1) Calcula los siguientes límites: (1,5 puntos)

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+6x}-\sqrt{x^2+4x}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x+2}{2x^3-x^2-4x+3}$ c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{\frac{x}{2}}$

2). Halla las derivadas de las funciones siguientes: (1 punto)

a) $y=\ln\sqrt{\dfrac{e^x+1}{e^x-1}}$ b) $y=\operatorname{arcsen}\left(x^2-1\right)$

3) Halla la ecuación de la parábola $y=ax^2+bx+c$ que pasa por el punto $A(0,0)$ y es tangente a la recta $y=x-1$ en el punto $B(-1,-2)$. (1 punto)

4) Estudia la continuidad y la derivabilidad de la siguiente función y represéntala gráficamente:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1} & \text{si } x<2\\ 3x-5 & \text{si } 2\le x<4\\ 2 & \text{si } x\ge 4\end{cases}$$ (1,5 puntos)

5) Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x^2-4}$, se pide: (2 puntos)

(a) Dominio y asíntotas.
(b) Intervalos de crecimiento y cálculo de máximos y mínimos.
(c) Representación gráfica.

6). Entre todos los triángulos rectángulos de hipotenusa 8 cm encuentra el de área máxima. (1,5 puntos)

7) Calcula las siguientes integrales: (1,5 puntos)

$\displaystyle\int\frac{2}{\sqrt{16-x^2}}dx$; $\displaystyle\int\frac{x+6}{1+x^2}dx$; $\displaystyle\int 2\cdot\cos(4x)\,dx$

SOLUCIONES

1) a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+6x}-\sqrt{x^2+4x}\right)=(\infty-\infty)=$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+6x}-\sqrt{x^2+4x}\right)\left(\sqrt{x^2+6x}+\sqrt{x^2+4x}\right)}{\left(\sqrt{x^2+6x}+\sqrt{x^2+4x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+6x-x^2-4x}{\left(\sqrt{x^2+6x}+\sqrt{x^2+4x}\right)}=1$$

b) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^3-3x+2}{2x^3-x^2-4x+3}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)(x-1)(x+2)}{(x-1)(x-1)(2x+3)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x+2)}{(2x+3)}=\dfrac{3}{5}$

	1	0	-3	2
1		1	1	-2
	1	1	-2	0
1		1	2	
	1	2	0	

	2	-1	-4	3
1		2	1	-3
	2	1	-3	0
1		2	3	
	2	3	0	

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{\frac{x}{2}}=\left(1^{\infty}\right)=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x+3}{x-1}-1\right)\cdot\frac{x}{2}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4}{x-1}\right)\cdot\frac{x}{2}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4x}{2x-2}}=e^2$

2) a) $y=\ln\sqrt{\dfrac{e^x+1}{e^x-1}}\quad\to y'=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{e^x+1}{e^x-1}}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{e^x+1}{e^x-1}}}\cdot\dfrac{e^x(e^x-1)-(e^x+1)e^x}{\left(e^x-1\right)^2}$

$$y'=\frac{1}{2\dfrac{e^x+1}{e^x-1}}\cdot\frac{e^{2x}-e^x-e^{2x}-e^x}{\left(e^x-1\right)^2}=\frac{-2e^x}{2\left(e^x+1\right)\left(e^x-1\right)}=\frac{-e^x}{e^{2x}-1}$$

b) $y=\operatorname{arcsen}\left(x^2-1\right)\to y'=\dfrac{2x}{\sqrt{1-(x^2-1)^2}}=\dfrac{2x}{\sqrt{-x^4+2x^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{-x^2+2}}$

3) Halla la ecuación de la parábola $y=ax^2+bx+c$ que pasa por el punto $A(0,0)$ y es tangente a la recta $y=x-1$ en el punto $B(-1,-2)$. $\quad y'=2ax+b$

$f(0)=0\Rightarrow 0+0+c=0\Rightarrow c=0$

tangente $y=x-1\Rightarrow f'(-1)=m=1\Rightarrow 2a(-1)+b=1$

pasa por $B(-1,-2)\ \Rightarrow f(-1)=-2\ \Rightarrow a(-1)^2+b(-1)=-2$

$$\left.\begin{array}{l}-2a+b=1\\ a-b=-2\end{array}\right\}\to -a=-1\to a=1\Rightarrow 1-b=-2\to -b=-3\to b=3$$

parábola $y=x^2+3x$

4)

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1} & \text{si } x<2 \;\rightarrow \text{hipérbola, continua y derivable en } (-\infty,2)-\{1\}\\ 3x-5 & \text{si } 2\le x<4 \rightarrow \text{polinómica, continua y derivable en } (2,4)\\ 2 & \text{si } x\ge 4 \;\rightarrow \text{constante, continua y derivable en } (4,+\infty)\end{cases}$$

habrá que estudiar, por tanto, la continuidad y derivabilidad en los puntos 1, 2 y 4

Continuidad en x = 1

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=\text{no existe}\\ \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{1}{0^-}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty\end{array}\right\}\text{discontinuidad de salto infinito en } x=1\rightarrow \text{no derivable}$$

Continuidad en x = 2

$$\left.\begin{array}{l} f(2)=3\cdot 2-5=1\\ \lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{1}{x-1}=1\\ \lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(3x-5)=1\end{array}\right\}\text{continua en x = 2;}\quad f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{(x-1)^2} & \text{si } x<2\\ 3 & \text{si } 2<x<4\\ 2 & \text{si } x>4\end{cases}$$

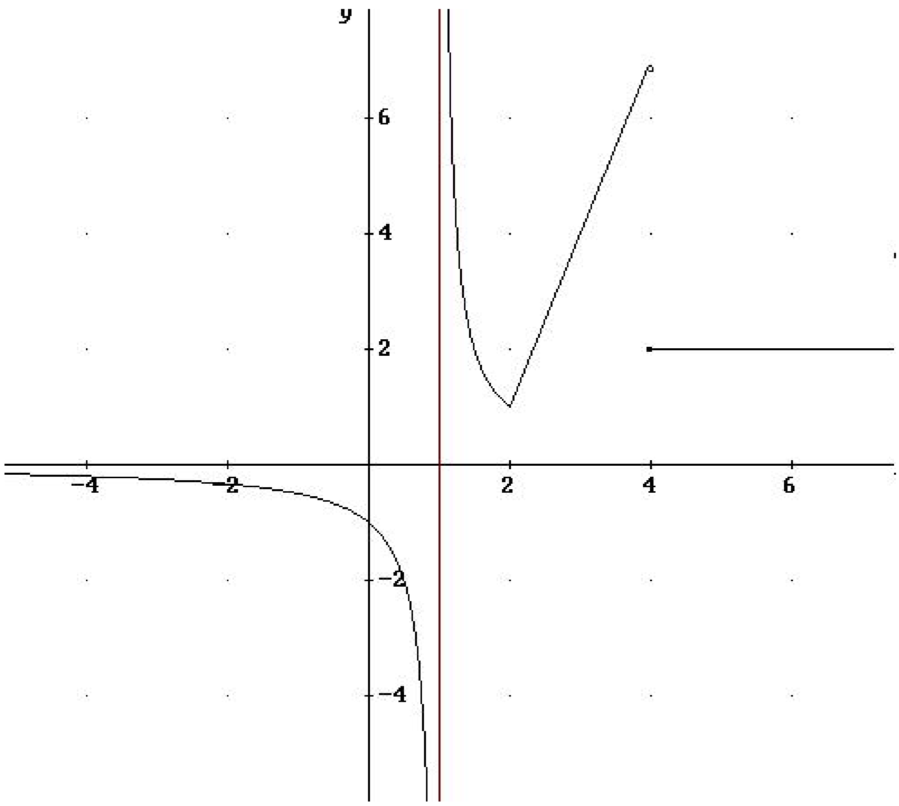
Derivabilidad en x = 2

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-)=-\dfrac{1}{(2-1)^2}=-1\\ f'(2^+)=3\end{array}\right\}\text{No es derivable en x = 2 (derivadas laterales distintas)}$$

Continuidad en x = 4

$$\left.\begin{array}{l} f(4)=2\\ \lim\limits_{x\to 4^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 4^-}(3x-5)=7\\ \lim\limits_{x\to 4^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 4^-}2=2\end{array}\right\}\text{discontinuidad de salto finito en x = 4; no derivable}$$

Continua en $R-\{1,4\}$ y Derivable en $R-\{1,2,4\}$



5) $f(x)=\dfrac{x^2+4}{x^2-4}$

a) Dominio y asíntotas: Función racional, $Dom=R-\{-2,2\}$ Continua en su dominio.

Asíntotas: Verticales:

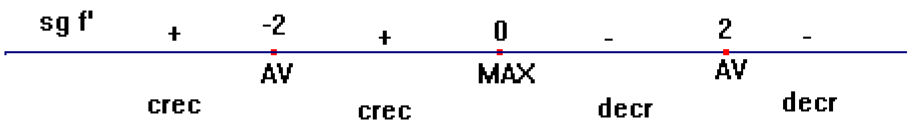
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -2^-}\dfrac{x^2+4}{x^2-4}=\dfrac{4}{0^+}=+\infty\\ \lim\limits_{x\to -2^+}\dfrac{x^2+4}{x^2-4}=\dfrac{1}{0^-}=-\infty\end{array}\right\}x=-2;\qquad \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2+4}{x^2-4}=\dfrac{4}{0^-}=-\infty\\ \lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2+4}{x^2-4}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty\end{array}\right\}x=2$$

Horizontal:

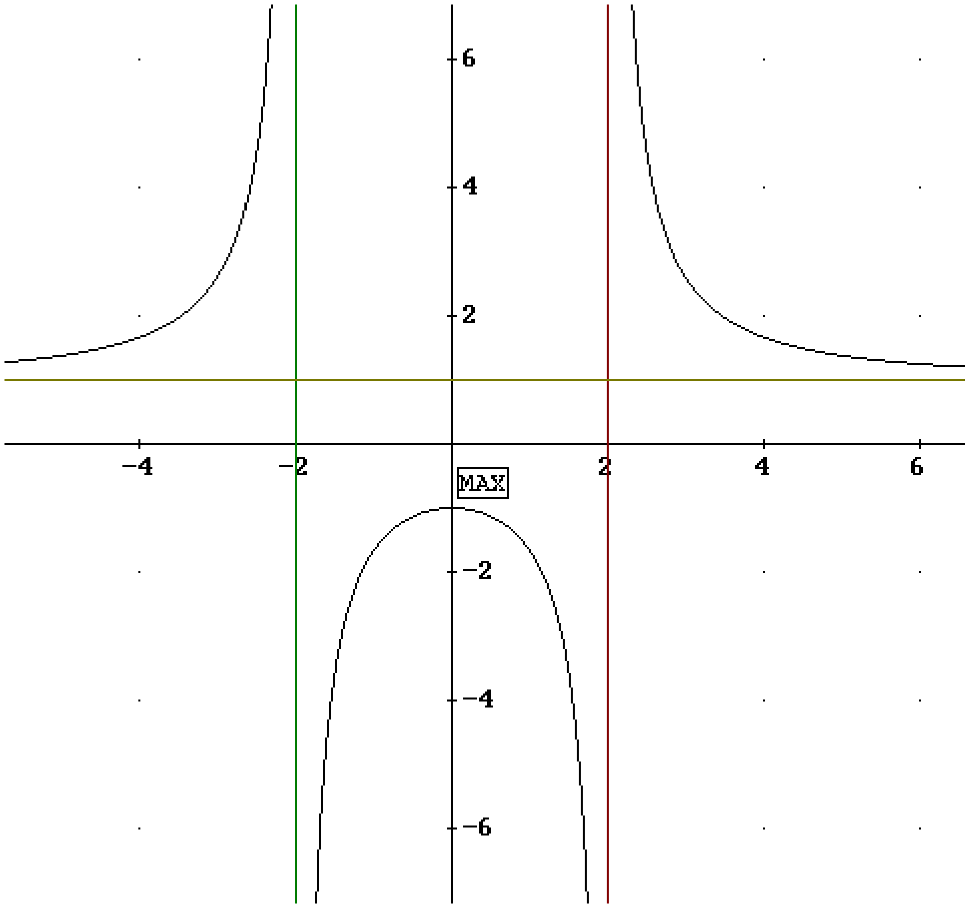
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4}{x^2-4}=1\to y=1$$

b) Intervalos de crecimiento y cálculo de máximos y mínimos.

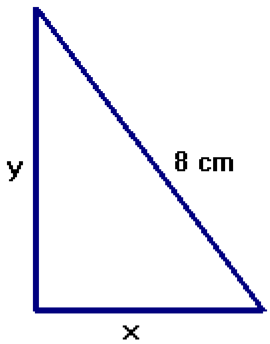
$$f'(x)=\frac{2x(x^2-4)-(x^2+4)2x}{(x^2-4)^2}=\frac{-16x}{(x^2-4)^2}=0\to -16x=0\to x=0$$



c) Representación gráfica



6). Entre todos los triángulos rectángulos de hipotenusa 8 cm encuentra el de área máxima.



$A = \dfrac{x \cdot y}{2}$ pero sabemos que $8^2 = x^2 + y^2$

de donde $y = \sqrt{64 - x^2} \rightarrow f(x) = \dfrac{x \cdot \sqrt{64 - x^2}}{2}$

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{64 - x^2} + \frac{x \cdot (-2x)}{2\sqrt{64 - x^2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{64 - x^2 - x^2}{\sqrt{64 - x^2}}\right)$$

$$\frac{64 - 2x^2}{2\sqrt{64 - x^2}} = 0 \Rightarrow 64 - 2x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{32}$$

La negativa no vale, por ser una longitud , y vemos que para valores de x menores de $\sqrt{32}$ la función derivada es positiva, o sea f es creciente y para valores de x mayores que $\sqrt{32}$ la función derivada es negativa, o sea f es decreciente, con lo que para $x = \sqrt{32}$ el área del triángulo es máxima.

Solución: el área es máxima para $x = \sqrt{32} = y$, es decir cuando el triángulo es rectángulo isósceles de catetos $4\sqrt{2}$ cm

$$7)\ \int \frac{2}{\sqrt{16-x^2}}\,dx = 2\int \frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{\frac{16}{16}-\frac{x^2}{16}}}\,dx = \quad = 2\int \frac{\frac{1}{4}}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{4}\right)^2}}\,dx = 2\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{4}\right)+C$$

$$\int \frac{x+6}{1+x^2}\,dx = \int \frac{x}{1+x^2}\,dx + \int \frac{6}{1+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx + 6\int \frac{1}{1+x^2}\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + 6\operatorname{arctg} x + C$$

$$\int 2\cdot\cos(4x)\,dx = 2\int \cos(4x)\,dx = \frac{2}{4}\int 4\cos(4x)\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen}(4x)+C$$