{(2\sqrt{2})_{405°}\cdot 1_{630°}}=\dfrac{16_{1530°}}{(2\sqrt{2})_{1035°}}=\left(\dfrac{16}{2\sqrt{2}}\right)_{495°}=\left(\dfrac{16\sqrt{2}}{4}\right)_{135°}=\boxed{(4\sqrt{2})_{135°}}=4\sqrt{2}(\cos 135°+i\,\operatorname{sen}135°)=4\sqrt{2}\left[\cos(180-45°)+i\cdot\operatorname{sen}(180-45°)\right]=$ 0.25

$=4\sqrt{2}(-\cos 45°+i\,\operatorname{sen}45°)=4\sqrt{2}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\boxed{-4+4i}$ 0.5/

2 1er DATO: $\arg z=45° \Rightarrow z$ tiene sus partes real e imaginaria iguales, y positivas (*) $\Rightarrow z=a+ai$, con $a>0$ 0.5

2º DATO: $(a+ai)+(1+2i)=a+1+(a+2)i \xrightarrow{\text{módulo } 5} \sqrt{(a+1)^2+(a+2)^2}=5$; $a^2+2a+1+a^2+4a+4=25$;

$2a^2+6a-20=0$; $a^2+3a-10=0$ $\nearrow a=2 \rightarrow$ soluc: $\boxed{2+2i}$ 1.5/

$\searrow a=-5$ descartado, por (*)

3 a) $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2-x-6}$ (raíces -2 y 3) $\quad \boxed{Dom(f)=\mathbb{R}-\{-2,3\}}$ 0.25/

b) $f(x)=\sqrt{x^2-x-6}$

	$(-\infty,-2)$	$(-2,3)$	$(3,\infty)$
signo x^2-x-6	+	−	+

0.75/ $\Rightarrow \boxed{Dom(f)=(-\infty,-2]\cup[3,\infty)}$

c) $f(x)=\dfrac{x+3}{x^2-x+6}$ ($\nexists$ raíces) $\quad \boxed{Dom(f)=\mathbb{R}}$ pq. el denom. no se anula nunca 0.25/

d) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+3}{x-2}}$ ($x+3 \rightarrow$ raíz -3; $x-2 \rightarrow$ raíz 2)

	$(-\infty,-3)$	$(-3,2)$	$(2,\infty)$
signo $x+3$	−	+	+
signo $x-2$	−	−	+
signo $\frac{x+3}{x-2}$	+	−	+

0.75/ $\Rightarrow \boxed{Dom(f)=(-\infty,-3]\cup(2,\infty)}$

4 $f(x)=\dfrac{16-8x}{x^2}$ **a)** $\boxed{Dom(f)=\mathbb{R}-\{0\}}$ pq. para $x=0$ se anula el denom. 0.15/

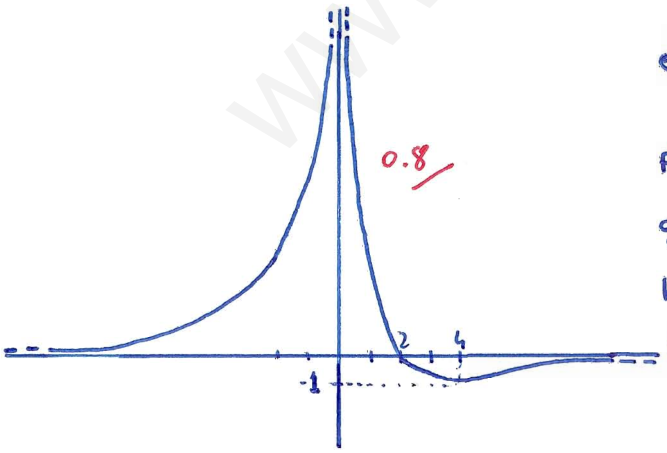
b) $f(-x)=\dfrac{16-8(-x)}{(-x)^2}=\dfrac{16+8x}{x^2}\neq \pm f(x) \Rightarrow$ $\boxed{\text{NO SIMÉTRICA}}$ 0.15/

c) CORTE EJE x: $y=0 \Rightarrow \dfrac{16-8x}{x^2}=0 \Rightarrow 16-8x=0$; $x=2 \rightarrow \boxed{(2,0)}$

CORTE EJE y: $x=0 \Rightarrow y=\dfrac{16}{0}\nexists \Rightarrow$ $\boxed{\text{NO CORTA AL EJE y}}$ 0.15/

d)

x	$-\infty\ldots-100\ldots-8$	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	-0.1	$-0{,}01$	0	$0{,}01$	$0{,}1$	1	2	3	4	5	6	7	$8\ldots100\ldots\infty$
$y=\frac{16-8x}{x^2}$	$0^+ \quad 0{,}0816\ldots1{,}25$	$1{,}49$	$1{,}78$	$2{,}24$	3	$4{,}44$	8	24	1680	160800	$\nexists$	159200	1520	8	0	$-0{,}89$	-1	$-0{,}96$	$-0{,}89$	$-0{,}82$	$-0{,}75\ldots-0{,}08\ldots0^-$



0.8/

e) $f(x)\nearrow \forall x\in(-\infty,0)\cup(4,\infty)$; $f(x)\searrow \forall x\in(0,4)$ $\Rightarrow m(4,-1)$ 0.2/

f) $f(x)$ discontinua en $x=0$ 0.1/

g) $Im(f)=[-1,\infty)$ 0.1/

h) $y=0$ A.H.; $x=0$ A.V. 0.2/

i) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0^+$; $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0^-$ 0.15/

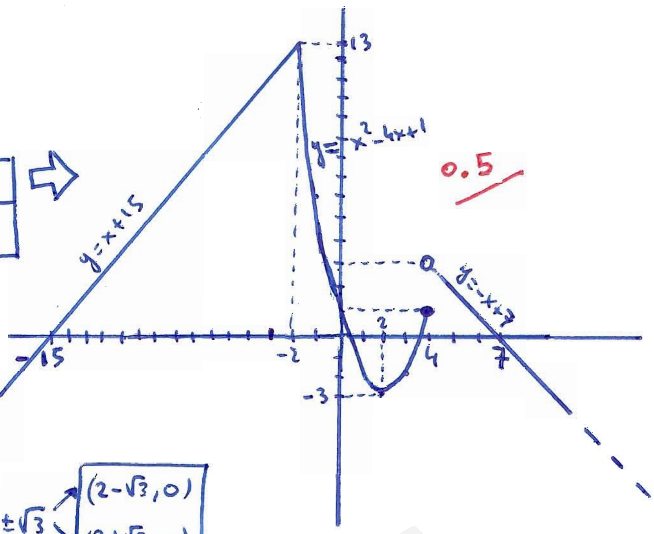
⑤ $f(x)=\begin{cases} x+15 & \text{si } x\leq -2 \\ x^2-4x+1 & \text{si } -2<x\leq 4 \\ -x+7 & \text{si } x>4 \end{cases}$

a)

x	-3	-2
y=x+15	12	13

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$y=x^2-4x+1$	13	6	1	-2	-3	-2	1

x	4	5
y=-x+7	3	2



0.5

b) $\boxed{\begin{array}{l} Dom(f)=\mathbb{R} \\ Im(f)=(-\infty,13] \end{array}}$ 0.2

c) CORTES EJE X: 1ª rama: $x+15=0 \Rightarrow x=-15 \rightarrow \boxed{(-15,0)}$

2ª rama: $x^2-4x+1=0$; $x=\frac{4\pm\sqrt{16-4}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{12}}{2}=\frac{4\pm 2\sqrt{3}}{2}=2\pm\sqrt{3}$ $\boxed{\begin{array}{l}(2-\sqrt{3},0)\\(2+\sqrt{3},0)\end{array}}$

3ª rama: $-x+7=0 \Rightarrow x=7 \rightarrow \boxed{(7,0)}$

CORTE EJE y: $x=0 \rightarrow$ 2ª rama: $y=1 \rightarrow \boxed{(0,1)}$ 0.5

d) $\boxed{\left.\begin{array}{l} f(x)\nearrow \forall x\in(-\infty,-2)\cup(2,4) \\ f(x)\searrow \forall x\in(-2,2)\cup(4,\infty) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} M(-2,13) \\ m(2,-3) \end{array}}$ 0.2

e) $\boxed{f(x) \text{ discontinua en } x=4}$ 0.1

f) ∄ asíntotas pq. las tres ramas son polinómicas 0.1

g) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$ 0.1

h) $y=6 \xrightarrow{1^a \text{ rama}} 6=x+15$; $\boxed{x=-9}$

$\xrightarrow{2^a \text{ rama}} 6=x^2-4x+1$; $0=x^2-4x-5$ $\begin{array}{l} \nearrow \boxed{x=-1} \\ \searrow x=5 \text{ descartado pq. no pertenece al dominio de esa rama} \end{array}$ 0.3