Ejercicios resueltos de cálculo de límites de funciones

Calcular los siguientes límites:

1 $\lim_{x\to 1}(-x^2-5x+6)$

$$\lim_{x\to 1}(-x^2-5x+6)=-1^2-5\cdot 1+6=0$$

2 $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2}{x^2-5x+2}$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2}{x^2-5x+2}=\frac{3^2-2}{3^2-5\cdot 3+2}=-\frac{7}{4}$$

3 $\lim_{x\to 1}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+x}\right)$

$$\lim_{x\to 1}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+x}\right)=\left(\sqrt{1^2+3\cdot 1}-\sqrt{1^2+1}\right)=2-\sqrt{2}$$

4 $f(x)=\begin{cases} 1 & \text{si} & x<-1 \\ x^2 & \text{si} & -1\le x<1 \\ 2 & \text{si} & x\ge 1 \end{cases}$

En los puntos x = -1 y x =1

En **x = -1**, los **límites laterales** son:

Por la izquierda: $\lim_{x\to -1^-} 1=1$

Por la derecha: $\lim_{x\to -1^+} x^2=1$

Como en ambos casos coinciden, existe el límite y vale **1**.

En **x = 1**, los **límites laterales** son:

Por la izquierda: $\lim_{x\to 1^-} x^2=1$ **Por la derecha**: $\lim_{x\to 1^+} 2=2$

Como no coinciden los límites laterales **no tiene límite en x = 1**.

5 $\lim\limits_{x \to \infty} (3x^4 + x^3 - 2x)$

$$\lim_{x \to \infty} (3x^4 + x^3 - 2x) = \infty$$

6 $\lim\limits_{x \to \infty} (-x^2 + 5x + 6)$

$$\lim_{x \to \infty} (-x^2 + 5x + 6) = -\infty$$

7 $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{3x^4 + x^3 - 2x}$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{3x^4 + x^3 - 2x} = 0$$

Calcular los límites cuando x tiende a menos infinito:

1 $\lim\limits_{x \to -\infty} (3x^4 + x^3 - 2x)$

$$\lim_{x \to -\infty} (3x^4 + x^3 - 2x) = \lim_{x \to \infty} (3x^4 - x^3 + 2x) = \infty$$

2 $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x^2 + 5x + 6)$

$$\lim_{x \to -\infty} (-x^2 + 5x + 6) = \lim_{x \to \infty} (x^2 - 5x - 6) = \infty$$

3 $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{2x^2 - 8x - 3}$

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^3 - 5x} = \lim_{x \to \infty} \sqrt{(-x)^3 - 5(-x)} = \lim_{x \to \infty} \sqrt{-x^3 + 5x}$$

No existe el límite, porque el radicando toma valores negativos.

4 $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^3 - 5x}$

$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt[3]{x^3 - 5x} = \lim_{x \to \infty} \sqrt[3]{(-x)^3 - 5(-x)} = \lim_{x \to \infty} \sqrt[3]{-x^3 + 5x} = -\infty$$

Hallar los siguientes límites:

1 $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2+2x+1}{x^2-1}$

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2+2x+1}{x^2-1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{(x+1)^2}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)}{x-1} = \frac{0}{-2} = 0$$

2 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+x)^2-1}{x}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^2-1}{x} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+2x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x(x+2)}{x} = \lim_{x\to 0}(x+2) = 2$$

3 $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x^2-5x+6}$

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x^2-5x+6} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 3} \frac{(x+3)(x-3)}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x\to 3} \frac{(x+3)}{(x-2)} = 6$$

4 $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-1}{x^2+2x+1}$

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2-1}{x^2+2x+1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)^2} = \lim_{x\to -1} \frac{x-1}{x+1} = \frac{-2}{0}$$

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{x-1}{x+1} = \infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x-1}{x+1} = -\infty$$

No tiene límite en x = -1

5 $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3} - \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 3} \frac{(\sqrt{x+1}-2)(\sqrt{x+1}+2)}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} =$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{x-3}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} = \lim_{x \to 3} \frac{1}{(\sqrt{x+1}+2)} = \frac{1}{4}$$

6 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{1-\sqrt{1-x}}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{1-\sqrt{1-x}} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x(1+\sqrt{1-x})}{(1-\sqrt{1-x})(1+\sqrt{1-x})} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x(1+\sqrt{1-x})}{1-(1-x)} = \lim_{x \to 0} \frac{x(1+\sqrt{1-x})}{x}$$

$$\lim_{x \to 0} (1+\sqrt{1-x}) = 2$$

7 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+16}-4}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{\sqrt{x+16}-4} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{x+9}-3)(\sqrt{x+9}+3)(\sqrt{x+16}+4)}{(\sqrt{x+16}-4)(\sqrt{x+16}+4)(\sqrt{x+9}+3)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(x+9-9)(\sqrt{x+16}+4)}{(x+16-16)(\sqrt{x+9}+3)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(\sqrt{x+16}+4)}{(\sqrt{x+9}+3)} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

Calcular los límites:

1 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5-3x^2}{x^4-x^3}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^5-3x^2}{x^4-x^3}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x^5}{x^5}-\dfrac{3x^2}{x^5}}{\dfrac{x^4}{x^5}-\dfrac{x^3}{x^5}}=\frac{2-\dfrac{3}{x^3}}{\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}=\frac{2-0}{0-0}=\infty$$

2 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3^{x+2}+2^x}{3^{x-2}}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3^{x+2}+2^x}{3^{x-2}}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3^x\cdot 3^2+2^x}{3^x\cdot 3^{-2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{3^x\cdot 3^2}{3^x}+\dfrac{2^x}{3^x}}{\dfrac{3^x\cdot 3^{-2}}{3^x}}=\frac{9+0}{\dfrac{1}{9}}=81$$

3 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x-1}{\sqrt[3]{5x^3+4x-2}}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x-1}{\sqrt[3]{5x^3+4x-2}}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{7x}{x}-\dfrac{1}{x}}{\sqrt[3]{\dfrac{5x^3}{x^3}+\dfrac{4x}{x^3}-\dfrac{2}{x^3}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{7-\dfrac{1}{x}}{\sqrt[3]{5+\dfrac{4}{x^2}-\dfrac{2}{x^3}}}=\frac{7}{\sqrt[3]{5}}$$

4 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x^4+x^2+1}}{x^2+1}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^4+x^2+1}}{x^2+1}=\frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{4x^4 + x^2 + 1}}{x^2 + 1} = \frac{\sqrt{4}}{1} = 2$$

5 $$\lim_{x \to \infty} \frac{(x^2 + 1)^2 - 3x^2 + 3}{x^3 - 5}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(x^2 + 1)^2 - 3x^2 + 3}{x^3 - 5} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{(x^2 + 1)^2 - 3x^2 + 3}{x^3 - 5} = \infty$$

Al elevar el binomio del numerador al cuadrado obtenemos x^4, y por tanto el grado del numerador es mayor que el grado del denominador.

6 $$\lim_{x \to \infty} \frac{2^{x+1} + 3^{x+1}}{2^x + 3^x}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2^{x+1} + 3^{x+1}}{2^x + 3^x} = \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2^x \cdot 2 + 3^x \cdot 3}{2^x + 3^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x + 3}{\left(\frac{2}{3}\right)^x + 1} = 3$$