1.- Halla razonadamente el dominio de las siguientes funciones: (2,5 puntos)

a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2 - 9}}$

b) $g(x) = \ln\left(4 - x^2\right)$

c) $h(x) = \sqrt{\dfrac{3 + x}{2x - 1}}$

2.- Dadas las funciones: $f(x) = \sqrt{x - 2}$ y $g(x) = \dfrac{2x}{x - 1}$

Halla:

a) fog, gof y sus dominios. (1,5 puntos)

b) f^{-1} y g^{-1} y sus dominios (1 punto)

3.- Representa gráficamente y halla el dominio y el recorrido de las funciones:

a) $f(x) = \left|-x^2 + 6x - 5\right|$ b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x - 1} & \text{si } x \leq 2 \\ x + 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ (1,5 puntos cada una)

4.- Dadas las funciones $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ y $g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ (2 puntos)

a) Escribe las características de cada una de ellas.

b) Represéntalas gráficamente en el mismo sistema de referencia.

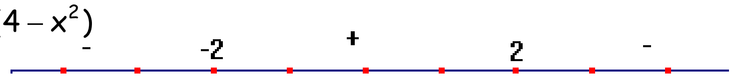
c) ¿Qué relación hay entre ellas?

SOLUCIONES

1.- a) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2-9}}$ la raíz cúbica no tiene problemas, sólo habrá problemas cuando se anule el denominador $\rightarrow x^2-9=0 \Rightarrow x=\pm 3 \rightarrow Dom(f)=R-\{-3,3\}$

b) $g(x)=\ln(4-x^2)$, la función logarítmica tiene dominio $(0,+\infty)$, luego habrá que resolver la inecuación $4-x^2>0 \Rightarrow (2-x)(2+x)>0$

$(4-x^2)$



$\rightarrow Dom(g)=(-2,2)$

c) $h(x)=\sqrt{\dfrac{3+x}{2x-1}}$ tiene que cumplirse $\dfrac{3+x}{2x-1}\geq 0 \rightarrow \left\langle \begin{array}{l} 3+x=0 \Rightarrow x=-3 \\ 2x-1=0 \Rightarrow x=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

$\dfrac{3+x}{2x-1}$

$\rightarrow Dom(h)=(-\infty,-3]\cup\left(\dfrac{1}{2},+\infty\right)$

3.- a) $f(x)=\sqrt{x-2}$ y $g(x)=\dfrac{2x}{x-1}$

$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f\left(\dfrac{2x}{x-1}\right)=\sqrt{\dfrac{2x}{x-1}-2}=\sqrt{\dfrac{2}{x-1}}\rightarrow Dom(f\circ g)=(1,+\infty)$

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g\left(\sqrt{x-2}\right)=\dfrac{2\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}-1}\rightarrow x-2\geq 0 \Rightarrow x\geq 2$

$\sqrt{x-2}-1=0 \Rightarrow \sqrt{x-2}=1 \Rightarrow x-2=1 \Rightarrow x=3 \rightarrow Dom(g\circ f)=[2,3)\cup(3,+\infty)$

b) $f(x)=\sqrt{x-2}\rightarrow y=\sqrt{x-2}\rightarrow x=\sqrt{y-2}\rightarrow x^2=y-2 \Rightarrow f^{-1}(x)=x^2+2$

$\rightarrow Dom(f^{-1})=R$

$g(x)=\dfrac{2x}{x-1}\rightarrow y=\dfrac{2x}{x-1}\rightarrow x=\dfrac{2y}{y-1}\rightarrow xy-x=2y\rightarrow xy-2y=x\rightarrow y(x-2)=x$

$y=\dfrac{x}{x-2}\rightarrow g^{-1}(x)=\dfrac{x}{x-2}\rightarrow Dom(g^{-1})=R-\{2\}$

3.- a) $f(x)=\left|-x^2+6x-5\right|=\begin{cases} -x^2+6x-5 & si\ x<1 \\ x^2-6x+5 & si\ 1\leq x\leq 5 \\ -x^2+6x-5 & si\ x>5 \end{cases}$

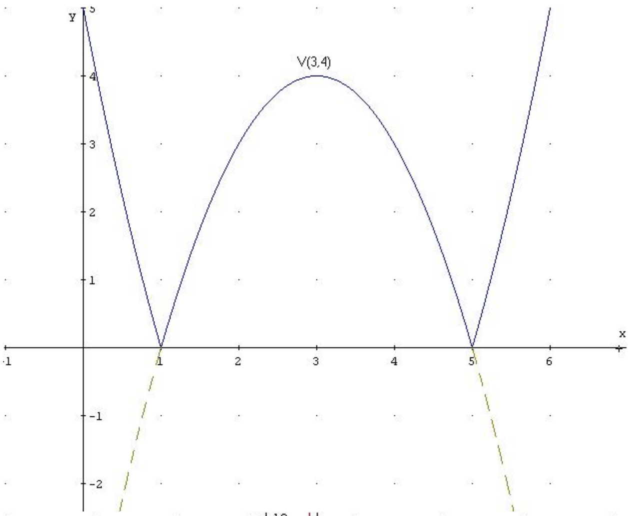
$y=-x^2+6x-5$ parábola, mira hacia abajo.

Vértice $\rightarrow x=-\dfrac{6}{-2}=3\rightarrow V(3,4)$

Corte ejes:

Eje OY $\rightarrow (0,-5)$

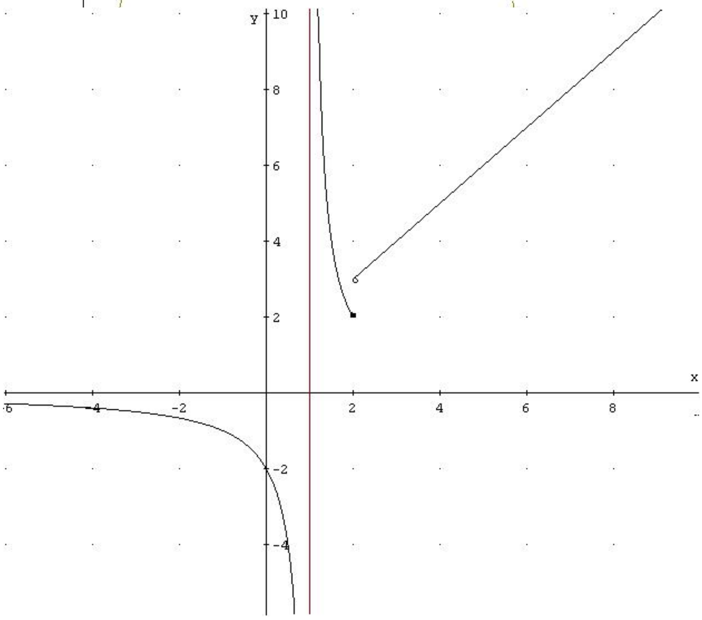
Eje OX $\rightarrow -x^2+6x-5=0 \rightarrow x = \left\langle \begin{matrix} 1 \\ 5 \end{matrix} \right.$



$Dom(f) = R$

$Re\,c(f) = [0,+\infty)$

b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x-1} & si\ x \le 2 \\ x+1 & si\ x > 2 \end{cases}$ la gráfica será un trozo de hipérbola, un segmento y una semirrecta, vamos a dibujarla: La hipérbola tiene la asíntota horizontal en el eje OX y la vertical en $x = 1$, para dibujar la semirrecta le damos un par de valores.



$Dom(g) = R - \{1\}$

$Re\,c(g) = (-\infty,0) \cup [2,+\infty)$

4.- $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$

$Dom = R, \quad Re\,c = (0,+\infty)$

Pasa por $(0,1)$ y $\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$

Es decreciente en su dominio

Asíntota horizontal eje OX (dcha)

$g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

$Dom = (0,+\infty) \quad Re\,c = R$

Pasa por $(1,0)$ y $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$

Es decreciente en su dominio

Asíntota vertical eje OY

Las gráficas de ambas funciones están hechas en el libro de texto.

Estas funciones son INVERSAS o RECÍPROCAS.