

Calcula, mediante derivada logarítmica las derivadas de:

a) $f(x) = x^x$ con $x > 0$

b) $f(x) = x^{2+\operatorname{sen} x}$ con $x > 0$

a) $\ln(f(x)) = \ln x^x = x \ln x \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln x + 1 \Rightarrow f'(x) = x^x (\ln x + 1)$

b) $\ln(f(x)) = \ln(x^{2+\operatorname{sen} x}) = (2 + \operatorname{sen} x) \ln x \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \cos x \ln x + \frac{2 + \operatorname{sen} x}{x} \Rightarrow f'(x) = x^{2+\operatorname{sen} x} \left(\cos x \ln x + \frac{2 + \operatorname{sen} x}{x} \right)$

Calcula, mediante derivada logarítmica las derivadas de:

a) $f(x) = x^x$ con $x > 0$

b) $f(x) = x^{2+\operatorname{sen} x}$ con $x > 0$

a) $\ln(f(x)) = \ln x^x = x \ln x \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \ln x + 1 \Rightarrow f'(x) = x^x (\ln x + 1)$

b) $\ln(f(x)) = \ln(x^{2+\operatorname{sen} x}) = (2 + \operatorname{sen} x) \ln x \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = \cos x \ln x + \frac{2 + \operatorname{sen} x}{x} \Rightarrow f'(x) = x^{2+\operatorname{sen} x} \left(\cos x \ln x + \frac{2 + \operatorname{sen} x}{x} \right)$

Calcula mediante derivación logarítmica la derivada de las siguientes funciones sin preocuparte del dominio de las funciones que aparecen ni de su signo.

a) $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

c) $f(x) = x^{(x^x)}$

b) $f(x) = (\operatorname{arctg} x)^x$

d) $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2} \sqrt{(x+3)^3}}$

a) $\ln(f(x)) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = x(\ln(x+1) - \ln x)$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln(x+1) - \ln x + \frac{x}{x+1} - 1 \Rightarrow f'(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left(\ln(x+1) - \ln x + \frac{x}{x+1} - 1\right) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left(\ln \frac{x+1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)$$

b) $\ln(f(x)) = \ln((\operatorname{arctg} x)^x) = x \ln(\operatorname{arctg} x)$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \ln(\operatorname{arctg} x) + \frac{x}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x} \Rightarrow f'(x) = (\operatorname{arctg} x)^x \left(\ln(\operatorname{arctg} x) + \frac{x}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}\right)$$

c) $\ln(f(x)) = \ln(x^{(x^x)}) = x^x \ln x$

Por el ejercicio 60 a) sabemos que $(x^x)' = x^x (\ln x + 1)$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = (x^x)' \ln x + \frac{x^x}{x} = x^x (\ln x + 1) \ln x + x^{x-1} \Rightarrow f'(x) = x^{(x^x)} (x^x (\ln x + 1) \ln x + x^{x-1})$$

d) $\ln(f(x)) = \ln\left(\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2} \sqrt{(x+3)^3}}\right) = \frac{1}{2} \ln(x-1) - \frac{2}{3} \ln(x+2) - \frac{3}{2} \ln(x+3)$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{2}{3(x+2)} - \frac{3}{2(x+3)} \Rightarrow f'(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{(x+2)^2} \sqrt{(x+3)^3}} \left(\frac{1}{2(x-1)} - \frac{2}{3(x+2)} - \frac{3}{2(x+3)}\right)$$