DETERMINACIÓN DE ASÍNTOTAS EN UNA FUNCIÓN

Las **asíntotas** son rectas a las cuales la función se va aproximando indefinidamente, cuando por lo menos una de las variables (x o y) tienden al infinito.

Una definición más formal es:

DEFINICIÓN : Si un punto (x, y) se desplaza continuamente por una función y=f(x) de tal forma que, por lo menos, una de sus coordenadas tienda al infinito, mientras que la distancia entre ese punto y una recta determinada tiende a cero, esta recta recibe el nombre de **asíntota** de la función.

Las asíntotas pueden ser: $\begin{cases} asíntotas \quad verticales \\ asíntotas \quad horizontales \\ asíntotas \quad oblicuas \end{cases}$

ASÍNTOTAS VERTICALES

Las asíntotas verticales son paralelas al eje OY: $\begin{cases} y \to +\infty \\ o \\ y \to -\infty \end{cases}$

Entonces existe un número "a" tal que: $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \quad o \quad \lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ ***A.V.: x=a***

Procedimiento para determinar las asíntotas verticales de una función

1º Determinamos el dominio de la función, pues para los valores de x dónde deja de existir puede tener una asíntota vertical.

2º Si la función deja de existir en x=a, existirá asíntota vertical " x=a " si $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \quad o \quad \lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ **.**

Ejemplo 1: Determina las asíntotas verticales de $y = \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 4}$

1º Determinamos el dominio de la función, pues para los valores de x dónde deja de existir puede tener una asíntota vertical.

Dominio: Función racional fraccionaria no existe si el denominador se anula $x^2 - 4 = 0; \quad x = 2; \quad x = -2$

$D[f(x)] = \Re - \{-2, 2\}$

Luego tiene como posible asíntotas verticales: ¿ **x=2 y x=-2.?**

2° ¿ A.V. en x=2. ? ¿ $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty \quad o \quad \lim_{x\to a} f(x)=-\infty$ **?**

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x}{x^2-4}=\frac{8}{0} \quad hay \quad que \quad hacer \quad límites \quad laterales \begin{cases} \lim_{x\to 2^-}\frac{x^2+2x}{x^2-4}=\frac{8}{-0}=-\infty \\ \lim_{x\to 2^+}\frac{x^2+2x}{x^2-4}=\frac{8}{+0}=+\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x}{x^2-4} \; No \quad existe$$

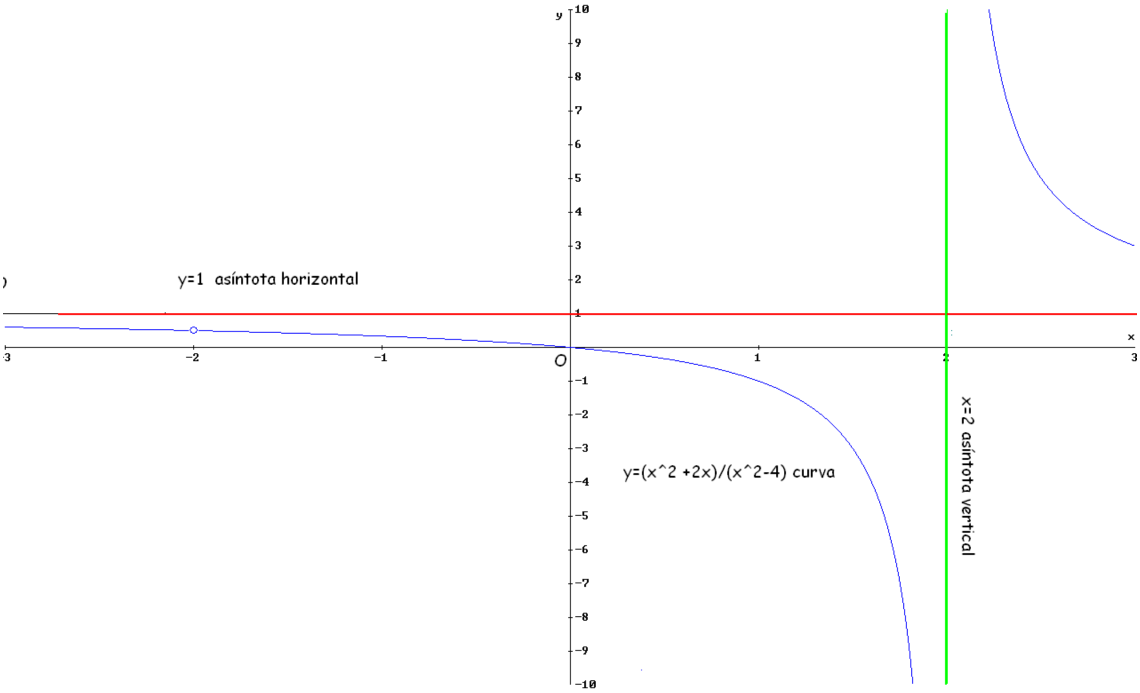
Estos límites nos sirven para determinar que **x=2** es ASÍNTOTA VERTICAL pues $\lim_{x\to 2^-} f(x)=-\infty$ y $\lim_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$ y con ellos también observamos las tendencias de la función (Observar gráfica)

¿ A.V. en x=-2. ? ¿ $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty \quad o \quad \lim_{x\to a} f(x)=-\infty$ **?**

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+2x}{x^2-4}=\frac{0}{0} \quad \Rightarrow \quad \lim_{x\to -2}\frac{x(x+2)}{(x+2)(x-2)}=\lim_{x\to -2}\frac{x}{x-2}=\frac{-2}{-4}=\frac{1}{2}$$

No hay asíntota vertical, en x=-2 la función es discontinua evitable.

Gráfica:



Ejemplo 2: Determina las asíntotas verticales de $y=\frac{x^2}{(x-4)^2}$

1° Determinamos el dominio de la función, pues para los valores de x dónde deja de existir puede tener una asíntota vertical.

Dominio: Función racional fraccionaria no existe si el denominador se anula

$(x-4)^2=0; \quad x=4$

$D[f(x)]=\Re-\{4\}$

Luego tiene como posible asíntota vertical: **¿x=4?**

2º ¿ A.V. en x=4. ? ¿ $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \quad o \quad \lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ **?**

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2}{(x-4)^2} = \frac{4}{+0} = +\infty$$

Este límite nos sirve para determinar que **x=4** es ASÍNTOTA VERTICAL pues $\lim_{x \to 4^-} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \to 4^+} f(x) = +\infty$ con ellos también observamos las tendencias de la función

Ejemplo 3: Determina las asíntotas verticales de $y = \log(-x+4)$

1º Determinamos el dominio de la función, pues para los valores de x dónde deja de existir puede tener una asíntota vertical.

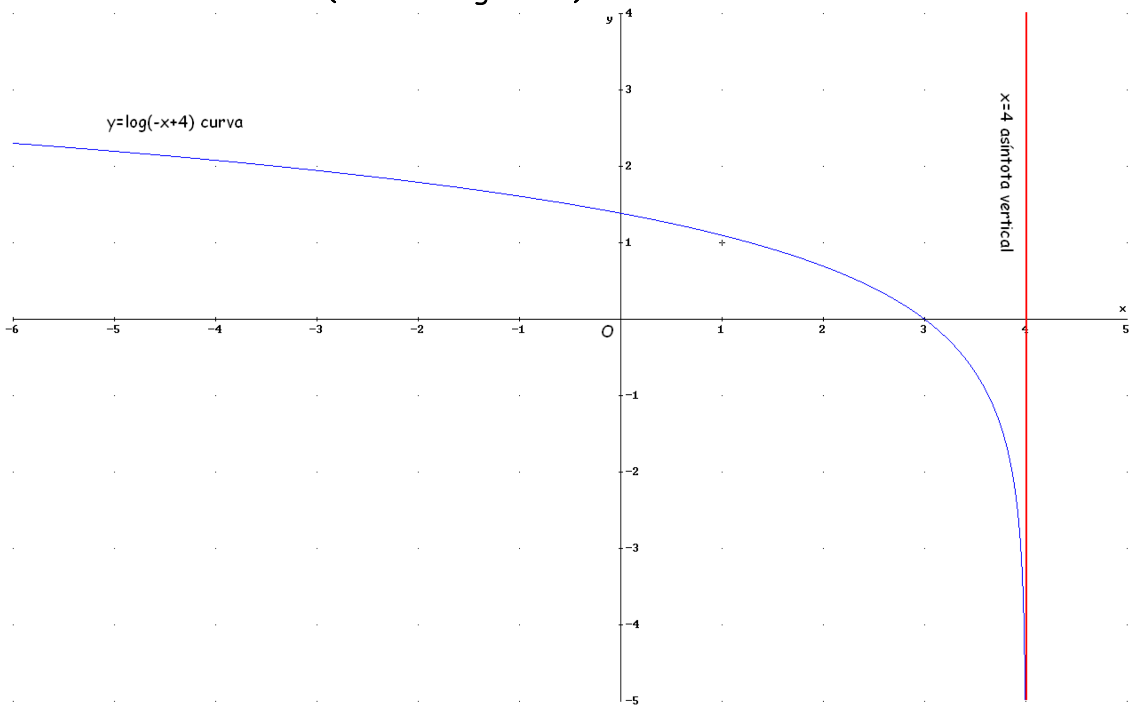
Dominio: Función logarítmica sólo existe si $-x+4>0 \Rightarrow -x > -4 \Rightarrow x < 4$

luego $D[f(x)] = \forall x \in (-\infty, 4)$

Puede tener como asíntota vertical cuando se acerca a la izquierda de x=4

2º ¿ A.V. en x=4. ? ¿ $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \quad o \quad \lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ **?**

$\lim_{x \to 4^-} \log(-x+4) = \log(+0) = -\infty$ Este límite nos sirve para determinar que **x=4** es ASÍNTOTA VERTICAL, pues $\lim_{x \to 4^-} f(x) = -\infty$ y con el también observamos la tendencia de la función (Observar gráfica)



ASÍNTOTAS HORIZONTALES

Las asíntotas horizontales son paralelas al eje OX: $\begin{cases} x \to +\infty \\ o \\ x \to -\infty \end{cases}$

Si existe $\lim_{x\to+\infty} f(x) = k \in \Re \quad o \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = k \in \Re$ ***entonces "y=k" será una asíntota horizontal.***

Procedimiento para determinar las asíntotas horizontales de una función

Se calcula el $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ **y** $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ **si alguno de ellos toma un valor finito "k", existirá asíntota horizontal y=k.**

Nota:

- ***En el caso de funciones del tipo*** $y = \frac{P(x)}{Q(x)} \begin{cases} P(x) & polinomio \\ Q(x) & polinomio \end{cases}$ ***existirá asíntota horizontal si "grado de P(x) ≤ grado de Q(x)". En estos casos:*** $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ **=** $\lim_{x\to-\infty} f(x)$=***k***

- ***En el caso de funciones del tipo exponencial*** $y = a^{f(x)}$ ***existirá asíntota horizontal "y=0" si*** $\begin{cases} 0 < a < 1 & y & f(x) \to +\infty \\ a > 1 & y & f(x) \to -\infty \end{cases}$

- ***Para determinar la posición relativa de la curva y la asíntota "y=k" hacemos lo siguiente:***

	Y_1=f(x)	Y_1- K	Situación relativa de la gráfica y la asíntota
x=100	$y = f(100)$	Y_1- K > 0	La gráfica esta por encima de la asíntota en el $+\infty$
		Y_1- K < 0	La gráfica esta por debajo de la asíntota en el $+\infty$
x=-100	$y = f(-100)$	Y_1- K > 0	La gráfica esta por encima de la asíntota en el $-\infty$
		Y_1- K < 0	La gráfica esta por debajo de la asíntota en el $-\infty$

Ejemplo 4: Determina las asíntotas horizontales de $y = \frac{1-x}{x^2}$

1º Se calcula el $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ **:** $\lim_{x\to+\infty} \frac{1-x}{x^2} \underset{\frac{-\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{-x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x} = \frac{-1}{+\infty} = -0$

El -0 indica que la curva se encuentra por debajo de la asíntota y=0

2º Tenemos dos opciones:

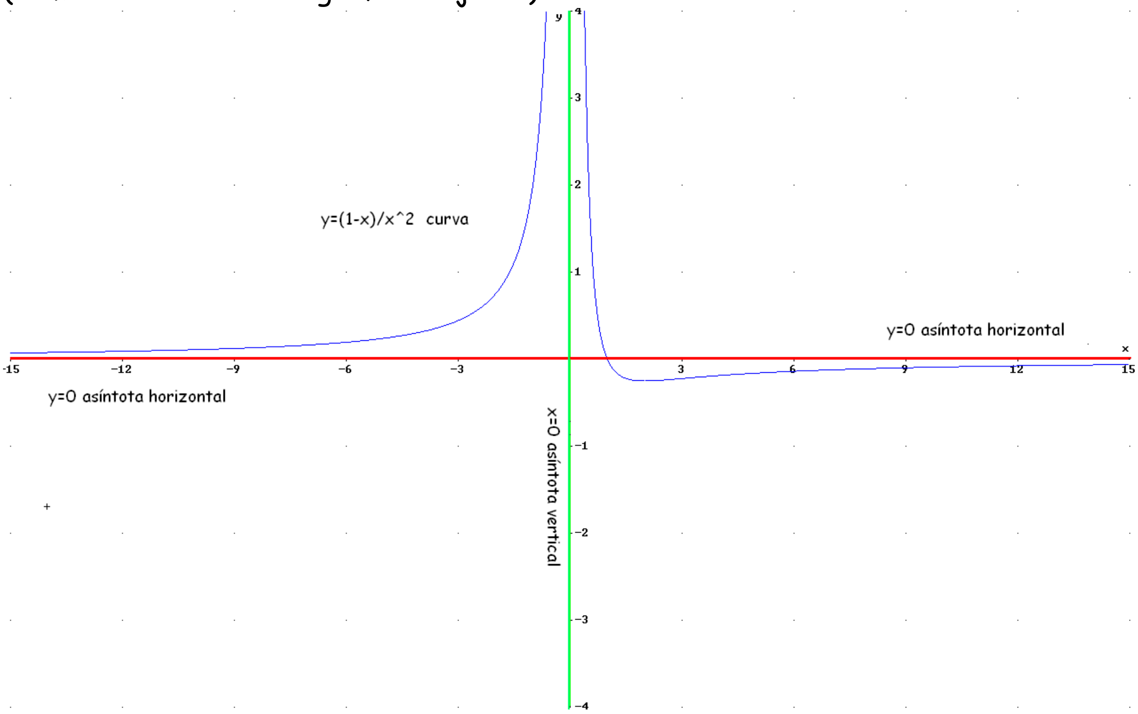
- Calcular $\lim_{x\to-\infty} \frac{1-x}{x^2} \underset{x \ por \ -x}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{1+x}{x^2} \underset{\frac{-\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{+\infty} = +0$

El +0 indica que la curva se encuentra por encima de la asíntota y=0

- O directamente calculamos la posición relativa de la gráfica y la asíntota:

	$y=\dfrac{1-x}{x^2}$	Y_1-k	**Situación relativa de la gráfica y la asíntota**
x=100	$y_1=\dfrac{1-100}{100^2}=-0{,}0099$	-0,0099-0<0	La gráfica esta por debajo de la asíntota en el $+\infty$
x=-100	$y_1=\dfrac{1+100}{(-100)^2}=0{,}0101$	0,0101-0> 0	La gráfica esta por encima de la asíntota en el $-\infty$

(como se observa en la gráfica adjunta)



Ejemplo 5: Determina las asíntotas horizontales de $y=\dfrac{2x^2}{x^2-4}$

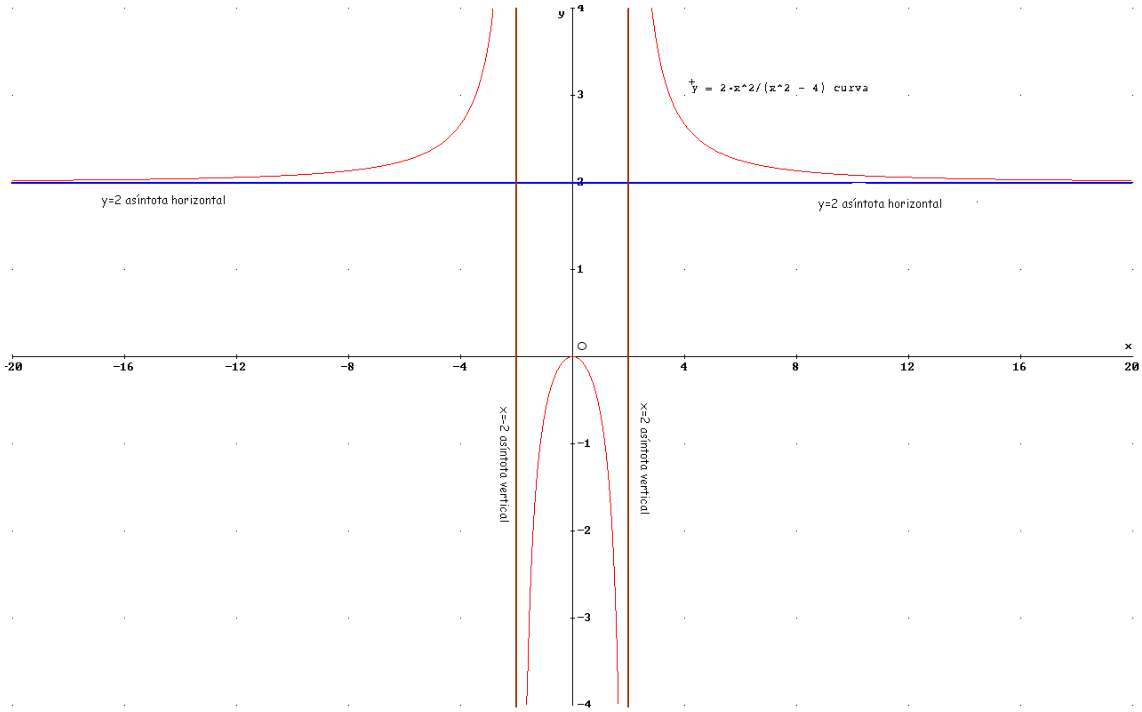
1º Se calcula el $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2}{x^2-4}\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^2}{x^2}=2$ Luego **"y=2"** será una asíntota horizontal.

2º Se determina la posición relativa de la gráfica y la asíntota:

	$y=\dfrac{2x^2}{x^2-4}$	Y_1- 2	**Situación relativa de la gráfica y la asíntota**
x=100	$y=\dfrac{2(100)^2}{(100)^2-4}=$ 2,00080032	2,00080032-2>0	La gráfica esta por encima de la asíntota en el $+\infty$
x=-100	$y=\dfrac{2(-100)^2}{(-100)^2-4}=$ $2{,}00080032>2$	2,00080032-2>0	La gráfica esta por encima de la asíntota en el $-\infty$

(como se observa en la gráfica adjunta)



Ejemplo 6: Determina las asíntotas horizontales de $y = \dfrac{x^2+2x}{x^2-4}$ (ejemplo 1)

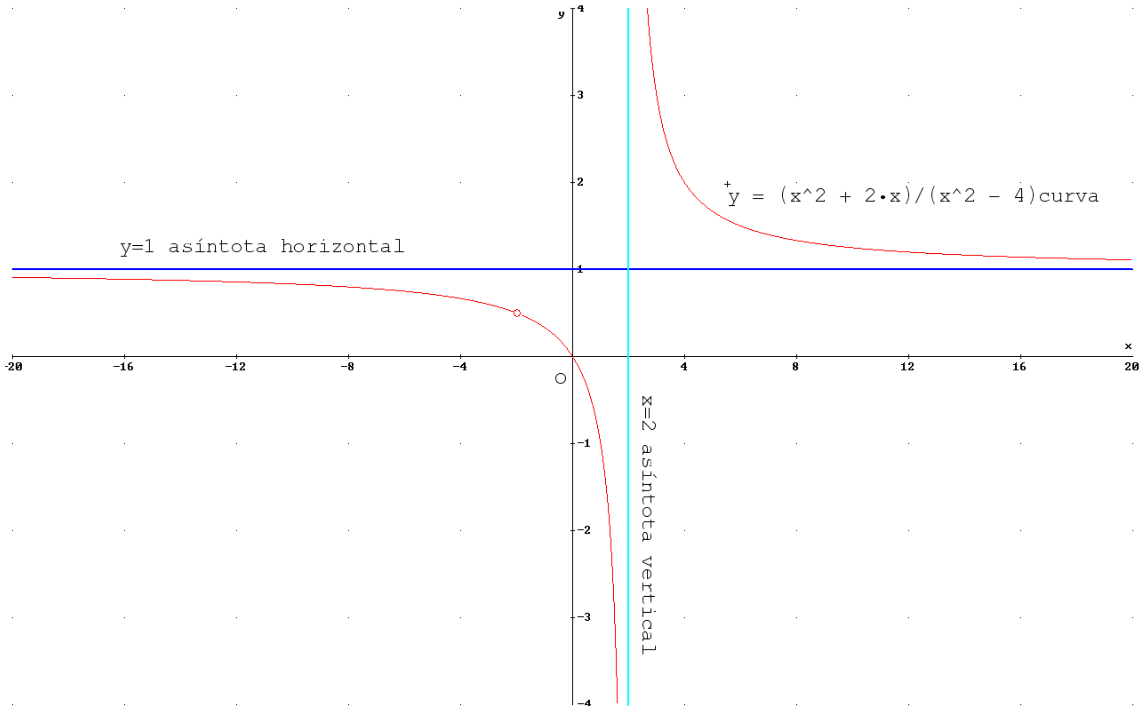
1° Se calcula el $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+2x}{x^2-4} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$ Luego **"y=1"** será una asíntota horizontal.

2° Se determina la posición relativa de la gráfica y la asíntota:

	$y = \dfrac{x^2+2x}{x^2-4}$	$Y_1 - 1$	**Situación relativa de la gráfica y la asíntota**
x=100	$y = \dfrac{(100)^2+2.100}{(100)^2-4} =$ 1,020408163	1,020408163-1>0	La gráfica esta por encima de la asíntota en el $+\infty$
x=-100	$y = \dfrac{(100)^2-2.100}{(100)^2-4} =$ 0,9803921569	0,9803921-1 < 0	La gráfica esta por debajo de la asíntota en el $-\infty$

(como se observa en la gráfica adjunta)



Ejemplo 7: Determina las asíntotas horizontales de $y = \frac{-2x^2 + x - 8}{x^2 + 4}$

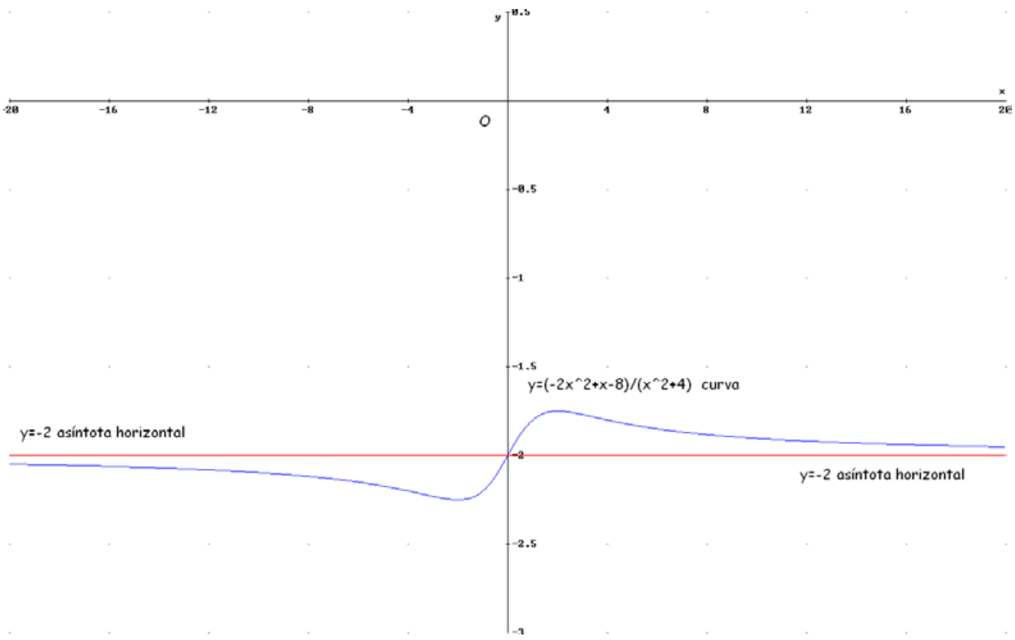
1º Se calcula el $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{-2x^2 + x - 8}{x^2 + 4} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{-2x^2}{x^2} = -2$ Luego **"y=-2"** será una asíntota horizontal.

2º Se determina la posición relativa de la gráfica y la asíntota:

	$y = \frac{-2x^2 + x - 8}{x^2 + 4}$	**Y_1-(-2)**	**Situación relativa de la gráfica y la asíntota**
x=100	$y = \frac{-2.(100)^2 + 100 - 8}{(-100)^2 + 4} = -1{,}990003998$	-1,990003998+2>0	La gráfica esta por encima de la asíntota en el $+\infty$
x=-100	$y = \frac{-2.(-100)^2 - 100 - 8}{(-100)^2 + 4} = -2{,}0099996002$	-2,00999960+2 < 0	La gráfica esta por debajo de la asíntota en el $-\infty$

(como se observa en la gráfica adjunta)



Ejemplo 8: Determina las asíntotas horizontales de $y = 10 + 3^x$.

Nota: *En este caso por no ser una función del tipo* $y = \dfrac{P(x)}{Q(x)} \begin{cases} P(x) & polinomio \\ Q(x) & polinomio \end{cases}$ *hay que calcular* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ *y* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$*:*

1º Se calcula el $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$: $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(10 + 3^x\right) = 10 + 3^{+\infty} = +\infty$ Luego no existe asíntota horizontal en el +∞. (como se observa en la gráfica adjunta)

2º Se calcula el $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$:

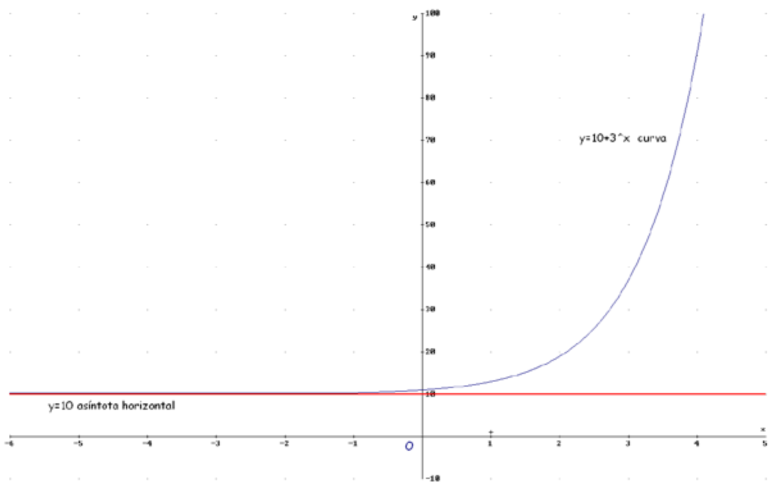
$$\lim_{x \to -\infty} \left(10 + 3^x\right) \underset{(x \quad por \quad -x)}{=} \lim_{x \to +\infty} \left(10 + 3^{-x}\right) = 10 + 3^{-\infty} = 10 + \frac{1}{3^{+\infty}} = 10 + \frac{1}{+\infty} = 10 + 0 = 10$$

Luego **"y=10"** será una asíntota horizontal.

3º Posición relativa de la gráfica y la asíntota.

	$y = 10 + 3^x$	**Y_1-(10)**	**Situación relativa de la gráfica y la asíntota**
x=-100	$y = 10 + 3^{-100}$	$10 + 3^{-100} - 10 > 0$	La gráfica esta por encima de la asíntota en el -∞

(como se observa en la gráfica adjunta)



ASÍNTOTAS OBLICUAS

Son rectas asíntotas a una función del tipo $y = mx + n \quad siendo \quad m \neq 0$
Si una función tiene asíntotas horizontales no tiene oblicuas.

Procedimiento para determinar las asíntotas oblicuas de una función

1º Se calcula m: $m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \in \Re \quad y \quad m \neq 0$ **o** $m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} \in \Re \quad y \quad m \neq 0$

2º Se calcula n: $n = \lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - mx\right) \quad si \quad n \in \Re$ **o** $n = \lim_{x\to-\infty} \left(f(x) - mx\right) \quad si \quad n \in \Re$

Nota:

- ***Si una función tiene asíntotas horizontales no tiene oblicuas.***
- ***En el caso de funciones del tipo*** $y = \frac{P(x)}{Q(x)} \begin{cases} P(x) & polinomio \\ Q(x) & polinomio \end{cases}$ ***existirá asíntota oblicua si "grado de P(x) = grado de Q(x) +1".***
- ***Si m ≠ 0 en el caso de funciones del tipo*** $y = \frac{P(x)}{Q(x)} \begin{cases} P(x) & polinomio \\ Q(x) & polinomio \end{cases}$ ***este valor es el mismo cuando x →+∞ y x →-∞, por lo tanto sólo es necesario calcular el valor cuando x →+∞.***

3º Para determinar la posición relativa de la curva y la asíntota hacemos lo siguiente:

	Y_1=f(x)	Y_2=mx+n	Y_1- Y_2	Situación relativa de la gráfica y la asíntota
x=100	$y_1 = f(100)$	$y_2 = 100m + n$	$Y_1 - Y_2 > 0$	La gráfica esta por encima de la asíntota en el +∞
			$Y_1 - Y_2 < 0$	La gráfica esta por debajo de la asíntota en el +∞
x=-100	$y_1 = f(-100)$	$y_2 = -100m + n$	$Y_1 - Y_2 > 0$	La gráfica esta por encima de la asíntota en el -∞
			$Y_1 - Y_2 < 0$	La gráfica esta por debajo de la asíntota en el -∞

Ejemplo 9: Determina las asíntotas oblicuas de $y = \frac{x^2}{2x-2}$

1º Se calcula **"m"**:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2}{2x-2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2x^2 - 2x} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

- Si m≠0 en el caso de funciones del tipo $y = \frac{P(x)}{Q(x)} \begin{cases} P(x) & polinomio \\ Q(x) & polinomio \end{cases}$ este valor es el mismo cuando x →+∞ y x →-∞ por lo tanto sólo es necesario calcular el valor cuando x →+∞.

Por lo tanto existe una asíntota oblicua $y = \frac{1}{2}x + n \rightarrow \ n = y - \frac{1}{2}x$

2º Se calcula el **"n"**:

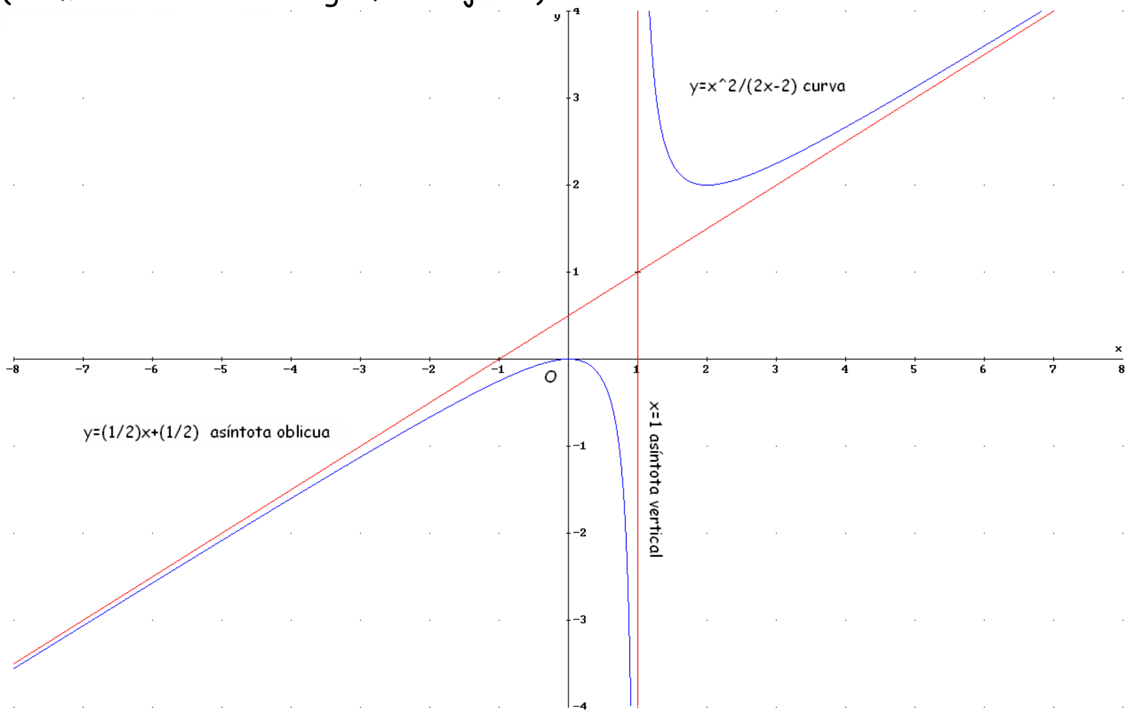
$$n = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2}{2x-2} - \frac{x}{2} \right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x^2 + x}{2(x-1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2x-2} \underset{\frac{\infty}{\infty}}{=} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$$

Luego " $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ " será una asíntota oblicua.

Para determinar la posición relativa de la curva y la asíntota hacemos lo siguiente:

	$y=\frac{x^2}{2x-2}$	$y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$	Y_1- Y_2	situación
x=100	$y_1=\frac{100^2}{2.100-2}=$ 50,505050...	$y_2=\frac{100}{2}+\frac{1}{2}$ $=50,5$	$50,505050....-50,5>0$	La gráfica esta por encima de la asíntota en el $+\infty$
x=-100	$y_1=\frac{(-100)^2}{2.(-100)-2}=$ $-49,5049505...$	$y_2=\frac{-100}{2}+\frac{1}{2}$ $=-49,5$	- $-49,5049505-(-49,5)<0$	La gráfica esta por debajo de la asíntota en el $-\infty$

(como se observa en la gráfica adjunta)



Ejemplo 10: Determina las asíntotas oblicuas de $y=\frac{x^3}{x^2+9}$

1° Se calcula **"m"**:

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^3}{x^2+9}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^3+9x}=1$$

- Si m≠0 en el caso de funciones del tipo $y=\frac{P(x)}{Q(x)}\begin{cases}P(x) & polinomio\\ Q(x) & polinomio\end{cases}$ este valor es el mismo cuando x →+∞ y x →-∞ por lo tanto sólo es necesario calcular el valor cuando x →+∞.

Por lo tanto existe una asíntota oblicua y = x+n → n = y -x

2° Se calcula el **"n"**:

$$n=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+9}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-9x}{x^2+9}\underset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{-9x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-9}{x}=-0$$

Luego **"y=x"** será una asíntota oblicua.

Para determinar la posición relativa de la curva y la asíntota hacemos lo siguiente:

	$y=\frac{x^3}{x^2+9}$	Y=x	$Y_1 - Y_2$	situación
x=100	$y_1 = \frac{100^3}{100^2+9} =$ 99,91008093	$y_2 = 100$	$99{,}91008093 - 100 < 0$	La gráfica esta por debajo de la asíntota en el +∞
x=-100	$y_1 = \frac{(-100)^3}{(-100)^2+9}$ $-99{,}91008093$	$y_2 = -100$	- $-99{,}91008093 - (-100) > 0$	La gráfica esta por encima de la asíntota en el -∞

(como se observa en la gráfica adjunta)