

1. Calcula:

(4,5 puntos)

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - x^2}{3x^2 + 5x - 1}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 5x^2 + 11x - 10}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{x^2 - 1}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x-2} \right)^{\frac{1}{x-3}}$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})$$

2. Escribe **razonadamente** y representa gráficamente una función con una discontinuidad evitable en $x = 2$, una asíntota horizontal en $y = -1$ y una asíntota vertical en $x = 1$.
(1,5 puntos)

3. Halla el valor de k para que la siguiente función sea continua en $x = -1$

$$f(x) = \begin{cases} e^{x+1} & \text{si } x \leq -1 \\ kx^2 - 1 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

Para ese valor de k , representa gráficamente la función f y comprueba que es continua.
(2 puntos)

4. Estudia la continuidad de la siguiente función y clasifica sus discontinuidades, si las hay:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+3} & \text{si } x < -2 \\ 3 & \text{si } x = -2 \\ x^2 - 3 & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

(2 puntos)

SOLUCIONES

1. Calcula:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - x^2}{3x^2 + 5x - 1} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x}{x^2} - \frac{x^2}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2} + \frac{5x}{x^2} - \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2}{x} - 1}{3 + \frac{5}{x} - \frac{1}{x^2}} = -\frac{1}{3}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 5x^2 + 11x - 10} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x^2 - 3x + 5)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)}{(x^2 - 3x + 5)} = \frac{2-1}{2^2 - 6 + 5} = \frac{1}{3}$$

Factorizamos: $x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \begin{array}{c|ccc} 2 & 1 & -5 & +11 & -10 \\ 1 & 2 & & 2 & -6 & +10 \\ \hline & & 1 & -3 & +5 & 0 \end{array}$

$$c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{x^2 - 1} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{1-1} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{2})(\sqrt{x+1} + \sqrt{2})}{(x^2 - 1)(\sqrt{x+1} + \sqrt{2})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{2})^2}{(x^2 - 1)(\sqrt{x+1} + \sqrt{2})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x^2 - 1)(\sqrt{x+1} + \sqrt{2})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(x+1)(\sqrt{x+1} + \sqrt{2})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(x+1)(\sqrt{x+1} + \sqrt{2})} = \frac{1}{2(2\sqrt{2})} = \frac{1}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{8}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x-2} \right)^{\frac{1}{x-3}} = (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow 3} \left(1 + \frac{1}{x-2} - 1 \right)^{\frac{1}{x-3}} = \lim_{x \rightarrow 3} \left(1 + \frac{1-x+2}{x-2} \right)^{\frac{1}{x-3}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \left(1 + \frac{3-x}{x-2} \right)^{\frac{1}{x-3}} = \lim_{x \rightarrow 3} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x-2}{3-x}} \right)^{\frac{3-x}{x-2} \cdot \frac{1}{x-3}} \right] = e^{\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3-x}{(x-2)(x-3)}} =$$

$$= e^{\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-1}{(x-2)}} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{x-1})^2}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1 - x+1}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})} = 0$$

2. $x = 1$ Asíntota Vertical, anula el denominador.

$$f(x) = \frac{-(x-2)^2}{(x-1)(x-2)}$$

$y = -1$ Asíntota Horizontal,

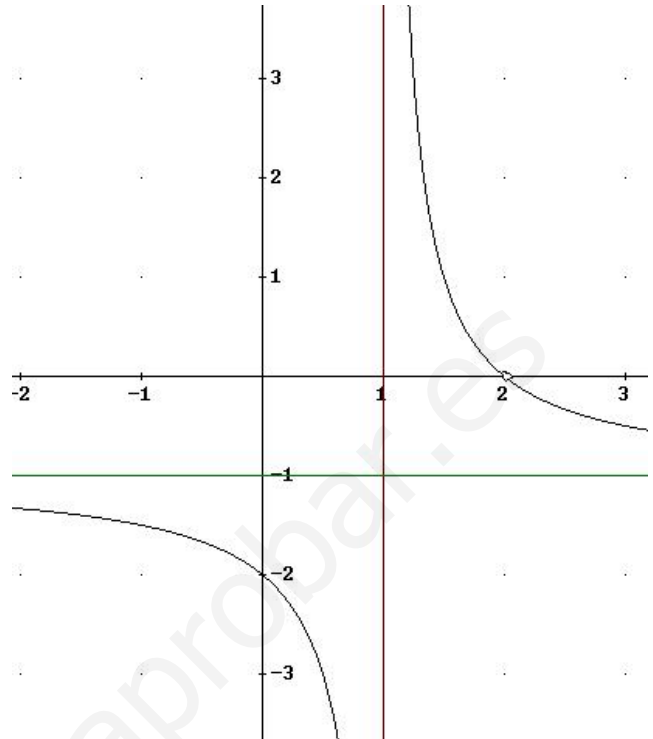
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-(x-2)^2}{(x-1)(x-2)} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-(x-2)^2}{(x-1)(x-2)} = -1$$

discontinuidad evitable en $x = 2$,
ya que no existe $f(2)$, pero si el límite

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x-2)^2}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x+2}{x-1} = 0$$

Gráfica aproximada:



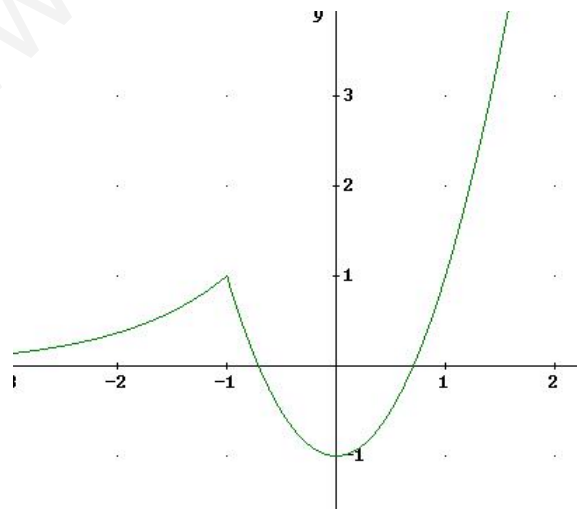
$$3. f(x) = \begin{cases} e^{x+1} & \text{si } x \leq -1 \text{ exponencial, continua} \\ kx^2 - 1 & \text{si } x > -1 \text{ cuadrática, continua} \end{cases}$$

Continuidad en $x = -1$

$$f(-1) = e^{-1+1} = e^0 = 1 \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} e^{x+1} = e^0 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (kx^2 - 1) = k - 1 \end{cases} \rightarrow 1 = k - 1 \rightarrow k = 2$$

$$f(x) = \begin{cases} e^{x+1} & \text{si } x \leq -1 \text{ exponencial, creciente} \\ 2x^2 - 1 & \text{si } x > -1 \text{ parábola, } \cup, \text{ vértice}(0, -1) \end{cases}$$

Gráfica:



$$4. g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+3} & \text{si } x < -2 \rightarrow \text{hipérbola, AV : } x = -3, \text{AH : } y = 0 \\ 3 & \text{si } x = -2 \rightarrow \text{punto}(-2,3) \\ x^2 - 3 & \text{si } x > -2 \rightarrow \text{parábola, } \cup, \text{vértice}(0,-3) \end{cases}$$

Hay problemas, o puede haberlos en $x = -3$ (AV de la hipérbola), y en $x = -2$. En el resto, la función es continua.

Continuidad en $x = -3$:

$$f(-3) = \text{No existe} \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{cases} \quad \text{discontinuidad de salto infinito (AV)}$$

Continuidad en $x = -2$:

$$f(-2) = 2 \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{1} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} (x^2 - 3) = 4 - 3 = 1 \end{cases} \quad \text{discontinuidad evitable}$$