Cinemática: Elementos del movimiento

1. Una partícula con velocidad cero, ¿puede tener aceleración distinta de cero? Y si su aceleración es cero, ¿puede cambiar el módulo de la velocidad?

2. La ecuación de un movimiento es

$$\vec{r} = (4t^2 + 6t + 5) \cdot \vec{i}$$

   Indica si la aceleración es:

   a) Nula.
   b) Variable.
   c) $8\vec{i}$
   d) $4\vec{j}$

3. En la figura se representa el movimiento de una partícula. En el instante t_1 dicha partícula se encuentra en P_1, mientras que en t_2 ya está en P_2. ¿Cuáles de las siguientes expresiones representan la velocidad media?

   a) $\frac{d(P_1,P_2}{t_2-t_1}$
   b) $\frac{\vec{r_2}-\vec{r1}}{t_2-t_1}$
   c) $\frac{\vec{P_1P_2}}{t_2-t_1}$

4. Si la trayectoria de un movimiento es una recta, la aceleración es $\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u_t}$, donde $\vec{u_t}$ es el vector unitario según la tangente a la trayectoria. ¿Por qué?

5. El vector de posición de un móvil en función del tiempo t es $\vec{r}(t) = 5t\vec{i} + 2t^2\vec{j}$ (m). Calcula:

   a) La velocidad media entre los instantes $t_1 = 0$ y $t_2 = 3s$.
   b) La velocidad instantánea en función de t.
   c) El módulo de la velocidad instantánea.
   d) El vector unitario tangencial a la trayectoria.

6. Un movimiento en el plano xy queda descrito por las siguientes ecuaciones paramétricas:

$$x = t^2 + 2$$

$$y = t^2 - 1$$

   Determina:

   a) la ecuación de la trayectoria;
   b) la velocidad instantánea;
   c) la aceleración del móvil.

7. La posición de una partícula en el plano viene dada por la ecuación vectorial:

$$\vec{r}(t) = (t^2 - 4)\vec{i} + (t + 2)\vec{j}$$

En unidades del S.I. calcula:

a) La posición del móvil para t = 2s y t = 4s.

b) La velocidad instantánea para t = 1s.

c) La aceleración instantánea e indica qué tipo de movimiento es.

8. La velocidad de un móvil que circula en línea recta es $\vec{v}(t) = (t^2 - 3)\vec{i}\ (m/s)$. Determina:

a) El vector aceleración instantánea en t = 1s y su módulo.

b) Las componentes intrínsecas de la aceleración.

9. El vector de posición de una partícula móvil es

$$\vec{r} = (3t^2 + 1)\vec{i} + (4t^2 + 2)\vec{j}$$

en donde $\vec{r}$ se mide en metros y t en segundos. Calcula:

a) La velocidad media en el intervalo 2 y 4s.

b) La velocidad en cualquier instante.

c) La velocidad para t = 0.

d) La aceleración en cualquier instante.

e) La aceleración tangencial en cualquier instante.

f) La aceleración normal en cualquier instante.

g) Ecuación de la trayectoria y tipo de movimiento.

10. El vector de posición de una partícula viene dado por

$$\vec{r} = R\ sen\ \omega t\vec{i} + R\ cos\ \omega t\vec{j}$$

donde R está en metros y t en segundos; ω es la velocidad angular de la partícula. Calcula:

a) el vector velocidad de la partícula, en cualquier instante y su módulo;

b) la aceleración en cualquier instante y su módulo;

c) las componentes instrínsecas de la aceleración;

d) ¿Qué trayectoria describe esta partícula?

11. Un asteroide entra en el campo gravitatorio terrestre con una velocidad cuyo módulo cambia con el tiempo según la ley $v(t) = 3 + 7t$, en unidades S.I.

a) Calcula su aceleración tangencial.

b) Si la curva que describe tiene un radio de curvatura de 275 m., halla la aceleración normal del asteroide y el módulo de su aceleración instantánea en t= 3s.

SOLUCIONES

Cinemática: Elementos del movimiento

1.1. Solución:

a) En el primer caso la respuesta correcta es afirmativa, ya que puede tratarse de un movimiento acelerado, pero en el que cambia el sentido del movimiento. Éste sería el caso de un cuerpo que se lanza verticalmente y hacia arriba, en el punto más alto de su trayectoria su velocidad es nula, pero tiene aceleración (a = -g).

b) Sin embargo, en este caso, la respuesta es negativa, porque si la aceleración es cero, no existen cambios con respecto al tiempo en el módulo y en la dirección de la velocidad.

1.2. Solución:

Para poder responder debemos calcular la expresión del vector aceleración, y sólo podremos hacerlo derivando dos veces el vector de posición, ya que la velocidad es la derivada del vector de posición, y la aceleración, la derivada del vector velocidad, en ambos casos respecto al tiempo.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = (8t + 6)\vec{i}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 8\vec{i}$$

Por lo tanto, la respuesta correcta es la c).

1.3. Solución:

La velocidad media es un vector que tiene la misma dirección que el desplazamiento, su módulo nos da idea de la rapidez con que se ha producido el cambio de posición. Se calcula como el cociente entre el vector desplazamiento y el tiempo en el que se produce ese cambio de posición

$$\vec{v_M} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r_2} - \vec{r_1}}{t_2 - t_1}$$

por lo tanto será correcta la respuesta b). Pero también es correcta la respuesta c), ya que $\vec{P_1P_2}$ no es más que el vector desplazamiento

$$\vec{v_M} = \frac{\vec{P_1P_2}}{t_2 - t_1}$$

1.4. Solución:

En un movimiento rectilíneo, el vector velocidad no cambia de dirección por ello la componente del vector aceleración que nos indica esos cambios (la componente normal) no existe, es nula. Vamos a demostrarlo:

$$\vec{v} = v\vec{u_t} \longrightarrow \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\vec{u_t}$$

Si derivamos ese producto nos queda

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u_t} + v\frac{d\vec{u_t}}{dt}$$

y $\frac{d\vec{u_t}}{dt} = 0$, ya que sería la derivada de una constante al mantener el vector unitario continuamente la misma dirección. Por ello $\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u_t}$.

1.5. Solución:

a) La velocidad media se define como el cociente entre el vector desplazamiento y el tiempo en que éste sucede. Por lo tanto, tendrá siempre la dirección del desplazamiento

$$\vec{V_M} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

y su módulo nos indica la rapidez con que se ha producido el cambio de posición.

$$\Delta\vec{r} = \vec{r_2} - \vec{r_1}$$

$$\vec{r_2}(t = 3s) = 5 \cdot 3\vec{i} + 2 \cdot 3^2\vec{j} = 15\vec{i} + 18\vec{j}\ (m)$$

$$\vec{r_1}(t = 0s) = 5 \cdot 0\vec{i} + 2 \cdot 0\vec{j} = 0$$

$$\vec{V_M} = \frac{15\vec{i} + 18\vec{j} - (0\vec{i} + 0\vec{j})}{3 - 0} = 5\vec{i} + 6\vec{j}\ (m/s^2)$$

b) La velocidad instantánea se define como el límite de la velocidad media cuando Δt tiende a cero, es decir, es la derivada del vector posición con respecto al tiempo:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\vec{v} = 5\vec{i} + 4t\vec{j}\ (m/s)$$

c) El módulo de la velocidad se calcula como el de cualquier vector, la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de cada una de las componentes

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{5^2 + (4t)^2} = \sqrt{25 + 16t^2}\ (m/s)$$

d) Como el vector velocidad siempre es tangente a la trayectoria y recordando cómo se calcula el vector unitario (o lo que es lo mismo, cómo se normaliza un vector)

$$\vec{u_t} = \frac{\vec{v}}{v} = \frac{5\vec{i} + 6\vec{j}}{\sqrt{25 + 16t^2}}$$

$$\vec{u_t} = \frac{5}{\sqrt{25 + 16t^2}}\vec{i} + \frac{6}{\sqrt{25 + 16t^2}}\vec{j}$$

1.6. Solución:

a) La ecuación de la trayectoria es una relación entre las coordenadas del móvil en la que ya no figura el tiempo. Es decir, de las ecuaciones paramétricas eliminamos el tiempo y buscamos y = y(x), (y en función de x).

$$x = t^2 + 2$$

$$y = t^2 - 1 \Longrightarrow t^2 = y + 1 \Longrightarrow x = (y + 1) + 2$$

$$x = y + 3 \Longrightarrow y = x - 3$$

De esta ecuación podemos deducir que la trayectoria es rectilínea.

b) La velocidad instantánea es la derivada del vector de posición respecto al tiempo

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

y el vector de posición en este caso es

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = (t^2 + 2)\vec{i} + (t^2 - 1)\vec{j}$$

$$\vec{v} = 2t\vec{i} + 2t\vec{j} \quad (m/s)$$

c) La aceleración nos informa de los cambios que seq producen en el vector velocidad a lo largo del tiempo y se obtiene como el límite de la aceleración media cuando Δt tiende a cero, es decir, la derivada del vector velocidad con respecto al tiempo:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j} \quad (m/s^2)$$

De los apartados a) y c) podemos deducir que el movimiento es rectilíneo y uniformemente acelerado, ya que la aceleración es constante, no varía con el tiempo.

1.7. Solución:

a) De la ecuación vectorial hallamos la posición en el instante requerido con tal de sustituir t por el valos que nos indican.

$$\vec{r}(t = 2s) = (2^2 - 4)\vec{i} + (2 + 2)\vec{j} \Longrightarrow \vec{r}(t = 2s) = 4\vec{j}(m)$$

$$\vec{r}(t = 4s) = (4^2 - 4)\vec{i} + (4 + 2)\vec{j} \Longrightarrow \vec{r}(t = 4s) = 12\vec{i} + 8\vec{j}(m)$$

b) La velocidad instantánea se halla derivando el vector de posición con respecto al tiempo, ya que la velocidad no es más que la variación de la posición a lo largo del tiempo

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 2t\vec{i} + \vec{j}(m/s)$$

y ahora bastará con sustituir por el instante indicado

$$\vec{v}(t = 1s) = 2\vec{i} + \vec{j}(m/s)$$

c) La aceleración se halla derivando el vector velocidad a lo largo del tiempo (o bien derivando dos veces el vector posición con respecto al tiempo)

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 2\vec{i}(m/s^2)$$

y para calcularla en el instante requerido sería necesario, como siempre, sustituir por el valor indicado, aunque en este caso, al no depender del tiempo, será constante, será por tanto un movimiento uniformemente acelerado.

1.8. Solución:

a) Para calcular el vector aceleración debemos derivar el vector velocidad respecto del tiempo, y después en la expresión que hallamos, sustituir el tiempo por el valor que nos facilitan.

La aceleración se define como la variación del vector velocidad a lo largo del tiempo, por ello, siempre que exista una variación de la velocidad, ya sea en módulo o en dirección, existe una aceleración.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Longrightarrow \vec{a}(t) = 2t\vec{i} \quad (m/s^2)$$

$$\vec{a}(t = 1s) = 2\vec{i} \quad (m/s^2)$$

Para conocer su módulo, basta con observar la expresión $a = 2t\ m/s^2 \qquad a(t = 1s) = 2\ m/s^2$

b) El vector velocidad podemos reescribirlo en función del vector unitario

$$\vec{v} = v\vec{u_t}$$

y si hallamos ahora el vector aceleración (aplicamos la derivada de un producto)

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\vec{u_t}) = \frac{dv}{dt}\vec{u_t} + v\frac{d\vec{u_t}}{dt}$$

y así hemos obtenido las componentes intrínsecas del vector aceleración:

- $\vec{a_t} = \frac{dv}{dt}\vec{u_t}$: llamada componente **tangencial** de la aceleración, cuya dirección es tangente a la trayectoria (como indica el vector unitario). El módulo de esta componente de la aceleración es $\frac{dv}{dt}$, y por lo tanto nos informa de los cambios, de la variación del módulo de la velocidad.
- $\vec{a_N} = v\frac{d\vec{u_t}}{dt} = \frac{v^2}{R}\vec{u_N}$: llamada componente **normal** de la aceleración, ya que su dirección es perpendicular (normal) a la tangente en ese punto a la trayectoria. El módulo de esta componente nos indica la variación en la dirección de la velocidad.

En nuestro caso particular $\vec{a_N} = 0$, ya que la trayectoria es una recta, no hay cambios en la dirección del vector velocidad.

Para calcular la componente tangencial debemos conocer primero el módulo de la velocidad, que en nuestro caso es muy sencilla:

$$v = t^2 - 3$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = 2t$$

que evidentemente coincide con el módulo de la aceleración instantánea.

1.9. Solución:

a) La velocidad media nos proporciona información a propósito de la rapidez con que se produce un cambio de posición. Se calcula

$$\vec{v_M} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r_2} - \vec{r_1}}{\Delta t}$$

y tendrá, por lo tanto, siempre la dirección del vector desplazamiento.

$$\vec{r_1}(t = 2s) = (3 \cdot 2^2 + 1)\vec{i} + (4 \cdot 2^2 + 2)\vec{j} = 13\vec{i} + 18\vec{j}$$

$$\vec{r_2}(t = 4s) = (3 \cdot 4^2 + 1)\vec{i} + (4 \cdot 4^2 + 2)\vec{j} = 49\vec{i} + 66\vec{j}$$

$$\vec{v_M} = \frac{49\vec{i} + 66\vec{j} - (13\vec{i} + 18\vec{j})}{4 - 2} = 18\vec{i} + 24\vec{j}(m/s)$$

b) La velocidad instantánea nos da una medida de la rapidez con que se produce el movimiento en cada momento, en cada instante. Se calcula hallando la derivada del vector de posición con respecto al tiempo.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = 6t\vec{i} + 8t\vec{j} \quad (m/s)$$

c) Sólo debemos sustituir t por el valor indicado, $\vec{v}(t = 0) = 0m/s$, por lo tanto parte del reposo.

d) La aceleración instantánea es la derivada del vector velocidad con respecto al tiempo y nos permite conocer la rapidez con que se producen los cambios en la velocidad, ya sea en el móduloo en la dirección de este vector.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 6\vec{i} + 8\vec{j} \quad (m/s^2)$$

e) La aceleración tangencial nos proporciona el cambio en el módulo de la velocidad y posee siempre la misma dirección que la velocidad.

$$a_t = \frac{dv}{dt}$$

Debemos conocer el valor del módulo de la velocidad para poder hallar así a_t.

$$v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2} = \sqrt{(6t)^2 + (8t)^2} = \sqrt{36t^2 + 64t^2} = \sqrt{100t^2}$$

$$v = 10t$$

y ahora ya podemos derivar

$$a_t = \frac{d}{dt}(10t) = 10m/s^2$$

f) La aceleración normal es un vector cuyo módulo es igual a cociente entre el cuadrado de la velocidad instantánea y el radio de curvatura, su dirección es normal a la trayectoria y sentido hacia el centro de curvatura. Esta componente nos informa de los cambios en la dirección de la velocidad.

$$a_N = \frac{v^2}{R}$$

pero en este caso no conocemos el radio de curvatura. No obstante, sabemos que

$$\vec{a} = \vec{a_t} + \vec{a_N}$$

$$a^2 = {a_t}^2 + {a_N}^2 \Longrightarrow {a_N}^2 = a^2 - {a_t}^2$$
$$a_N = \sqrt{a^2 - {a_t}^2}$$

y de apartados anteriores deducimos que

$$a = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10m/s^2$$

$$a_t = 10m/s^2$$

$$a_N = \sqrt{(10)^2 - (10)^2} = 0$$

como podemos observar, al ser $a_N = 0$, la trayectoria ha de ser **rectilínea**.

g) En este apartado vamos a comprobar esta afirmación, tratando de encontrar esta relación

$$y = y(x)$$

es decir, eliminando el tiempo entre las 2 ecuaciones paramétricas:

$$x = 3t^2 + 1$$

$$y = 4t^2 + 2 \Longrightarrow t^2 = \frac{x-1}{3}$$

$y = 4(\frac{x-1}{3}) + 2 = \frac{4}{3}x + \frac{2}{3}$, que es la ecuación de una recta, y ya que $a = 10m/s^2 = cte$ podemos concluir que se trata de un movimiento rectilíneo y uniformemente acelerado.

1.10. Solución:

a) La velocidad será la derivada del vector de posición respecto al tiempo, ya que nos indicará cómo cambia la posición del móvil a lo largo del tiempo:

$$\vec{v} = \frac{\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(Rsen\omega t\vec{i} + Rcos\omega t\vec{j})$$

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(Rsen\omega t)\vec{i} + (Rcos\omega t)\vec{j}$$

Para poder realizar la operación hay que recordar cómo se deriva un producto y cómo se derivan las funciones trigonométricas

$$\vec{v} = R\omega\ cos\omega t\vec{i} + R\omega(-sen\omega t)\vec{j}$$

$$\vec{v} = R\omega\ cos\omega t\vec{i} - R\omega\ sen\omega t)\vec{j} \quad (m/s)$$

y el módulo del vector velocidad será la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de cada una de las componentes

$$v = \sqrt{R^2\omega^2 cos^2\omega t + R^2\omega^2 sen^2\omega t}$$

$$v = \sqrt{R^2\omega^2(cos^2\omega t + sen^2\omega t)} = \sqrt{R^2\omega^2}$$
$$v = R\omega \quad (m/s)$$

b) Para calcular el vector aceleración volvemos a derivar el vector velocidad con respecto al tiempo, pues estudia los cambios que el vector velocidad sufre a lo largo del tiempo

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(R\omega\ cos\omega t)\vec{i} - \frac{d}{dt}(R\omega\ sen\omega t)\vec{j}$$
$$\vec{a} = R\omega^2(-sen\omega t)\vec{i} - R\omega^2\ cos\omega t\vec{j}$$
$$\vec{a} = -R\omega^2\ sen\omega t\vec{i} - R\omega^2\ cos\omega t\vec{j} \quad (m/s^2)$$

y el módulo de la aceleración

$$a = \sqrt{R^2\omega^4 sen^2\omega t + R^2\omega^4 cos^2\omega t}$$
$$a = \sqrt{R^2\omega^4(sen^2\omega t + cos^2\omega t)} = \sqrt{R^2\omega^4}$$
$$a = R\omega^2\ m/s^2$$

c) La trayectoria que describe la partícula la estudiamos eliminando el tiempo en las ecuaciones paramétricas, para así obtener una expresión que relaciona una coordenada con las otras ($y = y(x)$).

$$x = Rsen\omega t$$
$$y = Rcos\omega t$$

Para poder hacerlo, elevamos al cuadrado las dos ecuaciones y luego sumamos miembro a miembro.

$$x = Rsen\omega t$$
$$y = Rcos\omega t \Longrightarrow x^2 + y^2 = R^2 sen^2\omega t + R^2 cos^2\omega t$$
$$x^2 + y^2 = R^2(sen^2\omega t + cos^2\omega t) \Longrightarrow x^2 + y^2 = R^2$$

La ecuación que hemos obtenido es la ecuación de una circunferencia, por lo tanto, ésta será su trayectoria.

1.11. Solución:

a) La expresión dada en el enunciado se refiere al módulo de la velocidad. Como la aceleración tangencial nos informa de los cambios del módulo de la velocidad y su valor se calcula derivando precisamente el módulo de esa magnitud, sólo tenemos que hacer

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dv}(3 + 7t) = 7m/s^2$$
$$\vec{a_t} = 7\vec{u_t} \quad (m/s^2)$$

b) La aceleración normal nos indica los cambios en la dirección del vector velocidad y ya que la trayectoria es curva, como nos indica en enunciado, no ha de ser nula. El módulo de esta componente de la aceleración se calcula

$$a_N = \frac{v^2}{R} = \frac{(3 + 7t)^2}{R}$$

como se puede observar, la componente normal de la aceleración será variable, y depende del instante que consideremos

$$a_N(t = 3s) = \frac{(3 + 7 \cdot 3)^2}{275} \approx 2{,}1m/s^2 \Longrightarrow \vec{a_N} = 2{,}1\vec{u_N} \quad (m/s^2)$$

Esta componente de la aceleración tiene siempre como dirección la normal a la trayectoria y sentido hacia el interior de la curvatura.

- $\vec{a} = \vec{a_t} + \vec{a_N}$: ésta seía la relación entre las componentes intrínsecas de la aceleración y la propia aceleración instantánea.

Para llegar a conocer el valor de la aceleración instantánea recordamos que el módulo será siempre la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de cada una de estas componentes

$$a = \sqrt{{a_t}^2 + {a_N}^2} = 7{,}3 m/s^2$$